

50639

N. 49.

MATHEMATIKAI
ÉS
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESÍTŐ.

A M. TUD. AKADEÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

KÖNIG GYULA

OSZTÁLYTITKÁR.

HUSZONNEGYEDIK KÖTET.

1906.

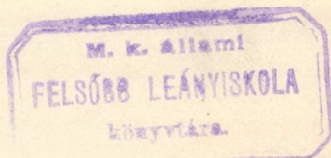
BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEÉMIA.

1906

N
131
1906

A BUDAPESTI
M. KIR. ÁLLAMI MÁRIA TERÉZIA-LEÁNYGIMNÁZIUM
TANÁRI KÖNYVTÁRA.



TARTALOM.

	<i>Lap</i>
BAUER MIHÁLY: Affectus nélküli egyenletekről	30
BUCHBÜCK GUSZTÁV: Az ionok hydratatiójáról	210
DADAY JENŐ: Édesvízi mikroskopi állatok Mongoliából	34
DADAY JENŐ: Adatok Hátsóindia, Sumatra, Java és a Hawaii-szigetek Copepoda-faunájának ismeretéhez	262
DADAY JENŐ: Délamerikai halakban élősködő Trematodák	503
DADAY JENŐ: Délamerikai halakban élősködő Paramphistomida-fajok anatómiai és szövettani viszonyai	560
DONATH GYULA: Az epilepsziás roham kiváltásánál szereplő anyagokról	770
FEJÉR LIPÓT: A tömegpont egyensúlya ellenálló közegben	109
FEJÉR LIPÓT: A Fourier-féle sorról	292
FEJÉR LIPÓT: A Fourier-féle sorokról	369
FEKETE SÁNDOR: A keményítő-emésztés reactionhője	794
FRÖHLICH IZIDOR: A elhajlított fény polározásának új törvényszerűségei	465
HORVÁTH GÉZA: A palearktikus faunaterület Tingitidái	495
ISTVÁNFFI GYULA: A szőlő fásoltványának forradásáról	819
KÖNIG GYULA: A halmazelmélet alapjai és a continuum problémája	343
KÖVESLIGETHY RADÓ: A makroseismikus rengések feldolgozása	349
KÖVESLIGETHY RADÓ: Seismikus hosszkülömbség-meghatározás	434
KÖVESLIGETHY RADÓ: A seismikus hullámfelület és a seismikus távolhatás törvénye	446
KÖVESLIGETHY RADÓ: A cerami földrengés	683
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Adalék az elimináció elméletéhez	786
LÖRENTHEY IMRE: Budapest pannoni- és levantei-korú rétegei és ezek faunája	298
MÁGOCSI-DIETZ SÁNDOR: A kenderrel végzett tenyésztési kísérletek	145
ÓNODI ADOLF: Az orrüreg középső járatának hártvás részéről	183
PRINZ GYULA: A Lytoceratidae Neum. család tapadóizmának felfedezése a 3. vigilioi (Garda) dogger faunájában (I. tábla)	418
RADOS GUSZTÁV: Stationarius simuló síkok	283
RADOS GUSZTÁV: A Sylvester-féle resultans analogonja a lineár differenciálegyenletek elméletében	805

	<i>Lap</i>
REX SÁNDOR: A szénhidrogének haloidszármazékainak oldékonysága vízben	90
RÉTHY MÓR: Az általánosított Ostwald-féle elvről és a mechanikai hő- elmélet második főtételéről	718
RÉVÉSZ GÉZA: A színes fényingerek hatásának gyöngítése fehér fény- nyel.....	166
SCHLESINGER LAJOS: A lineár differenciálrendszerek elméletéhez	117
SCHLESINGER LAJOS: Asymptotikus előállítások a lineár differenciál- rendszerek elméletében	619, 741
SCHULLER ALAJOS: Rezgések mikroskopi megfigyeléséről az elektromos ellentállás meghatározásánál	199
SCHULLER ALAJOS: A gőzkaloriméterhez tartozó mérleg	250
SCHULLER ALAJOS: A rezgő lemezek csomó-vonalainak metszési pont- jairól.....	256
TERKÁN LAJOS: β Lyrae pályaelemének kiszámítása spektroskopiai és photometriai adatokból	391
TUZSON JÁNOS: A kleistogamia új esete	756
WINKLER LAJOS: A gázok absorptiocoëfficiensének a hőmérsékkel való változásának törvényszerűségéről	78
WITTMANN FERENCZ: A budapesti centrale szolgáltatta váltakozó áram vizsgálata	1
ZEMPLÉN GYÖZÖ: A legnagyobb energiaforgalom elvéről	455

A BUDAPESTI CENTRALE SZOLGÁLTATTA VÁLTA- KOZÓ ÁRAM VIZSGÁLATA.

WITTMANN FERENCZ-től.

A Magyar Villamossági Részvénytársulat budapesti áram-nemző telepe és áramelosztó hálózata Zipernovszky-Déri-Bláthy rendszere szerint készült, melyre nézve jellemző, hogy a centralében termelt nagy feszültségű váltakozó áramot a primær távvezeték útján az ellátandó területre vezetik; a fogyasztó helyeken párvonalasan kapcsolt transzformatorok vannak, melyeknek secundær vezetékében indukált s a használati feszültségre transzformált áramát világítási és motorikus célokra használják fel.

E transzformált áram befolyásának vizsgálata a jelen dolgozat tárgya.

A szóban levő vizsgálat végzésére ezidőszert háromféle mód használható előnyösen; ezeknek lényegét tárgyalom, azután pedig a kísérleti berendezések részleteire és a kísérleti vizsgálatok eredményének bemutatására térek át.

Az első módszert, melylyel az áramgörbékét pontról-pontra kapjuk, először Lenz¹ alkalmazta a Stöhrer-féle mágneselektromos gép szolgáltatta áram vizsgálására.

A múlt század nyolczvanas évei óta, midőn Joubertnek² Lenz-től független alapvető dolgozatai megjelentek, a kísérleti

¹ Lenz, Poggendorf Annalen 92. kötet, 128. lap, 1854. évf.

² Joubert, Comptes Rendus 91. kötet, 161. lap, 1880. évfolyam és Annales scientifiques de l'école normale supérieure 10. kötet, 131. lap, 1881. évfolyam.

berendezést a Joubert-módszer elnevezéssel illetik, mert nevezett szerző volt az első, ki az eljárást a nagyobb méretű, tehát ipari célú Siemens-féle váltakozó áramu generator vizsgálására alkalmazta.

Joubert eredeti módszere azonban a szóban forgó vizsgálatoknál módosítást kíván; mert a fogyasztás helye, mely esetünkben a kir. József-műegyetem technikai-fizikai laboratoriuma, a centralétól több kilométernyire lévén, a Joubert-féle kontakt-készüléket a generator forgó részével közvetlen mechanikai kapcsolatba nem hozhatjuk.

Ily esetben a fogyasztás helyén a Joubert-kontaktust a primær árammal egyenlő periodusu transformált árammal táplált, könnyen és mindig terhelés nélkül járó, lehető kis induktív ellentállású synchron motorral forgatjuk. Minthogy a synchronjárású motor sarkváltozásainak száma a centrale generatoréival megegyező, a kontaktkészülék bizonyos helyzetének a generator álló és forgó részének bizonyos relativ helyzete felel meg; ennél fogva az elektrometer vagy galvanometer a rövid időközökben ismétlődő egyenlő impulsusoktól állandó jelzést ad.

A synchronmotornak ily célú alkalmazására vonatkozó első közlemény tudtommal Flemingtől¹ való.

Az időrendben második oscillografiai módszer Blondel, illetőleg Duddell² közleményei óta van használatban. Az ezidő szerint leginkább elterjedt Blondel-Duddell típusú eszköznél a vizsgálandó áramok a galvánmérő gyors rezgésű mozgékony vezetőket járkák át, az álló részt erős elektromágnessel képezzük.

¹ Fleming, The Electrician 34. kötet, 460. lap, 1895. febr. 15. Nem hagynám felemlítlenül, hogy a kir. József-műegyetem gépházában levő Zipernovszky-féle öngerjesztő váltakozó áramú generátor és transformált árama görbéit 1894 június havában, tehát Fleming közleményének megjelenése előtt, a földszintes gépházától teljesen elkülönített épület első emeletén levő technikai-fizikai laboratóriumban vettem fel; a használt synchronmotort, melyet Schlatter Alfred tanár úr ajándékozott az intézetnek, a szóban levő célra magam módosítottam.

² Blondel, Comptes Rendus 116. kötet. 502. lap, 1893. évfolyam. Duddell, The Electrician 39. kötet, 637. lap, 1897. évfolyam.

Emez eljárással két, sőt három áramgörbét is egyidőben állíthatunk elő.

A harmadik módot a Braun-féle kathodcső¹ szolgáltatja, melynél a kathodsugárnak a vizsgálandó áram okozta kitérésével az áramgörbét egész terjedelmében állíthatjuk elő. Ez eljárással egyidőben, vagy egyszerübb kísérleti összeállítást használva, időközi egymásutánban, két vagy több görbét is kaphatunk, melyeknek fáziseltolódása is kellően mutatkozik.

Alább közlendő kísérleteimnél az imént jellemzett mind a háromféle eljárást alkalmaztam. A részletek és eredmények az alábbiakban következnek.

I. A módosított Joubert-féle eljárással végzett kísérletek.

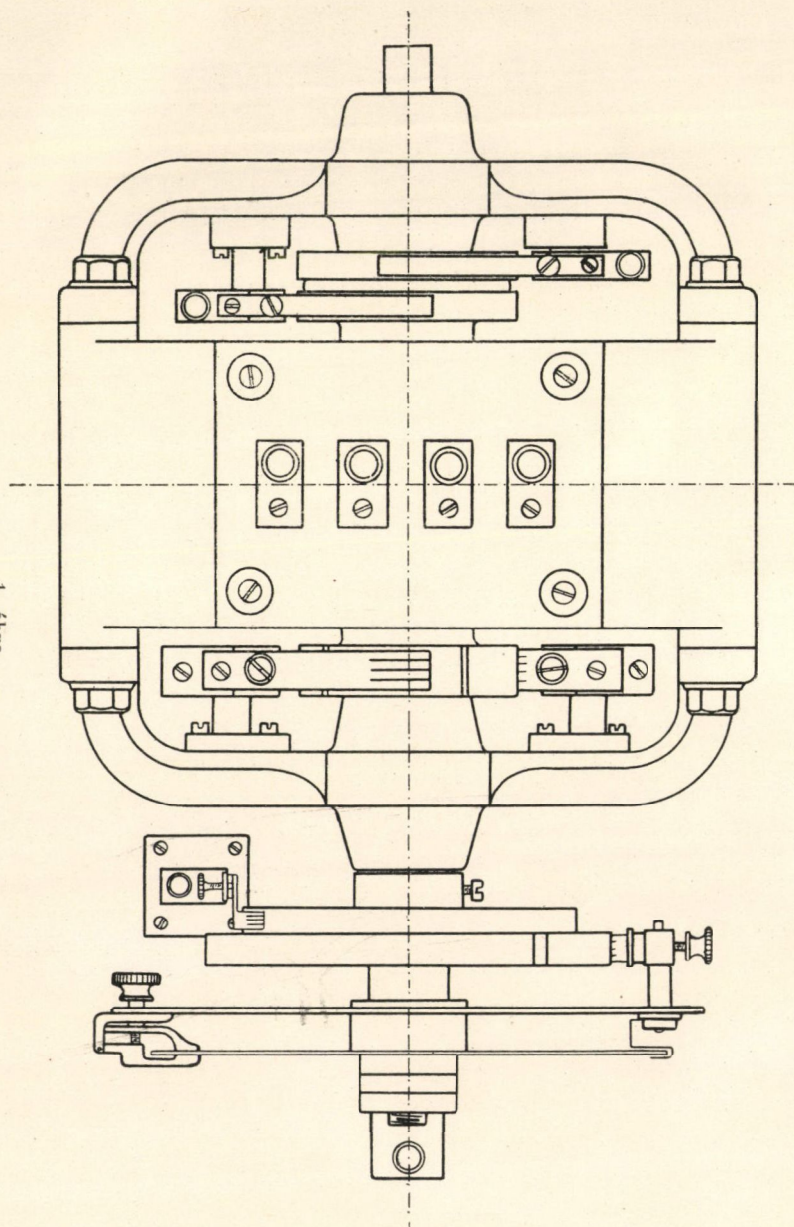
A használt négysarkú kis synchronmotor (1., 1a és 2. ábra) a londoni Nalder Brothers-czég készítménye; álló és forgó alkatrészeinek, a stator és rotor-nak dróttekercei lemezes vasmagvakat tartalmaznak. A forgó részbe az áramot a tengelyre ékelt két gyűrűhöz illeszkedő fémrugók útján vezetjük. A készülék eredeti berendezése olyan volt, hogy az egyik alkatrészébe állandó, a másikba váltakozó áramot kellett bevezetni; a forgástengelyre huzott kaucukgyűrűhöz szorított nagy átmérőjű fakorongot kézzel hajtván, a motort gyors forgásba hozzuk és magára hagyjuk. A forgássebesség lassudása közben a motor synchronismusba jön és tovább jár. Tapasztalás szerint a motornak emez indítási módja körülményes; kényelmessé válik azonban azzal a módosítással, melyet a készüléken tettem.

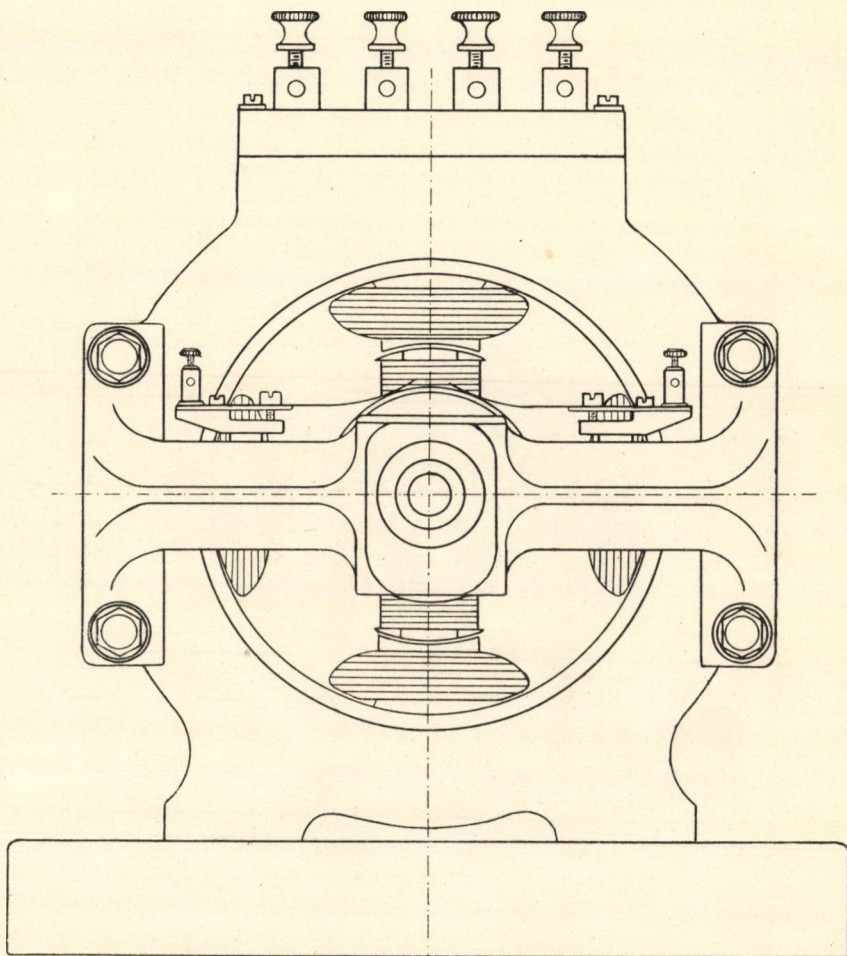
A forgástengelyre a négy sarknak megfelelőleg négyszeletű kommutatort ékeltem; az első és harmadik szelet egymással, a második és negyedik szelet szintén egymással és egy-egy szeletpár a rotor drótvégeivel van állandóan összekötve, a kommutator két szomszédos szeletéhez rugalmas árambevezetők illeszkednek.

Ha a 3. ábrán feltüntetett A_1 hármas átkapcsolót 1,1,1

¹ Braun, Wiedemann Annalen 60. kötet, 532. lap, 1897. évf. Zennek, Wied. Ann. 69. köt. 838. l. 1899.

1. ábra.



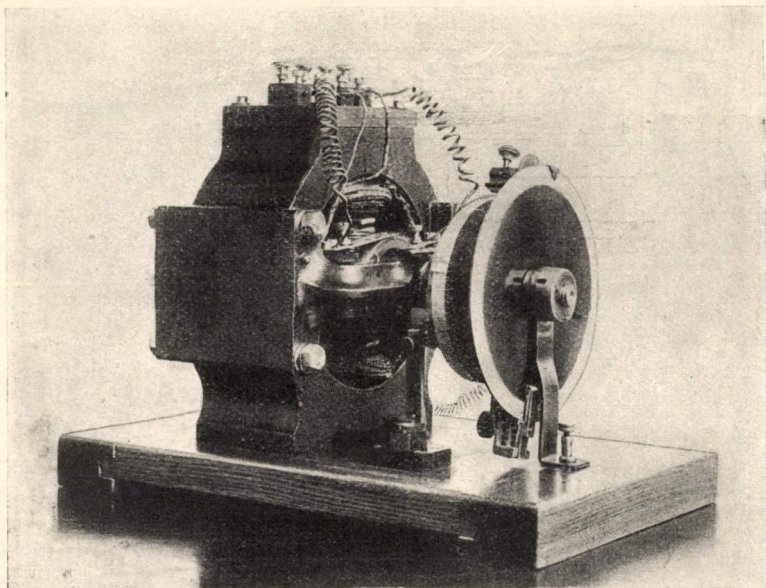


1a. ábra.

helyzetbe hozzuk, a stator, rotor és kellő ohmikus ellentállás sorosan kapcsoltatnak. Ha az M motort a transzformator secundær E_2 kapcsaival összekötjük, a motor gyenge megbillentésre forgásnak indul és csakhamar synchronismusba jön; erre a hármas átkapcsolót 2,2,2. helyzetbe hozzuk. Ekkor a motor synchron járását folytatja, de most a statort E_1 villamforrás-

ból már állandó (2,8 ampernyi), a forgó részt pedig váltakozó áram járja át, mely 1,5 ampernél nem erősebb. Ezután a kommutatorhoz illeszkedő árambevezetőket leemeljük s a motort a legcsekélyebb zavar nélkül akár napokon keresztül járathatjuk.

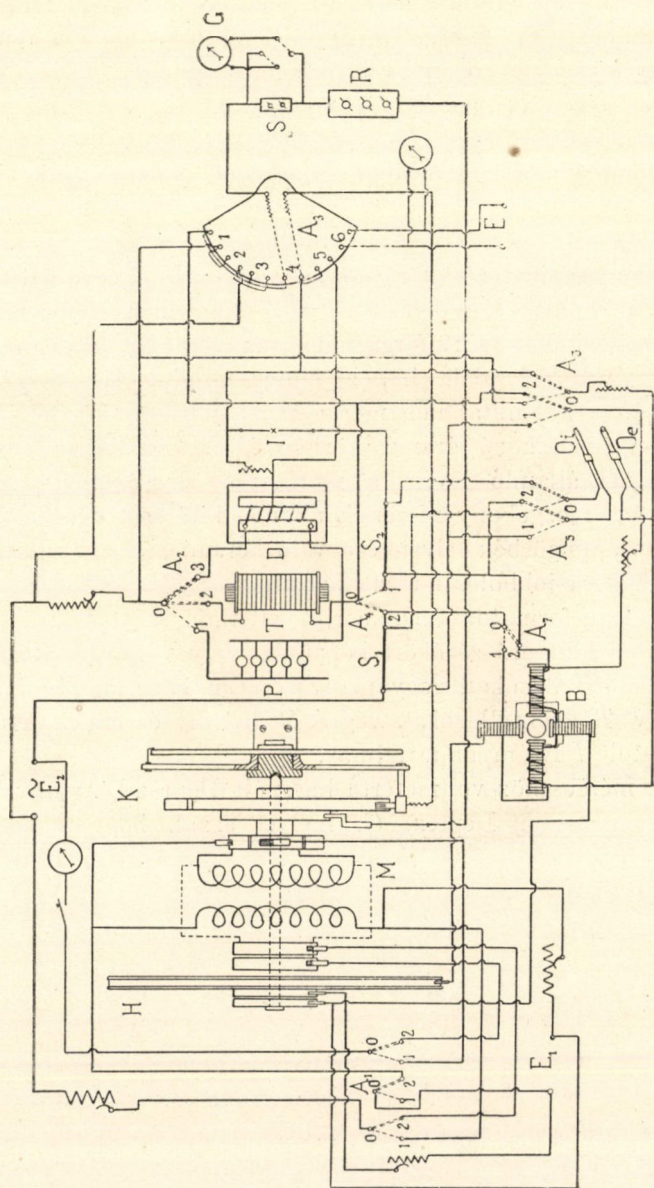
Utóbb bemutatandó oscillografiai kísérleteim arról tettek tanuságot, hogy az üresen járó kis synchronmotor, melylyel



2. ábra.

a tárgyalt módon csak csekély induktív ellentállást hoztunk be a váltakozó áramú körbe, az áramgörbéket egyáltalán nem módosítja; változatlanul megmaradnak ezek, akár járathatjuk a synchronmotort, akár pedig a váltakozó áramú körből kiiktatjuk.

E synchronmotor tengelyére erősített Joubert-kontakt (K, 3. ábra) velejében 10,3 cm átmérőjű, 8 mm vastag ebonit-korong van, melynek palástjába a tengellyel párvonalas 4 mm széles fémsáv van beeresztve; e fémsáv sugár rész útján a tengelyre ékelt 9 cm átmérőjű fémkoronggal van összekötve.



3. ábra.

A fémkoronghoz állandó helyzetű fémrugó illeszkedik; az ebonitkoronghoz ugyancsak fémrugó illeszkedik, mely a tengelylyel egy közepesen rögzített hüvelyen surlódással körben járatható kar végén van; e karvég még mutatóval van ellátva, úgy hogy az ebonitfejű csavarral megrögzíthető karnak bármely helyzetét fokbeosztással ellátott álló korongon leolvashatjuk.

Mivel a budapesti centrale áramnemzői percenként körülbelül 5000-szer váltakozó áramot adnak, a négysarkú synchronmotor perczenként 1250 körülforgást végez; ennél fogva a 10,3 cm átmérőjű ebonitkorongot érintő rugó a 4 mm széles beeresztett fémsávot minden körülforgásnál csak 0,00062 másodperczig érinti; ily rövid ideig hat a motor minden körülforgásánál ismétlődő s a beiktatandó mérőeszközt jelzésre készítő impulzus, mely váltakozó áramú körben is a kontaktkar egyazon helyzeténél állandó lévén, a mérőeszköz lassú lengésű és jól csillapított mozgékony részének állandó kitérését okozza.

Az áramgörbék felvételére való berendezés kapcsolási rajzát a 3. ábra jobboldali része mutatja.

A transzformator secundærjét villamforrásul tekintve, E_2 kapcsaiból kiinduló zárókört képzünk, mely vagy tisztán P ohmikus ellentállásokat, vagy pedig sorosan kapcsolt ohmikus és induktív T ellentállásokat, végre D divisort és ennek kapcsaihoz csatolt I ivlámpát tartalmaz.

A mérőeszköz voltméterül használt Deprez-D'Arsonval galvanmérő (röviden Deprez) G , melyet azzal, hogy mozgékony tekercsére két rézkeretet ragasztunk, lassúbb lengésűvé teszünk, egyszersmind jó csillapítással látunk el.

A Deprezhez tartozó S shuntot nagy additionalis R ohmikus ellentállással és a synchronmotorral járatott Joubert kontakttal sorosan kapcsolván, a zárókör ama két pontjához csatoljuk, a melyek között működő *feszültség görbéjét* kívánjuk felvenni.

A kontaktkar bizonyos helyének megfelelő állandó kitérése a Deprez-nek a feszültséggel arányos. Kísérleteimnél a kontaktkarral rendszerint öt-öt fokkal haladva, egy teljes áramgörbének 36 pontja adódott ki; a legnagyobb értékek táján a pontokat sűrűbben vettem fel, és 45—49 adatból is szerkeszthettem egyes görbéket.

Az áramerősségi görbe felvételénél a Deprez-nek előbb említett körét a zárókör ρ indukciómentes ellentállás végpontjaihoz kapcsoljuk; a mutatkozó kitérés az eme ellentállás végpontjai között működő e' feszültségnek mértéke; az I áramerősséget Ohm törvénye szerint

$$I = \frac{e'}{\rho}$$

kifejezés adja.

A Deprez-nek a homorú tükrétől 1 m-nyire levő áttetsző üvegskálán megfigyelt kitéréseiből a feszültséget volt-okban kell kifejeznünk, vagyis a készüléket kalibrálnunk kell. Evégből úgy járunk el, hogy a synchronmotorral forgatott kontaktkészüléket a Deprez és addiczióanalízis ohmikus ellentállás körében meghagyva, e vezeték végpontjait E állandó villamforrás kapcsolaihoz kötjük, miközben A_3 átkapcsoló a 6-tal jelzett helyen van; ugyane kapcsolokhoz közvetlen jelző precízziós voltmérőt csatolunk. Most K kontaktkarral körüljárva, ennek helyzetétől függetlenül, a Deprez állandónak mutatkozó kitéréséből és a közvetlen jelző voltmérő együtvé tartozó adataiból, utóbb a Deprez bármely skálárésznyi kitérésének megfelelő feszültségi értékek voltakban kiadódnak.

Hogy a Deprez mindig kellő kitéréseket mutasson, megfelelő R ellentállásokat kell választanunk; ennek figyelembe vételével a Deprez adatait voltokra, illetőleg amperekre, röviden a következő módon számítjuk át.

Tegyük fel, hogy a feszültségi görbe felvételénél a kontaktus valamely állásánál az áttetsző skálán n_e osztályrészt olvasunk le, melynek a keresett e volt feszültség felel meg; a nagy addiczióanalízis ellentállás R_e ; a Deprez ellentállása g ; a készüléket megfelelő kitérések érdekében s ellentállásból ágaztattuk el; a kontaktust tartalmazó zárókörnek ellentállása

$$R_e + \frac{gs}{g+s};$$

A kalibrálásnál a közvetlen jelző voltmérővel megmért állandó e_1 volt feszültségnek n_1 osztályrész felel meg az



ellentállású körben, ahol R_1 a jelen esetben használt additio-nalis ellentállás.

A két esetben az áramerősségeket i és i_1 -gyel jelölve, érvé-nyes, hogy

$$e = i \left(R_e + \frac{gs}{g+s} \right) = An_e \left(R_e + \frac{gs}{g+s} \right), \quad 1)$$

$$e_1 = i_1 \left(R_1 + \frac{gs}{g+s} \right) = An_1 \left(R_1 + \frac{gs}{g+s} \right), \quad 2)$$

a hol A az arányossági tényező.

A két kifejezésből

$$e = \left[\frac{e_1}{n_1} \frac{R_e + \frac{gs}{g+s}}{R_1 + \frac{gs}{g+s}} \right] n_e \text{ volt.} \quad \text{I.}$$

Az áramerősségi görbék felvételénél tegyük fel, hogy a ρ ohmikus ellentállás végpontjaihoz csatolt

$$R_i + \frac{gs}{g+s}$$

ellentállású körben a Deprez n_i osztályrész kitérését ad; a fe-szültségesés ez esetben

$$e' = i' \left(R_i + \frac{gs}{g+s} \right) = An_i \left(R_i + \frac{gs}{g+s} \right),$$

ez egyenletet a 2-vel jelzettel osztva

$$e' = \left[\frac{e_1}{n_1} \frac{R_i + \frac{gs}{g+s}}{R_1 + \frac{gs}{g+s}} \right] n_i,$$

vége

$$\text{I} = \left[\frac{e_1}{n_1} \frac{R_i + \frac{gs}{g+s}}{R_1 + \frac{gs}{g+s}} \cdot \frac{1}{\rho} \right] n_i \text{ amper.} \quad \text{II.}$$

E számítások feltételezik, hogy a Joubert-kontaktusnál el-hanyagolható átmeneti ellentállás van, a miért is a kontaktkar

rugójának a beeresztett fémszelethez való biztos és állandó érintkezésére különös gondot kell fordítanunk; ha ebben a tekintetben valami hiány van, azt a Deprez rögtön azzal jelzi, hogy a görbék felvételénél a kontaktkart egy helyen tartva, a kitérésben szabálytalan ingadozásokat tapasztalunk. A kontakt-készülék helyes működésének legbiztosabb kriteriuma, a melynek kielégítéséről minden kísérletsorozat előtt meg kell győződ-nünk, az, hogy állandó feszültség alkalmazásánál a kontaktkart körüljárva, ennek bármely helyzetében a Deprez-nek változatlan kitérést kell mutatnia.

1. A transzformator K_2 secundær kapcsaihoz csatlakozó záró-körben ohmikus ellentállás van. Ezt 6 db. párvonalasan kapcsolt 25 fényerősségegységnyi szénfonalas izzólámpával P (3. ábra) és velük sorosan kapcsolt $\rho = 2,63 \Omega$ -nyi Siemens-féle szalag ellentállással képezzük.

Az izzólámpák szálvégei közötti feszültség e és áramerős-ség I görbéinek felvételénél

az átkapcsolók	A_2	A_3	A_4
állásuk e felvételénél	0,1	1	0,1
I felvételénél	0,1	2	0,1
kalibrálásnál	—	6	—

A kísérleti adatokat a következő táblázat adja: (l. a 12.-dik lapon.)

2a) A transzformator secundærjében ohmikus ellentállás és ezzel sorosan kapcsolt induktív ellentállás van. Az ohmikus ellentállás $31,6 \Omega$ Siemens-féle szalagellentállással, az induktív ellentállás faorsóra felcsavart dróttekerccsel képeztetett; ez utóbbi 17 cm hosszú, 1,5 mm átmérőjű elszigetelt vörösrézdrót-ból hat rétegen 507 menetet tartalmaz. Az orsó üregén lágy vasdrótból készített 30 cm hosszú nyaláb van symmetriás hely-zetben átdugva.

Az e berendezéssel végzett első kísérletsorozatban 3 görbét vettem fel; az egyik E a kapocsfeszültség görbéje, midőn a transzformator secundærje $R = 20.000 \Omega$ -ot és a galvanometert tartalmazza, tehát gyakorlati értelemben áram nélküli. A máso-

dik görbe az induktív ellentállás végpontjai közötti feszültség görbéje e , a harmadik az áramerősség görbéje I .

A 3. ábra szerint e méréseknél

az átkapcsolók	A_2	A_3	A_4
állásuk e felvételénél	0,2	1	0,1
I felvételénél	0,2	2	0,1
E felvételénél	0,2	3	0,1

A kísérleti adatok kimutatása a következő: (l. 13. l.)

1. A transzformator secundærjében ohmikus ellentállás van.

(1903 február 2.)

Folyó szám	α	n_e	n_i	e volt	I amper
1	0	80,0	69,0	115,2	3,78
2	5	82,5	70,0	118,8	3,84
3	10	81,5	69,0	117,3	3,78
4	20	60,0	55,0	86,4	3,02
5	30	30,0	27,0	43,2	1,48
6	40	+ 7,5	+ 6,0	+ 10,8	+ 0,33
7	50	31,5	27,0	45,4	1,48
8	60	49,0	43,0	70,6	2,36
9	70	65,0	55,0	93,6	3,02
10	80	76,0	65,0	109,5	3,56
11	85	78,0	67,0	112,4	3,68
12	90	80,0	68,5	115,2	3,76
13	95	82,5	71,0	118,8	3,90
14	100	80,5	70,0	116,0	3,84
15	110	62,5	53,0	90,0	2,90
16	120	33,0	28,0	47,5	1,53
17	130	9,0	— 7,0	— 13,0	0,38
18	140	35,0	28,0	50,5	1,53
19	150	52,0	43,0	75,0	2,36
20	160	68,0	56,5	98,0	3,10
21	170	76,0	63,5	109,0	3,48
22	175	80,0	68,0	115,0	3,73
23	180	82,0	68,5	118,0	3,76
24	185	83,0	70,5	119,5	3,87
25	190	81,5	70,0	117,3	3,84
26	200	64,0	55,0	92,2	3,02
27	210	32,5	28,0	46,8	1,53
28	220	+ 5,0	+ 3,0	+ 7,2	+ 0,16
29	230	34,0	26,5	49,0	1,45

Az átszámítás voltokra illetőleg amperekre a következő formulákkal történt (I., II. egyenletek).

$$e = 1,44 \ n_e \text{ volt}$$

$$I = 0,0548 \ n_i \text{ amper}$$

A fázisban megegyező periodikus görbéket a 4. ábra mutatja.

2a) A transzformator secundærjében sorosan kapcsolt ohmikus és induktív ellentállás van.

(1905 június 17. de.)

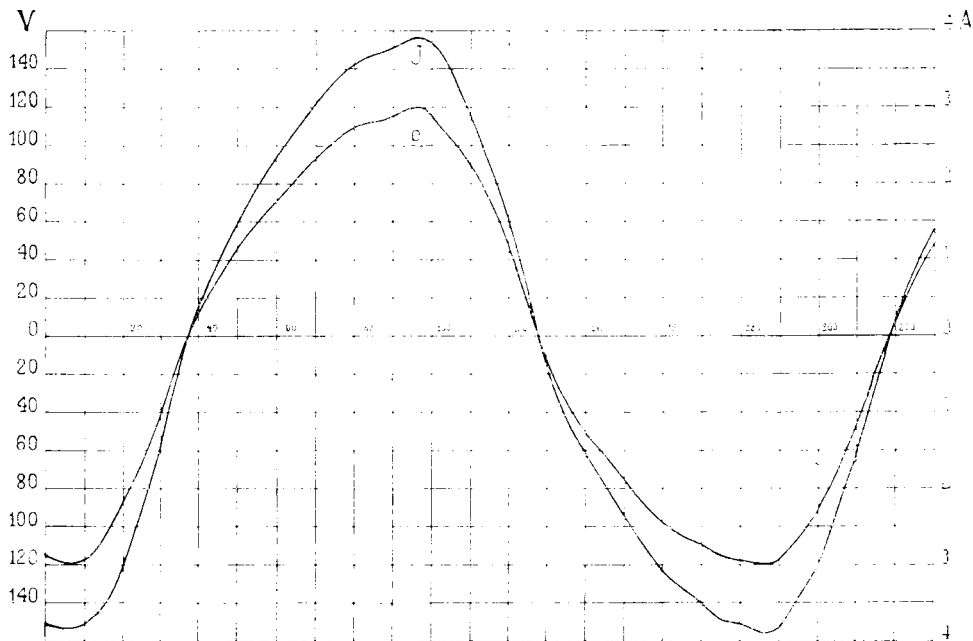
Folyó szám	α	n_e	n_c	n_i	E_{volt}	e_{volt}	I_{amper}
1	300	70,0	26,5		140,0	26,5	
2	305	69,0	19,0		138,0	19,0	
3	310	61,0	6,5		122,0	6,5	
4	315	53,0	+ 8,5		106,0	+ 8,5	
5	320	45,5	20,5		91,0	20,5	
6	325	33,5	29,5		67,0	29,5	
7	330	20,0	49,5		40,0	49,5	
8	335	5,5	65,0	- 23,5	11,0	65,0	- 1,48
9	340	+ 13,0	70,0	13,5	+ 26,0	70,0	0,85
10	345	25,0	69,0	2,5	50,0	69,0	0,02
11	350	37,0	70,0	+ 6,0	74,0	70,0	+ 0,38
12	355	43,0	65,0	13,5	86,0	65,0	0,85
13	0	51,0	57,0	24,0	102,0	57,0	1,51
14	5	58,0	53,0	30,5	116,0	53,0	1,92
15	10	64,5	49,0	39,0	129,0	49,0	2,46
16	15	68,5	45,0	45,0	137,0	45,0	2,83
17	20	71,0	39,0	52,0	142,0	39,0	3,30
18	25	73,5	33,0	56,0	147,0	33,0	3,50
19	30	75,0	26,0	59,5	150,0	26,0	3,72
20	35	75,0	20,5	63,0	150,0	20,5	3,96
21	40	68,0	7,0	63,0	136,0	7,0	3,96
22	45	59,5	7,5	61,5	119,0	- 7,5	3,88
23	50	49,0	22,5	56,5	98,0	22,5	3,56
24	55	39,0	34,0	52,0	78,0	34,0	3,28
25	60	18,0	51,0	44,5	36,0	51,0	2,80
26	65	3,5	70,0	35,5	7,0	70,0	2,24
27	70	- 12,0	70,5	21,0	24,0	70,5	1,32
28	75	22,5	71,0	8,5	45,0	71,0	0,53
29	80	34,0	69,5	3,0	68,0	69,5	0,20
30	85	42,0	63,5	11,5	84,0	63,5	0,72
31	90	49,5	58,0	21,5	99,0	58,0	1,35
32	95	55,0	54,5	29,0	110,0	54,5	1,83
33	100	62,0	51,5	38,5	124,0	51,5	2,42
34	105	67,0	45,5	44,5	134,0	45,5	2,80
35	110	70,0	39,5	50,0	140,0	39,5	3,15
36	115	71,5	32,0	55,5	143,0	32,0	3,50
37	120	73,0	26,5	59,0	146,0	26,5	3,70
38	125	72,5	20,5	62,0	145,0	20,5	3,90
39	130	70,0	7,0	62,0	140,0	7,0	3,90
40	135	60,0	+ 6,5	60,0	120,0	+ 6,5	3,78
41	140	52,0		54,0	104,0		3,40
42	145	39,0		49,0	78,0		3,10
43	150	25,0		43,0	50,0		2,71
44	155	6,0		32,0	12,0		2,02
45	160	+ 10,0		21,5	10,0		1,35
46	165	22,5		12,5	45,0		0,78
47	170	33,0		0,	66,0		0,
48	175			+ 12,0			+ 0,75
49	180			21,0			1,32

A voltokra és amperekre való átszámításra a következő formulák szolgáltak:

$$\begin{aligned} E &= 2,00 \, n_e \text{ volt} \\ e &= 1,0 \, n_e \text{ volt} \\ I &= 0,063 \, n_i \text{ amper} \end{aligned}$$

A periodikus görbék az 5. ábra mutatja.

2b) A zárókörben 20,7 Ω Siemens-féle szalagrheostat és az előbb is használt, vasmagvat tartalmazó dróttekeres volt.



4. ábra.

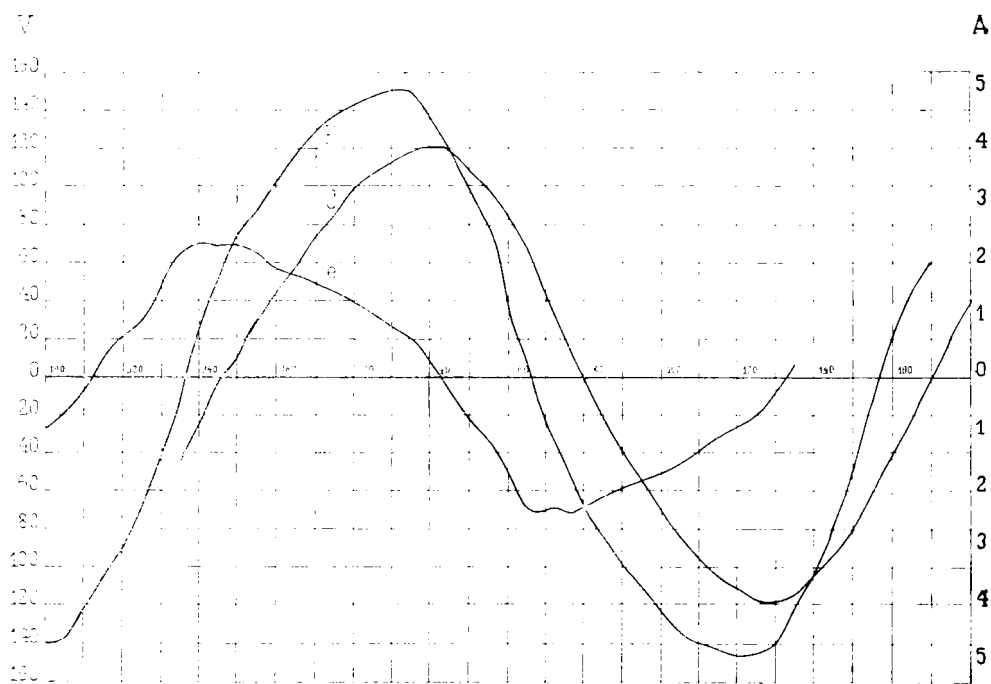
E kísérleti sorozatnál csak az induktív ellentállás végpontjain működő feszültség és az áramerősség görbéje vettetett fel.

A kísérleti adatok kimutatása a következő: (l. tábla 16. l.)

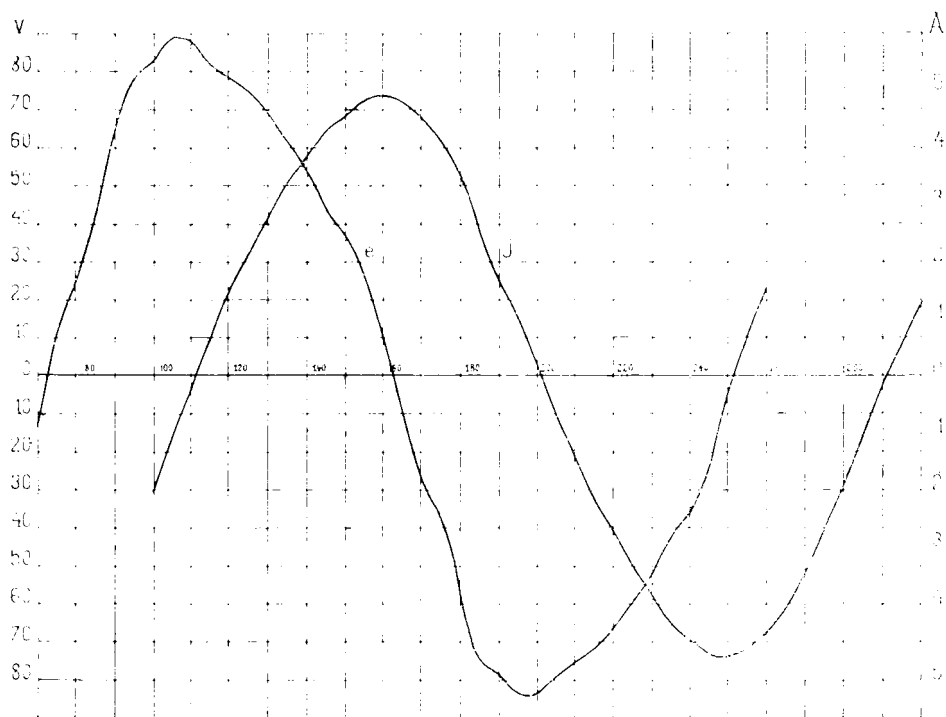
Eme periodikusok rajzát a 6. ábra mutatja.

A görbék, Runge * eljárását követve, harmonikus analízisnek vetettem alá, melynek eredménye: (l. 17. lap.)

* Prof. C. Runge, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd 48, 443 lap, 1902. évfolyam és Elektrotechnische Zeitschrift, 1905. évfolyam, 247. lap.



5. ábra.



6. ábra.

2b) A transzformator secundærjében sorosan kapcsolt ohmikus és induktív ellentállás van. (1905 július 17.)

Folyó szám	a	n_e	n_i	e volt	I amper
1	70	10,5		- 13,5	
2	75	+ 8,0		+ 10,3	
3	80	18,5		23,8	
4	85	32,5		41,1	
5	90	51,0		65,5	
6	95	61,0		78,3	
7	100	64,5	33,0	83,0	- 2,06
8	105	69,0	17,0	88,5	1,06
9	110	68,5	4,5	88,0	0,28
10	115	63,5	+ 9,4	81,6	+ 0,59
11	120	61,0	23,0	78,4	1,44
12	125	58,4	34,0	75,0	2,13
13	130	53,7	44,0	69,0	2,75
14	135	48,0	54,5	61,6	3,40
15	140	42,0	61,0	54,0	3,80
16	145	34,0	68,5	43,6	4,28
17	150	29,0	73,0	37,2	4,56
18	155	21,0	77,0	27,0	4,80
19	160	8,0	78,5	10,3	4,90
20	165	6,5	76,5	- 8,3	4,78
21	170	20,5	73,0	26,3	4,56
22	175	28,5	66,5	36,6	4,15
23	180	44,5	56,0	57,1	3,50
24	185	58,0	40,0	74,5	2,50
25	190	61,0	26,5	78,4	1,67
26	195	65,0	17,5	83,5	1,09
27	200	65,0	3,5	83,5	0,22
28	205	61,5	- 10,0	79,0	0,62
29	210	59,0	22,5	75,7	1,40
30	215	56,0	34,0	72,0	2,13
31	220	52,0	43,5	66,8	2,70
32	225	46,5	54,0	59,7	3,37
33	230	41,0	61,0	52,6	3,80
34	235	33,0	70,0	42,4	4,38
35	240	28,0	74,0	36,0	4,62
36	245	19,5	78,0	25,0	4,88
37	250	4,5	79,0	5,8	4,93
38	255	+ 7,5	77,0	+ 9,6	4,80
39	260	18,0	73,0	23,1	4,55
40	265		66,0		4,11
41	270		56,0		3,50
42	275		43,5		2,71
43	280		31,5		1,96
44	285		16,5		1,03
45	290		1,0		0,07
46	295		+ 7,5		+ 0,47
47	300		20,5		1,28

A galvanometrikus kitérésekből a voltokra és amperekre való átszámítás a következő formulákkal történt:

$$e = 1,285 \, n_e \text{ volt}$$

$$I = 0,0623 \, n_i \text{ amper.}$$

$$e = 76,2 \sin \varphi + 4,6 \sin 3\varphi + 7,2 \sin 5\varphi - 7,9 \sin 7\varphi + \\ + 1,1 \sin 9\varphi + 9,8 \sin 11\varphi + 6,7 \cos \varphi - 7,2 \cos 3\varphi - 0,3 \cos 5\varphi + \\ + 0,8 \cos 7\varphi + 0,6 \cos 9\varphi - 0,6 \cos 11\varphi.$$

$$i = 3,8 \sin \varphi + 0,36 \sin 3\varphi + 0,36 \sin 5\varphi - 0,69 \sin 7\varphi + \\ + 0,41 \sin 9\varphi + 0,007 \sin 11\varphi - 0,07 \cos \varphi + 0,13 \cos 3\varphi - \\ - 0,025 \cos 5\varphi - 0,08 \cos 7\varphi + 0,017 \cos 9\varphi + 0,04 \cos 11\varphi.$$

3. A transzformátor secundærjének záróköre 31,6 Ω ohmikus ellentállást és vele sorosan kapcsolt divisort tartalmaz.

E kísérletsorozatnál

az átkapcsolók	A_2	A_3	A_4
állásuk e felvételénél	0,3	1	0,1
I felvételénél	0,3	2	0,1

A kísérleti adatokat a következő táblázat tartalmazza: (lásd tábla 18. lap.)

E görbék harmonikus analizisét a következő kifejezések adják.

$$e = 58,0 \sin \varphi + 3,1 \sin 3\varphi + 4,9 \sin 5\varphi - 10,5 \sin 7\varphi + \\ + 0,4 \sin 9\varphi + 10,2 \sin 11\varphi - 16,5 \cos \varphi + 14,5 \cos 3\varphi + \\ + 3,1 \cos 5\varphi - 0,8 \cos 7\varphi - 0,4 \cos 9\varphi + 0,1 \cos 11\varphi.$$

$$i = 2,4 \sin \varphi + 0,083 \sin 3\varphi + 0,29 \sin 5\varphi - 0,31 \sin 7\varphi + \\ + 0,046 \sin 9\varphi + 0,37 \sin 11\varphi - 0,85 \cos \varphi + 0,81 \cos 3\varphi - \\ - 0,081 \cos 5\varphi + 0,01 \cos 7\varphi + 0,004 \cos 9\varphi + 0,003 \cos 11\varphi.$$

4. A transzformátor secundærje divisort tartalmaz; ennek sorosan kapcsolt két tekercse végpontjaiból ágazik el az ívlámpakör, melyben 2,66 Ω szalagrheostat van.

Az ívlámpa regulatorban 13 mm-es bélszenek voltak.

A kísérletek végzésénél az ívlámpa kapcsai közötti feszültségnek és az ívlámpa körében az áramerősség időbeli lefolyásának vizsgálata volt a cél; ekkor a 3. ábra szerint

az átkapcsolók	A_2	A_3	A_4
állások e felvételénél	0,3	4	0,2
I felvételénél	0,3	5	0,2

3. A transzformátor secundærjében sorosan kapcsolt ohmikus
ellentállás és divisor van. (1905 július 17.)

Folyó szám	α	n_e	n_i	e volt	I amper
1	60	17,0		— 21,8	
2	65	5,5		6,4	
3	70	+ 1,6		+ 2,1	
4	75	4,4		5,6	
5	80	6,4		8,2	
6	85	11,4		14,7	
7	90	17,0	— 20,0	21,8	— 1,22
8	95	25,5	7,0	32,8	0,43
9	100	32,0	+ 0,5	41,0	+ 0,03
10	105	40,0	6,8	51,4	0,41
11	110	49,0	10,0	63,0	0,61
12	115	54,0	13,0	69,5	0,79
13	120	60,0	16,0	77,0	0,98
14	125	64,0	19,0	82,3	1,16
15	130	64,6	22,4	83,0	1,37
16	135	60,5	27,4	77,8	1,68
17	140	50,5	36,0	65,0	2,20
18	145	30,0	47,0	38,6	2,87
19	150	16,0	60,0	20,6	3,66
20	155	5,0	62,5	6,4	3,81
21	160	— 1,2	58,0	— 1,5	3,55
22	165	4,0	50,5	5,1	3,08
23	170	6,0	42,0	7,7	2,56
24	175	10,5	30,0	13,5	1,83
25	180	18,0	16,0	23,2	0,93
26	185	25,0	4,0	32,2	0,24
27	190	30,0	3,0	38,6	— 0,18
28	195	42,0	7,0	54,0	0,43
29	200	46,5	10,0	59,8	0,61
30	205	52,0	12,6	66,9	0,77
31	210	58,0	15,5	74,5	0,95
32	215	62,0	18,5	79,6	1,13
33	220	63,0	22,8	81,0	1,39
34	225	59,5	28,0	76,5	1,71
35	230	48,5	35,5	62,4	2,14
36	235	29,0	47,5	37,2	2,90
37	240	13,0	60,0	16,7	3,66
38	245	4,0	62,5	5,1	3,81
39	250	+ 1,7	57,5	+ 2,2	3,50
40	255	4,4	50,0	5,7	3,05
41	260		39,0		2,38
42	265		31,0		1,89
43	270		18,0		1,10
44	275		6,5		0,40
45	280		+ 0,5		+ 0,03

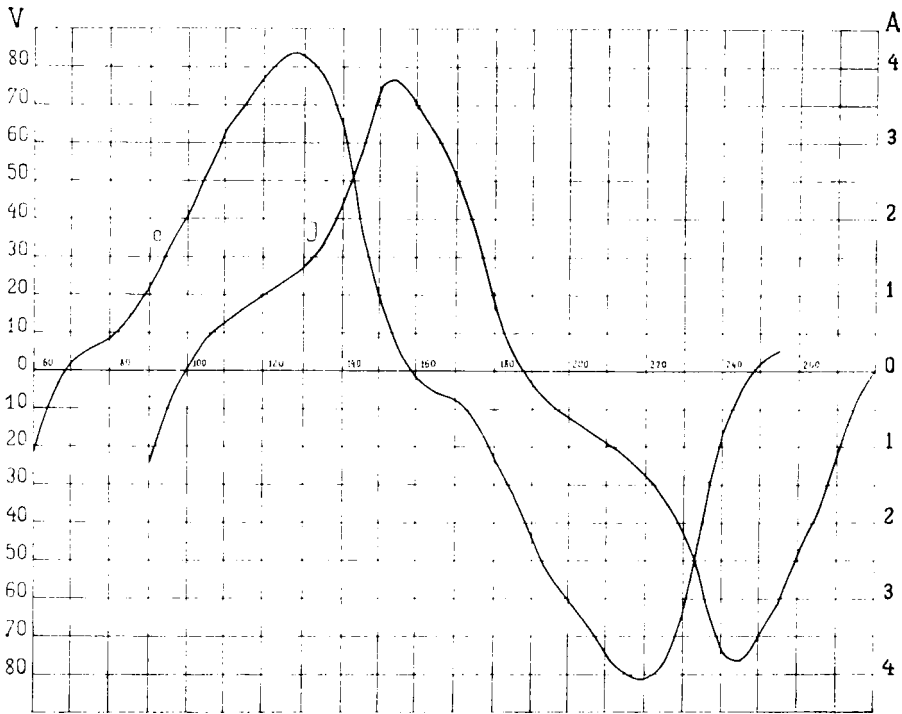
A kitérésekből az átszámítás voltokra és amperekre a következő
formulákkal történt:

$$e = 1,285 \, n_e \text{ volt}$$

$$I = 0,061 \, n_i \text{ amper}$$

Az áramgörbéket a 7. ábra mutatja.

A görbéknek pontról pontra való felvétele ez esetben lehető gyorsan végzendő; kellő gyakorlattal a 45 pont felvételére 5 percnyi idő elegendő ugyan; de már ez idő alatt is a voltaiv folytonos növekedésétől a lámpaszemek közötti feszültség egyre nő, a mint ezt a feszültségi görbe negatív részén felismerjük.



7. ábra.

Az áramerősségi görbén pedig látjuk, hogy a lámpaszemek közötti feszültség növekedésnek megfelelően az áramerősség egyre csökken. Éppen az ivlámpavizsgálatoknál igen jó szolgálatot tesz az oscillografiai eljárás, melylyel a szóban levő két teljes görbét $\frac{1}{42}$ másodperc, tehát oly rövid idő alatt kapjuk, hogy e közben az áramviszonyokat állandóknak vehetjük.

A görbék jellege a voltaiv hosszával jelentékenyen változik, a mint ez Duddell-Marchant és Simon vizsgálataiból ismeretes.

A kísérleti adatok táblázata :

4. A transzformator secundærjében levő divisor ívlámpát táplál.
(1905 július 17.)

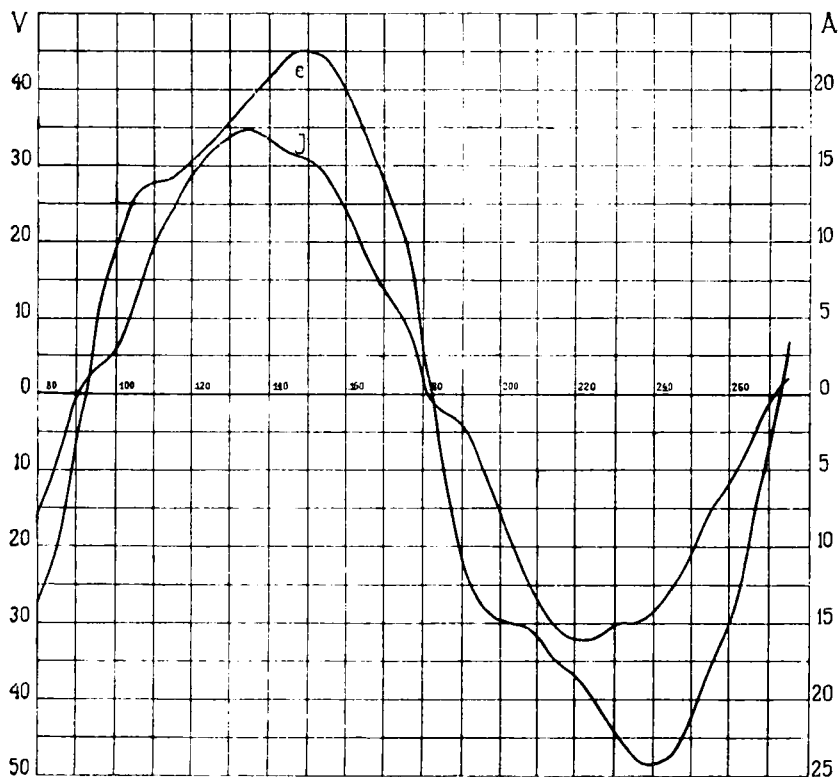
Folyó szám	α	n_e	n_i	e volt	I amper
1	80	43,0	— 34,0	— 27,5	— 8,2
2	85	32,5	20,0	20,8	4,85
3	90	11,0	1,5	7,0	0,4
4	95	+ 13,0	+ 6,0	+ 8,3	+ 1,5
5	100	29,0	11,0	18,6	2,7
6	105	40,0	24,0	25,6	5,8
7	110	43,0	39,5	27,5	9,5
8	112,5	43,4		27,8	
9	115,0	44,0	50,0	28,2	12,0
10	117,5	46,0		29,5	
11	120,0	48,0	59,5	30,7	14,4
12	125	51,5	66,0	33,0	16,0
13	130	55,0	70,0	35,2	17,0
14	135	60,0	72,0	38,5	17,4
15	140	64,5	69,0	41,3	16,7
16	145	69,0	65,0	44,3	15,7
17	150	70,0	64,0	44,8	15,5
18	155	68,5	59,0	43,8	14,3
19	160	62,5	50,0	40,0	12,1
20	165	53,5	39,0	34,3	9,5
21	170	43,5	28,5	27,8	6,9
22	175	33,5	20,5	21,5	5,0
23	180	9,0	5,0	5,7	1,2
24	195	12,0	4,5	8,3	1,1
25	190	33,0	8,0	21,0	1,9
26	195	43,0	19,0	27,5	4,6
27	197,5	46,0		29,5	
28	200	46,0	31,5	29,5	7,6
29	202,5	47,0		30,0	
30	205	47,0	44,5	30,0	10,8
31	207,5	47,5		30,5	
32	210	49,5	55,0	31,0	13,3
33	215	54,5	63,0	35,0	15,2
34	220	57,0	66,0	36,5	16,0
35	225	62,0	66,0	39,6	16,0
36	230	69,0	63,0	44,1	15,2
37	235	74,5	62,0	47,5	15,0
38	240	76,0	59,5	48,6	14,4
39	245	74,5	53,0	47,5	12,8
40	250	67,0	44,5	43,0	10,8
41	255	56,0	32,5	35,8	7,9
42	260	47,5	25,0	30,5	6,0
43	265	32,5	15,0	20,8	3,6
44	270	12,0	0,	7,7	0
45	275	+ 11,0	+ 4,0	+ 7,0	+ 0,97

Voltokra és amperekre az átszámítás ezekkel a formulákkal történt

$$e=0,642 n_e \text{ volt}$$

$$I=0,242 n_i \text{ amper}$$

A periodikus görbéket a 8. ábra mutatja.



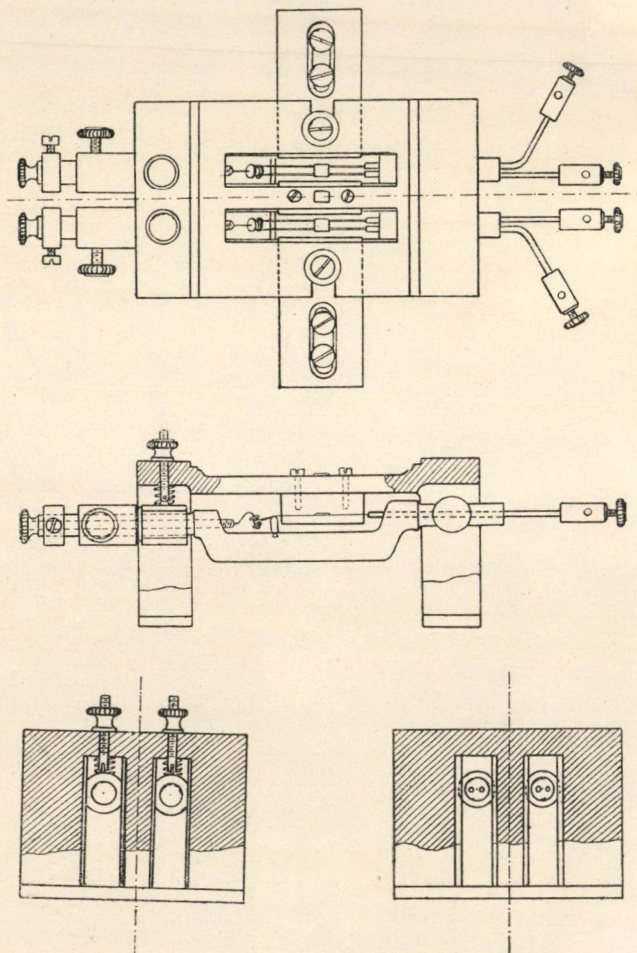
8. ábra.

A görbék harmonikus analizisének eredményét a következő kifejezések adják ;

$$\begin{aligned}
 e &= 44,0 \sin \varphi + 6,9 \sin 3\varphi + 4,9 \sin 5\varphi - 1,6 \sin 7\varphi + \\
 &\text{volt} \\
 &+ 0,8 \sin 9\varphi + 3,1 \sin 11\varphi - 3,7 \cos \varphi + 4,8 \cos 3\varphi \\
 &- 0,7 \cos 5\varphi - 0,4 \cos 7\varphi - 0,2 \cos 9\varphi + 0,2 \cos 11\varphi. \\
 i &= 14,0 \sin \varphi + 0,8 \sin 3\varphi + 1,7 \sin 5\varphi - 2,1 \sin 7\varphi + \\
 &\text{amper} \\
 &+ 0,1 \sin 9\varphi + 2,1 \sin 11\varphi - 0,54 \cos \varphi - 0,55 \cos 3\varphi + \\
 &+ 0,17 \cos 5\varphi + 0,44 \cos 7\varphi + 0,63 \cos 9\varphi - 0,15 \cos 11\varphi.
 \end{aligned}$$

II. Az oscillografiai felvételekről.

Az e vizsgálatokra szolgált *dupla oscillograf*, mely a műegyetem technikai-fizikai laboratóriumában készült. a Blondel-Dud-



9. ábra.

dell típusú hurokvezetékes készülék; lényegében közös elektromágneshez tartozó két gyors lengésű Deprez-nek egyesítése.

A készülék összeállítására egyszerű oscillografomot¹ használtam, mely már eredeti berendezésében is oly sarksarúkkal volt ellátva, hogy levegőközük tágas határok között változtatható. A dupla oscillografnál 12 mm széles vízszintes közt hagyunk a sarksarúk között (9. ábra), ezekre fakeretet erősítünk, melynek közepe tájára 4 mm széles és magas, 20 mm hosszú lágy vasdarab van csavarva; ezáltal két, egyenkint 4 mm széles levegőrést állítunk elő, melyekbe apró, könnyű tükörrel ellátott, vízszintes helyzetű egy-egy hurokvezeték hozunk. Eme apró tükrök egymás fölött ugyanabban a függélyesben vannak. A keret közepére beigazítható apró álló tükröt hozunk, mely ily helyzetében a hurokvezetékek tükrei közé jut. Mindegyik hurokvezeték szigetelő (vulkenfiber) tartón golyós csapágyban vízszintes és függélyes tengely körül elforgatható.

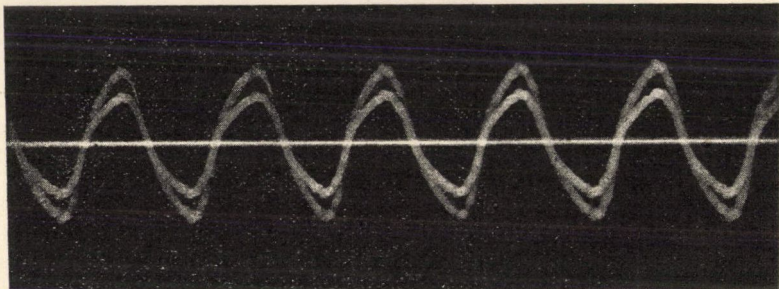
Eme beigazító szerkezetnek rendeltetése a következőkből tűnik ki: erős fényforrásból - ívlámpából - a diafragmának egy függélyesben levő két nyílásán át a hurokvezetékek apró tükreire, részben az álló apró tükröt is érő két összeverődő fénynyalábot vetünk, melyek visszaverődés után a függélyes tengely körül forgatható tükörrre, s erről az ernyőre, illetőleg fényérzékeny lemezre jutnak, a hol általában három egymástól különvált képet kapunk. A beigazító berendezésekkel elérjük, hogy a hurokvezetékek tükreiről való visszaverődésből származó két kép az álló apró tükör létesítette egy képpel pontos fődésbe jut. Az álló apró tükör a két áramgörbéhez tartozó zerusvonalat a rezgő hurokvezetékek szolgáltatta áramgörbékkel egyidőben adja.

Az oscillograf egyik hurokvezetékét O_e (3. ábra) voltmérő eszköz mozgékony vezetékének tekinthetjük; ezzel sorosan nagy ohmikus ellentállást csatolunk és e vezeték végpontjait a zárókör ama két pontjával kötjük össze, a melyek között működő feszültség görbáját kívánjuk előállítani.

A másik hurokvezeték O_i (3. ábra) az ampermérőnek tekinthető eszköz mozgékony alkatrésze; hogy ezt csak gyenge áram

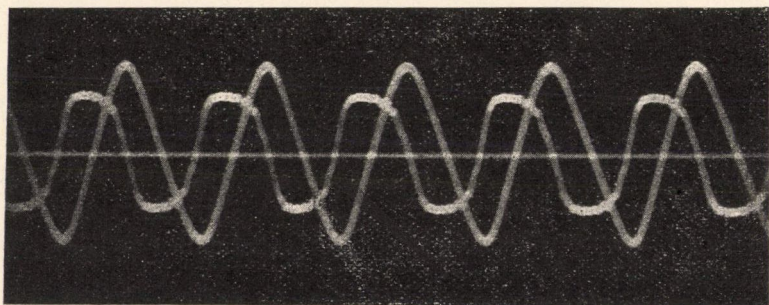
¹ Mathematikai és természettudományi Értesítő, XXI. kötet, 4. füzet, 1903. és Annalen d. Physik 13. kötet, 373. lap, 1903.

járja át, a zárókör kis ohmikus ellentállásához, S_1 vastag újezűst dróthoz párvonalasan kötjük. Nyilvánvaló, hogy a kombinált eszköz két alkatrészének egyidejű működtetése a feszültségi és áramerősségi görbét fáziseltolódásaikkal egyidőben adja.



10. ábra.

A 3. sz. rajz az O_e és O_i oscillografok bekapcsolás módját is mutatja.



11. ábra.

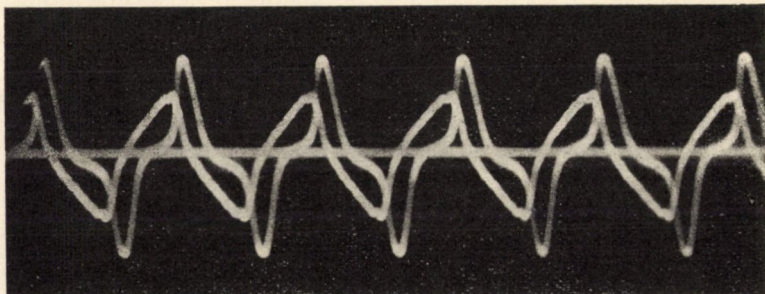
1. A zárókörben ohmikus ellentállás van:

átkapcsolók	—	—	—	A_2	A_4	A_5	A_6
állása e és I felvételére	0,1			0,1	0,1	1	1

A görbéket a 10. ábra fotografiai felvétele mutatja; a feszültség görbéje nagyobb ordinátákkal, az intensitás görbéje kisebb ordinátákkal van feltüntetve.

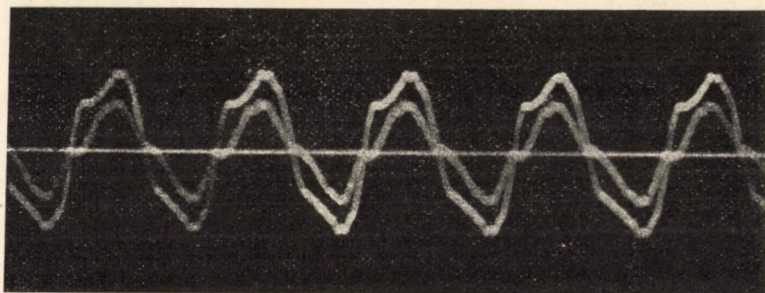
2. A zárókörben ohmikus és induktív ellentállás van :

átkapcsolók	— — — —	A_2	A_4	A_5	A_6
állásuk e és I felvételére		0,2	0,1	1	1



12. ábra.

A görbét a 11. ábra mutatja; a nagy ordinátákkal bíró intenzitási görbe a feszültségi görbéhez képest fázisban elmarad.



13. ábra.

3. A zárókörben ohmikus ellentállás és divisor van :

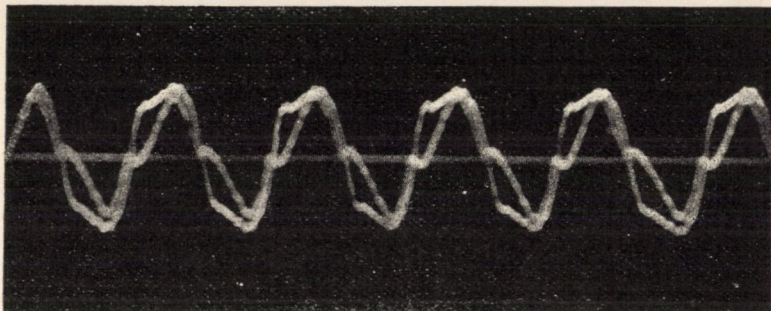
átkapcsolók	— — — —	A_2	A_4	A_5	A_6
állásuk e és I felvételénél		0,3	0,1	1	1

A görbét a 12. ábra adja, a hol a nagyobb ordinátákkal bíró intenzitási görbe a feszültség görbéhez képest fázisban elmarad.

4. Ivlámpa-körben a feszültség és áramerősség görbéi:

átkapcsolók	— — — —	A_2	A_4	A_5	A_6
állásuk e és I felvételénél		0,3	0,2	2	2

A görbéket a 13. és 14. ábra adja, a hol az első hosszabb, a második rövidebb voltaivre vonatkozik; a nagyobb ordinátákkal



14. ábra.

biró görbe a feszültséget, a kisebb ordinátákkal biró görbe az intenzitást mutatja.

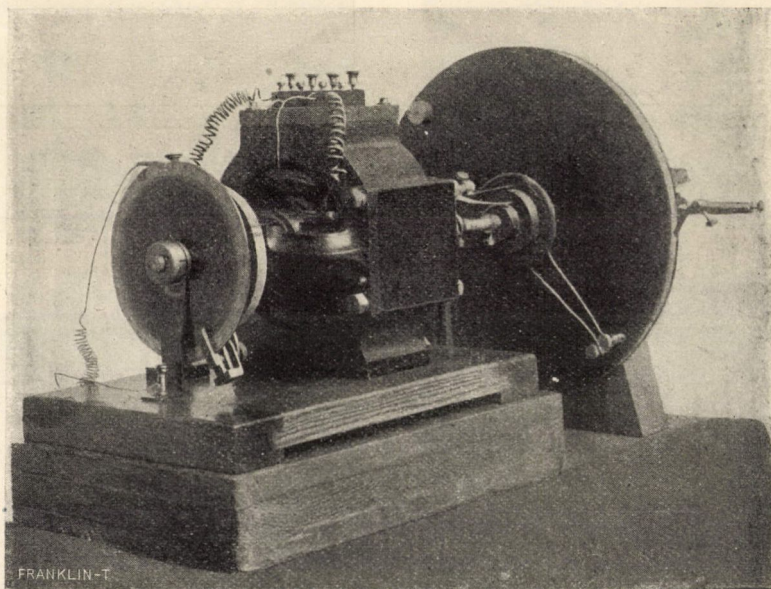
III. A Braun-féle kathodcsővel végzett kísérletek.

A szóban levő vizsgálatra a kathodfoltot közelített mágnessel kellő kezdeti helyzetbe hozzuk, azután pedig a synchronmotor tengely elfordulásával arányos vízszintes elmozdulásra készítjük; ez utóbbi célra a Braun-cső függélyes tengelyű kitérítő tekercspárján úgynevezett linearis, vagyis a synchronmotor tengely elfordulásával arányosan növekedő áramot vezetünk át.

A linearis áramot Zennek* nyomán a következő elrendezéssel létesítettem. A kis synchronmotor szabad tengelyvégéhez golyós csapágyba fektetett tengelyt kötünk, melyre 30 cm átmérőjű mahagoni-fakorong van erősítve (a 15. ábra jobboldali része és a 3. ábra H jelzésű része); e korong hornyába 0,1 mm vastag, 4 mm széles újezüst szalag van befektetve,

* Zennek, Wiedemann Annalen 69. kötet, 838. lap, 1899.

melynek végei között 1 cm-nyi köz van hagyva. A tengelyre elszigetelten húzott két fémgyűrűhöz illeszkedő rúgók útján a szalagon keresztül 7,5 ampernyi állandó áramot vezetünk E_1 villamforrásból. A szalaggal fémrugó érintkezik; e rugó és az árambevezető kapocs között a korong és megfelelően a synchronmotor minden teljes körülforgásánál az elfordulási szöglettel arányosan zerustól oly maximumig egyenletesen nö-

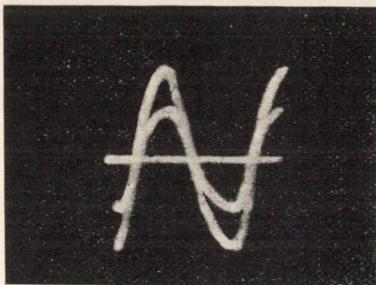


15. ábra.

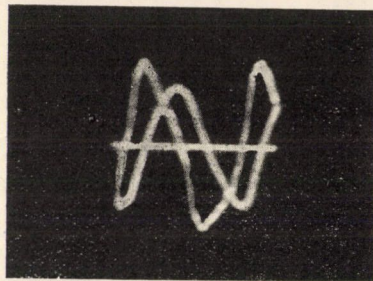
vekedő feszültségkülönbséget létesítünk, mely maximumot az újezűst szalag ellentállásának és az állandó áramerősségnek szorzata állapít meg. Ha az említett két pontot a Braun-cső felszerelésének (3. ábra *B*) függélyes tekercspárjával, melyet 20—20 rétegben 1923, illetőleg 1989 menettel képeztünk, összekötjük, ezeket a fentebb jellemzett lineáris áram járja át és a fluoreskáló ernyőn folytonos vízszintes fényvonalat kapunk.

A kathodfoltnak vízszintes kitérésével egyidejű függélyes kitéréseit vízszintes tengelyű tekercspár okozza.

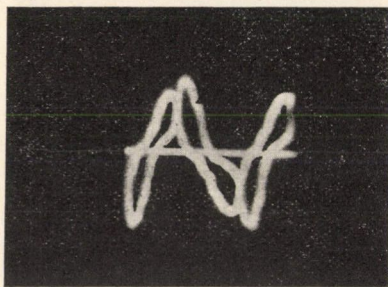
Eme tekercsek a feszültséggel arányos kitérések létesítésére 20—20 rétegben 1983 illetőleg 1941 menettel 0,5 mm átmérőjű elszigetelt drótból készültek, sorosan kapcsoltak és indukciómentes additionalis ellentállással ellátva, a zárókör ama két pontjához köttetnek, a melyek között működő feszültség időbeli lefolyását vizsgálni kívánjuk; ekkor a kathodfolt függé-



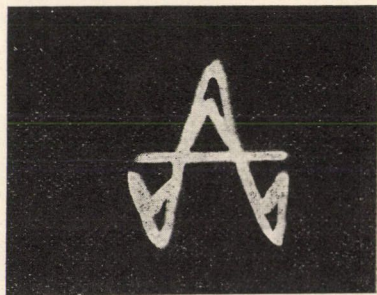
16. ábra.



17. ábra.



18. ábra.



19. ábra.

lyes kitérését kapjuk. A linearis áram okozta vízszintes kitérés és egyidőben a feszültséggel arányos áram létesítette függélyes kitérés eredőjeképpen a fluoreskáló ernyőn a mozdulatlan fényes *feszültség-görbét* kapjuk.

Hogy e feszültség-görbe után nyomban az áramerősségi görbét is előállithassam, a vízszintes tengelyű tekercseken legfelsőbb rétegül ampermérőit használatra 1 mm-es elszigetelt drótot 72—72 menettel képeztem.

Az ampertekercset átjáró áram és a linearis áram együttes

hatása alatt a kathodfolt a mozdulatlan *áramerősségi* görbét adja. Megjegyzendőnek tartom, hogy a feszültségi görbe felvételénél az ampermérő meneteket A_7 átkapcsolónak 0,1 helyzetből 0,2 helyzetbe való hozatalával a zárókörből kiiktatjuk.

Ha a feszültségi és áramerősségi görbéket a synchronmotor járatása folyamán, időbeli egymásutánban, ugyanarra a fényérzékeny lemezre lefotografáljuk, esetleges fáziseltolódásuk is helyesen mutatkozik.

A fotografiai felvételeknél az objektív optikai tengelye a fluoreszkáló diafragmára merőlegesen volt beigazítva. A kathod-sugarak előállítására használt nagyméretű Braun-Ryan-csővet 30 lemezes Leiner-féle influenzgéppel tartottam működésben, mely gépet Schuller Alajos műegyetemi tanár volt szives rendelkezésemre bocsátani.

1. A 16. ábra ohmikus ellentállás esetére adja a nagyobb ordinátán felismerhető feszültségi és kisebb ordinátával bíró intenzitási görbét, melyek fázisban megegyezők.

2. A 17. ábra a vasmagvat tartalmazó dróttekeres végpontjai között működő feszültséget a nagyobb ordinátákkal teszi szembevetendővé; e görbéhez képest az intenzitási görbe fázisban elmarad, jobbra el van tolva.

3. A 18. ábra divizort tartalmazó zárókörre vonatkozik; a feszültségi görbe kisebb ordinátáin ismerhető fel; az intenzitási görbe az előbbihez képest fázisban elmarad.

4. Ivlámpa körében a 19. ábrán látható a nagyobb ordinátával bíró feszültségi görbe, mely az intenzitási görbével fázisban megegyezik.

Végre még felemlitem, hogy négysarkú synchronmotorral dolgozva, csaknem két teljes görbét kapunk; de a baloldali kezdő-része a képnek, amint erre Zennek is figyelmeztet, a kathodfolt vízszintes kitérését okozó áramnak a synchronmotor minden körülfordulásánál való megszakadása miatt rendetlenségeket mutatván, azt kitörültem.

AFFECTUS NÉLKÜLI EGYENLETEKRŐL.

BAUER MIHÁLY-tól.

1. D. HILBERT mutatta meg először, hogy a raczionális számok tartományában végtelen sok affectus nélküli n -edfokú egyenlet létezik.¹ Ez a tény az alábbi fejtegetésekből is következik, a melyek egy előbbi dolgozatom eredményeire támaszkodnak.² Egyszersmind könnyű módot nyerünk ily egyenleteknek képezésére. A vizsgálat alapjául a

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n = 0 \quad (\text{I})$$

egyenlet szolgál, melynek együtthatói az $[(A), x_1, x_2, \dots, x_m]$, ill. az $[[1], x_1, x_2, \dots, x_m]$ holoid tartomány raczionális egész mennyiségei. Legyenek az egyenlet gyökei:

$$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(n)}, \quad (1)$$

legyen továbbá N az egyenlet n -betűs GALOIS-féle csoportjának rendje, a melynek elemeit

$$S_1 = 1, S_2, \dots, S_N \quad (2)$$

jelölje. Az (1) gyökök a (\bar{F}) GALOIS-féle genustartományt határozzák meg. Mindenekelőtt ismeretes módszerekkel kimutatható, hogy bármely P törzsmennyiség felbontása a (\bar{F}) tartományban a következő alakú:

¹ Ueber die Irreducibilität stb. CRELLE Journal 110 k. 104—129. l. L. még WEBER: Lehrbuch der Algebra. 2. kiadás. I. köt. 652—655. l., továbbá E. MAILLET egy dolgozatát: Journal de Mathématique. V. köt. (1899), 205—216. l. V. ö. még egy FROBENIUS által közölt DEDEKIND-féle tétellel. (Berl. Sitzungsberichte 1896. p. 697.)

² Az algebrai mennyiségek általános elméletéhez. Ezen Értesítő XXIII. k. 127—138. l.

$$P = (\prod_i \mathfrak{P}_i)^e, \quad (3)$$

a hol a \mathfrak{P}_i betűk különböző törzsidealokat jelentenek, a melyek bármelyikükből a (2) substitutiók alkalmazása révén keletkeznek. Minden \mathfrak{P}_i -hez a (2)-nek egy alcsoportja tartozik, mely őt változtatlanul hagyja és a melynek rendje e -vel osztható. Ha tehát q közösleges törzsszám és

$$e \equiv 0 \pmod{q}, \quad (3^*)$$

akkor az említett alcsoportok rendje q -nak többszöröse és így ezek a CAUCHY-SYLOW-féle tétel szerint tartalmazznak q -adrendű substitutiókat.

2. A következő tételt fogjuk kimutatni.

Ha az (I) egyenletnek valamely P törzsmennyiségre vonatkozó Puiseux-féle számai:

$$\frac{a_1}{k_1}, \frac{a_2}{k_2}, \dots, \frac{a_{n-q+1}}{k_{n-q+1}}, \quad (4)$$

a hol

$$(a_j, k_j) = 1, \quad a_j > 0 \\ (j=1, 2, \dots, n)$$

és a k_j számok közül egy q -val, míg a többi 1-gyel egyenlő, akkor az egyenlet n -betűs GALOIS-féle csoportjának van oly substitúciója, mely egyetlen q -elemű ciklusból áll.

Legyenek ugyanis a (\bar{P}) tartományban:

$$P = (\prod_i \mathfrak{P}_i)^e$$

$$\omega^{(\lambda)} = \prod_i \mathfrak{P}_i^{a_i^{(\lambda)}} \bar{\omega}^{(\lambda)}, \quad (\omega^{(\lambda)}, P) = 1, \\ (\lambda=1, 2, \dots, n)$$

akkor léteznek oly i és λ indexek, a melyekre

$$\frac{a_i^{(\lambda)}}{e} = \frac{a_s}{q},$$

a miből

$$e \equiv 0 \pmod{q}$$

és így a (2) csoport amaz alcsoportjának, mely pl. a \mathfrak{P}_i ideált hagyja változtatlan, van q -adrendű eleme. Legyen S ilyen elem.

Ki fogjuk mutatni, hogy S egyetlen q -elemű ciklusból áll. Ugyanis az

$$\frac{a_i^{(\lambda)}}{e}, \quad (\lambda=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

értékek a (4) alatti számokkal egyeznek meg, még pedig pontosan k_j olyan van, mely $\frac{a_j}{k_j}$ -vel egyenlő. Így tehát præmissáink szerint, ha csak a jelölés alkalmasan van választva, az

$$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(n)} \quad (1)$$

gyökök közül az:

$$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(q)} \quad (1^*)$$

gyökök a \mathfrak{P} ; ideálnak ugyanazzal a hatványával oszthatók, míg a hátralevő

$$\omega^{(q+1)}, \omega^{(q+2)}, \dots, \omega^{(n)} \quad (1^{**})$$

gyökök mindegyike a \mathfrak{P} ; ideál különböző hatványát tartalmazza. Az S substitutió az $\omega^{(i)}$ gyököket egymásba, a \mathfrak{P} ; ideált önönmagába viszi át s minthogy még q törzsszám, S csakugyan az állított tulajdonsággal bír.

3. Most már könnyű affectus nélküli egyenleteket szerkeszteni. Legyen először is n törzsszám. Akkor gondoskodni kell legelőször is arról, hogy az egyenlet irreducibilis legyen; pl. azért, hogy valamely P_1 törzsmennyiségre vonatkozólag az egyetlen

$$\frac{a}{n}, \quad (a, n) = 1, \quad a > 0$$

PUISEUX-féle számmal birjon. Gondoskodunk azután arról, hogy a csoport tartsa egy transpositiót. Ezt elérhetjük pl. úgy, hogy valamely P_2 törzsmennyiségre vonatkozólag a PUISEUX-féle számokat (4)-nek megfelelőleg és $q=2$ téve választjuk. Ha az egyenlet fokszáma n összetett szám, akkor még külön biztosítani kell a csoport primitiv voltát. Ezt pedig biztosítjuk, ha az egyenlet csoportja tartalmaz olyan egyetlen q -elemű ciklusból álló substitutiót, a hol a szereplő q törzsszám az

$$\frac{n}{2} < q < n$$

egyenlőtlenséget elégíti ki. Ezt az egyenlőtlenséget pedig TOHEBICHEF szerint ki lehet elégíteni. Az előzők szerint pedig elérhetjük, hogy az egyenlet csoportjában ilyen substitutió valóban előforduljon.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1905 június 20-án tartott üléséből.)

ÉDESVÍZI MIKROSKOPI ÁLLATOK MONGOLIÁBÓL.

DADAY JENŐ 1. tagtól.

Mongolia édesvízi mikrofaunájára vonatkozólag, a rendelkezésemre állott irodalmi adatok tanúsága szerint, még ez ideig csupán RICHARD J., DADAY J. és SARS G. O. nyújtott adatokat.

RICHARD J. ugyanis 1897-ben mongoliai termőhelyről leírja a *Diaptomus Chaffanjonii* új fajt és feljegyezi a *Daphnia similis* CLS. = *Daphnia carinata* KING. fajt.¹

DADAY J. 1901-ben *Chermín-czagan nor* termőhelyről a Protozoák, Férgek és Entomostracák köréből 12 fajt ismertet. névszerint a következőket: *Zoothamnium parasila* STEIN; *Tocophrya Cyclopum* CL. L., *Vortex truncatus* OERST., *Echinocotyle Linstowi* DAD., *Echinoc. polyacantha* DAD., *Drepanidotaenia Rátzi* DAD., *Drep. mesacantha* DAD., *Taenia Zichyi* DAD., *Brachionus Mülleri* EHRB., *Diaptomus asiaticus* ULLJ., *Moina mongolica* DAD. és *Limnocythere mongolica* DAD.²

Végre SARS G. O. 1903. évi dolgozataiban 33 Entomostraca-fajt mutat be különböző termőhelyekről s ezek a következők: *Cyclops strenuus* FISCH., *C. serrulatus* C. K., *C. vicinus* ULLJ., *C. viridis* (JUR.), *Diaptomus bacillifer* KOELB., *D. incrassatus* SARS, *D. Wierzejskyi* R., *Hemidiaptomus Ignatovi* SARS, *Boeckella orientalis* SARS, *Alona elegans* SARS, *Moina macrocopa*

¹ Sur deux Entomostracés d'eau douce r. p. M. Chaffanjon en Mongolie. — Bull. du Mus. d'hist. natur. 1897. V. 3. p. 131. fig. 1—5.

² Mikroskopische Süßwasserthiere. Dritte asiat. Forschungsreise des Grafen E. Zichy. 1901.

SARS, *M. rectirostris* (JUR.), *Macrothrix hirsuticornis* BR.-NR., *Scapholeberis mucronata* (O. F. M.), *Daphniopsis tibetana* SARS, *Simocephalus vetulus* (O. F. M.), *S. exspinosus* C. K., *S. mixtus* SARS, *Daphnia carinata* KING., *D. longispina* v. *leucocephala* SARS, *D. magna* STR., *D. pulex* d. GEER., *D. pulex* v. *pulicaria* SARS, *Cypris pubera* (O. F. M.), *C. ovalis* SARS, *Cyprinotus incongruens* (RAMD.), *Iliocypris lacustris* KAUFM., *Branchinecta orientalis* SARS, *Branchipus affinis* SARS, *Estheria propinqua* SARS, *E. Davidi* SARS, *Leptestheria tenuis* SARS, *Apus granarius* SARS.¹

A három bűvár fent közölt adatainak egybevetésével tehát ez ideig Mongoliából, beleszámítva a DADAY J.-től leírt *Cerco-cystiseket* is, összesen 46 édesvizi mikroskopi állatka volt ismeretes. a mi nyilvánvalólag nem tekinthető kielégítő eredménynek s legfőképen ez vezetett jelen dolgozatom összeállítására.

A dolgozatom alapjául szolgáló anyagot W. J. ELPATIEWSKY orosz bűvár gyűjtötte 1903. évi tudományos kutatásai alkalmával északnyugati Mongoliában, a *Kossogol* tóból és vidékén és részint borszeszben, részint formolban konzerváltan, termőhelyenként külön-külön, összesen 93 különböző nagyságú üvegben került kezeimhez. A termőhelyek s a gyűjtési idő felől az alábbi jegyzék ad felvilágosítást.

1. A *Changa* folyó torkolata. 1903. 3. 4. 5. 9. VI.
2. Mocsár a *Changa* folyó torkolatánál. 1903. 8. VI.
3. A *Changa* folyó és *Cap Santa* között a *Kossogol*ból 2—21·5 m mélységből. 1903. 9. VI.
4. A *Than* folyó torkolata és *Cap Santa* között 16 m mélységből. 1903. 9. 22. VI.
5. A *Dala-kui* sziget délnyugati partja. 1903. 25. VI.
6. Planktonanyag 200 m a *Dala-kui* szigettől délre. 1903. 25. VI.
7. *Kossogol*, a littoralis zóna homokjából. 1903. 13. VI.
8. *Cap Santanál* 98·4 m mélységből. 1903. 29. VII.

¹ On the Crustacean fauna of Central Asia. P. I—III. 1903.

9. *Cap Santaval* szemben a *Kossogol* nyugati partján. 1903. 30. VII.

10. A *Dolon-ula* félsziget partján 25 és 51 m mélységből. 1903. 1. 3. VII.

11. A *Dolon-ula* félsziget északkeleti partja. 1903. 3. VII.

12. A *Cap Toilgot* északi oldala. 1903. 6. VII.

13. A *Kossogol* nyugati partja *Cap Toilgot*nál. 1903. 25. VII.

14. *Angolheim* tó a *Kossogol* nyugati partján. 1903. 25. VII.

15. Első kis tó *Angolheim*től északra. 1903. 25. VII.

16. Második kis tó az *Angolheim* tótól északra. 1903. 25. VII.

17. A sziget és a *Kossogol* nyugati partja között 20 m mélységből. 1903. 27. VI. 1. VII.

18. *Chubtu-nor*, a *Kossogol* északnyugati partján. 1903. 9. 10. VI.

19. *Gytschygenty-nor* a *Kossogol* nyugati partján. 1903. 26. VII.

20. *Chellyge-nor*, a *Kossogol* nyugati partján. 1903. 26. VII.

21. *Ajagam-maranai nor* a *Kossogol* nyugati partján. 1903. 30. 31. VII.

22. *Djeglyk* folyó torkolata. 1903. 30. VII.

23. Kis tó a *Chatschim* folyó torkolatánál. 1903. 2. VIII.

24. *Noin-gol* folyó a *Kossogol* keleti partján. 1903. 15. VI.

25. Öböl a *Chatschim* folyó völgyében, a *Kossogol* nyugati partján. 1903. 2. VIII.

26. *Chatschim-nor*, a *Kossogol* nyugati partján. 1903. 2. VIII.

27. A *Tochomyk* folyó torkolata. 1903. 4. VIII.

28. A *Turuk* folyó torkolata. 1903. 13. VI.

29. *Morin-Tuskul* folyó. 1903. 17. VI.

30. A kis *Borsok* tó s a *Kossogol* összefolyása. 1903. 4. 20. 21. VI.

31. *Borsok* tó. 1903. 21. VI.

32. *Malji-Gumnuk* folyó. 1903. 2. VIII.

33. *Kiren-nor*. 1903. 6. VII.

34. *Bulunai* források, 25 km a *Kossogol* keleti partjától.

35. *Chorchoito-nor*. 1903. 9. VII.

36. *Mota* folyó. 1903. 10. VII.

37. *Mota* öböl. 1903. 12. 24. VII.
 38. A *Kossogol* nyugati partja a *Djeglik* és *Chatschim* folyók között. 1903. 30. 31. VII.
 39. *Chilin* folyó. 1903. 20. VII.
 40. *Cap-Mottabulun*. 1903. 24. VII.
 41. Tócsa a *Turul* folyó völgyében. 1903. 13. VI.

A vizsgálataim során megfigyelt fajok közül csak az újaknak, vagy valamiféle tekintetben érdekesebbeknek adom a részletesebb ismertetését. A megfigyelt fajokat külön fejezetben alulról fölfelé haladó sorrendben névszerint foglalom össze, de külön fejezetben bemutatom az egyes termőhelyeket is az onnan megfigyelt fajokkal.

I. A megfigyelt fajok jegyzéke.

I. PROTOZOA.

Class. *Sarcodina*.

- Arcella vulgaris* EHRB.
 „ *discoides* EHRB.
 „ *mitrata* EHRB.
Centropoxis aculeata (EHRB.).
 5 *Diffugia constricta* EHRB.
 „ *corona* EHRB.
 „ *globulosa* EHRB.
 „ *lobostoma* LEID.
 „ *pyriformis* PERT.
 10 „ *urceolata* EHRB.
Euglypha alveolata EHRB.
Cyphoderia ampulla (EHRB.).
Rhaphydiophrys elegans H. et L.

Class. *Mastigophora*.

- Glenodinium cinctum* EHRB.
 15 *Peridinium tabulatum* EHRB.
Ceratium macrocerus SCHR.
Dinobryon sertularia EHRB.
 „ *cylindricum* IMH.
 „ *elongatum* IMH.
 20 „ *stipitatum* STEIN.

Euglena deses EHRB.

• *viridis* EHRB.

Class. *Infusoria*.

- Lionotus folium* (DUJ.).
Paramecium Aurelia O. F. M.
 25 *Strombidium Claparedii* KENT.
Oxytricha pellationella (O. F. M.).
Euplotes Charon EHRB.
Lagenophrys nassa STEIN.
Vaginicola decumbens EHRB.
 30 *Cothurniopsis imberbis* EHRB.
Epistylis plicatilis EHRB.
Cothurnia crystallina EHRB.
Zoothamnium parasita STEIN.
Vorticella microstoma EHRB.
 35 „ *nebulifera* EHRB.
Tocophrya Cyclopus EHRB.

II. COELENTERATA.

Class. *Hydrozoa*.

- Hydra fusca* AUT.
 „ *viridis* L.

III. VERMES.

Class. *Nemathelminthes*.

- Monhystera similis BÜTSCH.
 40 Trilobus gracilis BART.
 Plectus tenuis BART.
 Diplogaster Elpatiewskyi n. sp.
 Dorylainus filiformis BART.

Class. *Nematorhyncha*.

- Chætonotus polychætus n. sp.

Class. *Rotatoria*.

- 45 Philodina aculeata EHRB.
 " roseola EHRB.
 Rotifer vulgaris EHRB.
 " macrurus EHRB.
 Rotifer sp. ?
 50 Actinurus neptunius EHRB.
 Asplanchna Brightwelli GOSSE.
 Melicerta ringens EHRB.
 Conochilus volvox EHRB.
 Flosecularia sp.
 55 Synchæta pectinata EHRB.
 " tremula EHRB.
 Plæsoma sibirica DAD.
 Furcularia forficula EHRB.
 " gibba EHRB.
 60 Diglena catellina EHRB.
 " grandis EHRB.
 Mastigocerca carinata EHRB.
 " cornuta EYF.
 " elongata GOSSE.
 65 " scipio GOSSE.
 " rattus EHRB.
 Rattulus tigris (EHRB.).
 Anuræa aculeata EHRB.
 " cochlearis GOSSE.
 70 " acuminata EHRB.
 " foliacea EHRB.
 " clypeus n. sp.
 " labis GOSSE.
 " longispina KALL.
 75 " striata (O. F. M.).

- Anuræa angulata n. sp.
 Dinocharis pocillum EHRB.
 Scaridium longicaudum EHRB.
 Salpina brevispina EHRB.
 80 " spinigera EHRB.
 Euchlanis dilatata EHRB.
 " triquetra EHRB.
 Cathypna diomis GOSSE.
 " luna EHRB.
 85 Monostyla lunaris EHRB.
 " quadridentata EHRB.
 Colurus bicuspidatus EHRB.
 " deflexus EHRB.
 " uncinatus EHRB.
 90 Metopidia lepadella EHRB.
 " acuminata EHRB.
 Lepadella ovalis EHRB.
 Pterodina ellyptica EHRB.
 " patina EHRB.
 95 Brachionus rubens EHRB.
 Triarthra longiseta EHRB.
 Polyarthra platyptera EHRB.

IV. ARTHROPODA.

Class. *Crustacea*.

Ord. Copepoda.

- Cyclops serrulatus C. K.
 " albidus (JUR.).
 100 " fuscus (JUR.).
 " gracilis LILLJ.
 " strenuus FISCH.
 " vicinus ULLJ.
 Canthocamptus northumbrius
 BRAD. var.
 105 " insignipes LILLJ.
 Ophiocamptus mongolicus n. sp.
 Diaptomus acutilobatus SARS.
 " incrassatus SARS.
 " lobatus LILLJ.
 110 " Zichyi DAD.

Ord. Cladocera.

- Chydorus sphaericus (O. F. M.).

- Alonella exigua* (FISCH.).
 " *nana* (BAIRD).
Alona affinis LEYD.
 115 " *costata* SARS.
 " *guttata* SARS.
 " *intermedia* SARS.
 " *quadrangularis* (O.F.M.).
 " *rectangula* SARS.
 120 *Leptorhynchus rostratus* (C. K.).
Acroperus harpæ BAIRD.
Eurycercus lamellatus (O. F. M.).
Macrothrix odontocephala DAD.
Bosmina obtusirostris SARS.
 125 " *longirostris* (O. F. M.).
 " *Lilljeborgii* SARS.
Ceriodaphnia reticulata (JUR.).
 " *rotunda* SARS.
Scapholeberis mucronata
 (O. F. M.).
 130 *Simocephalus vetulus* (O. F. M.).
Daphnia carinata KING.
 " *magna* STR.
 " *pulex* d. G.
 " *longispina* O. F. M.
 135 " " *v. Leidygi* SARS.
 " " *v. rosea* SARS.
 " " *v. tenuitesta*
 SARS.
 " " *v. caudata* SARS.
 " " *v. Jardini* BA.
 Ord. Ostracoda.
 140 *Eucypris incongruens* (RAMD.).
- Herpetocypris strigata* (O. F. M.).
Cypridopsis vidua (O. F. M.).
Cypria ophthalmica (JUR.).
Candona candida (O. F. M.).
 145 *Eucandona rostrata* (BR. NORM.).
 " *tuberculata* n. sp.
 " *Elpatiewskyi* n. sp.
Iliocypris gibba (RAMD.).
 " *lacustris* KAUF.
 150 *Limnocythere incisa* DAHL.
 Ord. Amphipoda.
Gammarus sp. ?
 Class. *Arachnoidea*.
 Ord. Tardigrada.
Macrobiotus macronyx (DUI.).
 Ord. Acarina.
Eulais Elpatiewskyi n. sp.
Hydrachna geographica (O. F. M.).
 155 *Mideopsis orbicularis* (O. F. M.).
Lebertia taninsignita (LEB.).
Limnesia connata KOEN.
 " *histrionica* HARM.
Hygrobates octoporus n. sp.
 160 *Pionopsis lutescens* (HERM.).
Atax crassipes (O. F. M.).
Piona rotundata KR.
 " *fuscata* (HERM.).
 " *nodata* (O. F. M.).
 165 " *conglobata* C. K.

A felsorolt 165 állatfaj között a tudományra nézve csupán 9 az új, míg a többi már régebben ismeretes. A fajok különben csoportonként következőleg oszlanak meg: *Protozoa* 36, *Coelenterata* 2, *Vermes* 59, *Crustacea* 49, *Arachnoidea* 14.

II. A fajok termőhelyenként csoportosítva.

1. Kossogol a Changa folyó torkolatánál.

I. PROTOZOA.

- Arcella vulgaris EHRB.
 " discoides EHRB.
 Diffugia urceolata EHRB.
 Rhaphyidiophrys elegans H. et L.
 5 Peridinium tabulatum EHRB.
 Ceratium macroceros SCHR.
 Euglena viridis EHRB.
 Dinobryon sertularia EHRB.
 " stipitatum STEIN.
 10 Lionotus folium (DUJ.).
 Strombidium Claparedii S. K.
 Epistylis plicatilis EHRB.
 Vorticella microstoma EHRB.

II. ROTATORIA.

- Philodina aculeata EHRB.
 15 Synchæta pectinata EHRB.
 " tremula EHRB.
 Anuræa aculeata EHRB.
 " angulata n. sp.
 " cochlearis VIELL.
 " foliacea EHRB.
 20 " clypeus n. sp.
 " acuminata EHRB.
 " longispina.
 " striata EHRB.
 " labis GOSSE.
 25 Rattulus tigris EHRB.
 Diglena catellina EHRB.
 " grandis EHRB.
 Mastigocerca carinata EHRB.
 " cornuta EYF.
 30 " elongata GOSSE.
 " scipio Goss.
 " Rattus EHRB.
 Monostyla lunaris EHRB.
 Cathypna diomis Goss.

- 35 Cathypna luna EHRB.
 Salpina brevispina EHRB.
 " spinigera EHRB.
 Metopidia acuminata EHRB.
 Lepadella ovalis EHRB.
 40 Colurus bicuspidatus EHRB.
 Euchlanis dilatata EHRB.
 Dinocharis pocillum EHRB.
 Pterodina ellyptica EHRB.
 " patina EHRB.
 45 Triarthra longiseta EHRB.
 Polyarthra platyptera EHRB.

III. COPEPODA.

- Cyclops serrulatus C. K.
 " albidus (JUR.).
 " strenuus FISCH.
 50 " vicinus ULJ.

IV. CLADOCERA.

- Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 Alonella nana (BAIRD).
 " exigua (FISCH.).
 Alona rectangula SARS G. O.
 55 Eurycerus lamellatus (O. F. M.).
 Bosmina obtusirostris SARS G. O.
 Simocephalus vetulus (O. F. M.).

V. OSTRACODA.

- Cypria ophthalmica (JUR.).
 Herpetocypris strigata (O. F. M.).

VI. TARDIGRADA.

- 60 Macrobiotus macronyx (DUJ.).

VII. HYDRACHNIDAE.

- Lebertia tauinsignita (LEB.).
 Hygrobates octoporus n. sp.
 Atax crassipes (O. F. M.).

2. *Mocsár a Changa folyó torkolatánál.*

I. ROTATORIA.

Rotifer sp.
 Rattulus tigris EHRB.
 Salpina brevispina EHRB.

II. COPEPODA.

Cyclops serrulatus C. K.
 5 " strenuus FISCH.

Diaptomus acutilobatus Sars.

III. CLADOCERA.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 Simocephalus vetulus (O. F. M.).
 Daphnia pulex d. GEER.

IV. HYDRACHNIDAE.

10 Piona fuscata (HERM.).

3. *Kossogol a Cap Santa és a Changa folyó között.*

I. PROTOZOA.

Dinobryon sertularia EHRB.
 " cylindricum v. palustre
 LEM.

II. ROTATORIA.

Anuræa cochlearis GOSSE.
 " longispina KELL.
 5 Cathypna luna EHRB.

III. COPEPODA.

Cyclops vicinus ULJ.
 Diaptomus lobatus LILLJ.

IV. CLADOCERA.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 Alonella exigua (FISCH.).
 10 Alona costata Sars.
 Bosmina obtusirostris Sars G. O.

4. *Kossogol a Cap Santa és a Than folyó torkolata között.*

I. PROTOZOA.

Ceratium macroceros SCHR.

II. ROTATORIA.

Asplanchna Brightwelli Goss.
 Synchronæta pectinata EHRB.
 Anuræa cochlearis GOSSE.
 5 " aculeata EHRB.
 " longispina VIELL.

Triarthra longiseta EHRB.
 Polyarthra platyptera EHRB.

III. COPEPODA.

Cyclops vicinus ULJ.
 10 Diaptomus incrassatus Sars.

IV. CLADOCERA.

Bosmina obtusirostris Sars G. O.

5. *Kossogol a Dala-kuy sziget déli partja.*

I. PROTOZOA.

Arcella vulgaris EHRB.
 Peridinium tabulatum EHRB.
 Ceratium macroceros SCHR.
 Dinobryon stipitatum St.

II. ROTATORIA.

5 Rotifer vulgaris EHRB.
 Asplanchna Brightwelli Goss.
 Anuræa aculeata EHRB.
 " cochlearis Goss.

- Anuræa longispina KELL.
 10 Euchlanis dilatata EHRB.

- Triarthra longiseta EHRB.
 12 Polyarthra platyptera EHRB.

III. COPEPODA.

- Cyclops vicinus ULJ.
 Diaptomus incrassatus SARS.

IV. CLADOCERA.

- 15 Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 Daphnia longispina O. F. M. var.

6. *A Kossogol littoralis zónájának homokjában.*

I. PROTOZOA.

- Arcella vulgaris EHRB.
 Diffugia constricta EHRB.
 " pyriformis EHRB.
 Ceratium macroceros SCHR.

III. ROTATORIA.

- Anuræa aculeata EHRB.
 " cochlearis GOSS.
 " longispina KELL.
 " striata EHRB.
 10 Pterodina ellyptica EHRB.
 Triarthra longiseta EHRB.

II. NEMATODA.

- 5 Trilobus gracilis BART.

IV. CLADOCERA.

- Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 Bosmina obtusirostris SARS G. O.

7. *Kossogol a Cap Santánál.*

I. PROTOZOA.

- Ceratium macroceros SCHR.
 Dinobryon sertularia EHRB.
 " elongatum IMH.
 Zoothamnium parasita STEIN.

- 10 Triarthra longiseta EHRB.
 Polyarthra platyptera EHRB.

III. COPEPODA.

- Cyclops strenuus FISCH.
 " vicinus ULJ.
 Diaptomus incrassatus SARS.

II. ROTATORIA.

- 5 Synchæta pectinata EHRB.
 Anuræa aculeata EHRB.
 " foliacea EHRB.
 " longispina KELL.
 " labis GROSSE.

IV. CLADOCERA.

- 15 Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 Bosmina obtusirostris SARS G. O.
 " Lilljeborgii SARS G. O.
 Daphnia longispina var.

8. *Kossogol a Dolon-ula félsziget partjai.*

I. PROTOZOA.

- Arcella vulgaris EHRB.
 " discoides EHRB.
 Diffugia globulosa EHRB.

- Diffugia urceolata EHRB.
 5 Rhaphidiophrys elegans H.
 et L.
 Glenodinium cinctum EHRB.
 Ceratium macroceros SCHR.

- Dinobryon sertularia EHRB.
 " cylindricum v. angulat-
 tum IMH.
 10 " cylindricum v. palustre
 LEMM.
 Euplotes Charon EHRB.

II. ROTATORIA.

- Synchæta tremula EHRB.
 Anuræa aculeata EHRB.
 " cochlearis GOSS.
 15 " longispina KELL.
 " striata EHRB.
 " labis GOSS.
 Furcularia gibba EHRB.
 Monostyla lunaris EHRB.
 20 " quadridentata EHRB.

- Triarthra longiseta EHRB.
 Polyarthra platyptera EHRB.

III. COPEPODA.

- Cyclops vicinus ULJ.
 Diaptomus incrassatus SARS.

IV. CLADOCERA.

- 25 Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 Alonella nana (BAIRD).
 Alona affinis LEYD.
 " costata SARS.
 Bosmina obtusirostris SARS G. O.
 30 Daphnia longispina LEYD.

V. TARDIGRADA.

- Macrobiotus macronyx (DUJ.).

9. *Kossogol a Cap Toilgotnál.*

I. ROTATORIA.

- Rotifer macrurus EHRB.
 Anuræa longispina KELL.

II. COPEPODA.

- Cyclops vicinus ULJ.
 Diaptomus incrassatus SARS.

III. CLADOCERA.

- 5 Bosmina obtusirostris SARS G. O.

IV. OSTRACODA.

- Candona candida (O. F. M.).
 Iliocypris lacustris KAUFM.

10. *Angolheim tó.*

I. PROTOZOA.

- Arcella vulgaris EHRB.
 " discoides EHRB.
 Centropyxis aculeata (EHRB.).
 Peridinium tabulatum EHRB.
 5 Ceratium macroceros SCHR.
 Dinobryon sertularia EHRB.
 " stipitatum STEIN.
 Euglena deses EHRB.
 Oxytricha pellationella EHRB.

II. HYDROIDEA.

- 10 Hydra viridis L.

II. NEMATODA.

- Trilobus gracilis BAST.

IV. ROTATORIA.

- Asplanchna Brightwelli GOSS.
 Floscularia sp.
 Synchæta tremula EHRB.
 15 Plæsoma sibirica DAD.
 Anuræa aculeata EHRB.
 " cochlearis GOSS.
 " longispina KELL.
 " striata EHRB.
 20 Mastigocerca cornuta EYF.

Monostyla lunaris EHRB.
 Metopidia lepadella EHRB.
 Salpina brevispina EHRB.
 " spinigera EHRB.
 25 Dinocharis pocillum EHRB.
 Euchlanis dilatata EHRB.
 Cathypna luna EHRB.
 Pterodina elliptica EHRB.

Pterodina patina EHRB.
 30 Polyarthra platyptera EHRB.

V. COPEPODA.

Cyclops serrulatus C. K.
 " fuscus (JUR.).
 Ophiocamptus mongolicus n. sp.
 Diaptomus incrassatus SARS.

VI. CLADOCERA.

35 Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 Alonella nana (BAIRD).
 Acroperus harpæ BAIRD.
 Bosmina obtusirostris SARS G. O.
 " longirostris (O. F. M.)

11. Első kis tó Angolheimtől északra.

I. PROTOZOA.

Ceratium macroceros SCHR.
 Dinobryon sertularia EHRB.

II. ROTATORIA.

Synchæta pectinata EHRB.
 Annæa aculeata EHRB.
 5 " cochlearis Goss.
 Euchlanis dilatata EHRB.
 Triarthra longiseta EHRB.
 Polyarthra platyptera EHRB.

III. COPEPODA.

Cyclops serrulatus C. K.
 10 " strenuus FISCH.
 " vicinus ULJ.

Ophiocamptus mongolicus n. sp.
 Diaptomus lobatus LILLJ.

IV. CLADOCERA.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 15 Alona affinis LEYD.
 " costata SARS.
 Simocephalus vetulus (O. F. M.).
 Daphnia longispina var.
 " longispina v. caudata
 SARS.
 20 " carinata KING.
 " longispina v. tenuitesta
 SARS.

V. OSTRACODA.

Cypria ophthalmica (JUR.).

12. Második kis tó az Angolheim tótól északra.

I. PROTOZOA.

Arcella vulgaris EHRB.
 Peridinium tabulatum EHRB.
 Ceratium macroceros SCHR.
 Dinobryon elongatum IMH.
 5 Euglena viridis EHRB.

II. ROTATORIA.

Asplanchna Brightwelli Goss.
 Floscularia sp.
 Pleosoma sibirica DAD.
 Anuræa aculeata EHRB.
 10 " cochlearis Goss.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| Anuræa clypeus n. sp. | Alonella nana (BAIRD). |
| " longispina KELL. | 20 Alona affinis LEYD. |
| Pterodina ellyptica EHRB. | " guttata SARS G. O. |
| Triarthra longiseta EHRB. | Acroperus harpæ BAIRD. |
| 15 Polyarthra platyptera EHRB. | Bosmina obtusirostris SARS G. O. |
| | Scapholeberis mucronata (O. F. M.). |
| III. COPEPODA. | 25 Ceriodaphnia reticulata (JUR.). |
| Diaptomus incrassatus SARS. | " rotunda SARS. |
| " lobatus LILLJ. | Daphnia longispina LEYD. |
| IV. CLADOCERA. | " magna STR. |
| Chydorus sphaericus (O. F. M.). | |

13. *Kossogol a Dala-kuy szigettől 200 m délre.*

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| I. ROTATORIA. | II. COPEPODA. |
| Anuræa aculeata EHRB. | 5 Cyclops vicinus ULJ. |
| " longispina KELL. | Diaptomus incrassatus SARS. |
| Triarthra longiseta EHRB. | |
| Polyarthra platyptera EHRB. | III. CLADOCERA. |
| | Bosmina obtusirostris SARS G. O. |

14. *A sziget s a Kossogol nyugati partja között.*

- | | |
|----------------------------|----------------------------------|
| I. PROTOZOA. | Triarthra longiseta EHRB. |
| Peridinium tabulatum EHRB. | Polyarthra platyptera EHRB. |
| Ceratium macroceros SCHR. | |
| Dinobryon sertularia EHRB. | III. COPEPODA. |
| " stipitatum STEIN. | Cyclops vicinus ULJ. |
| 5 " elongatum IMH. | 15 Diaptomus incrassatus SARS. |
| II. ROTATORIA. | IV. CLADOCERA. |
| Synchæta pectinata EHRB. | Chydorus sphaericus (O. F. M.). |
| " tremula EHRB. | Alonella exigua (FISCH.). |
| Plæsoma sibirica DAD | Alona costata SARS. |
| Anuræa aculeata EHRB. | Bosmina obtusirostris SARS G. O. |
| 10 " cochlearis GOSS. | 20 " Lilljeborgii SARS G. O. |
| " longispina KELL. | Ceriodaphnia reticulata (JUR.). |

15. *Chubtu-nor.*

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| I. PROTOZOA. | II. ROTATORIA. |
| Arcella vulgaris EHRB. | Synchæta tremula EHRB. |
| Diffugia urceolata EHRB. | 5 Anuræa aculeata EHRB. |
| Euglypha alveolata EHRB. | " cochlearis GOSS. |

Anuræa striata EHRB.

Diglena catellina EHRB.

Euchlanis dilatata EHRB.

10 Polyarthra platyptera EHRB.

III. CLADOCERA.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).

Daphnia magna STR.

“ pulex d. GEER.

IV. OSTRACODA.

Candona candida (O. F. M.).

15 Iliocypris gibba (RAMD.).

Limnocythere incisa DAHL.

V. HYDRACHNIDAE.

Eulais Elpatiewskyi n. sp.

16. Gytschygynty-nor.

I. PROTOZOA.

Arcella discoides EHRB.

Centropyxis aculeata (EHRB.).

Peridinium tabulatum EHRB.

Ceratium macroceros SCHR.

Cathypna luna EHRB.

Lepadella ovalis EHRB.

Salpina brevispina EHRB.

Dinocharis pocillum EHRB.

III. COPEPODA.

15 Diaptomus Zichyi DAD.

II. ROTATORIA.

5 Anuræa aculeata EHRB.

“ cochlearis GOSS.

“ foliacea EHRB.

Rattulus tigris EHRB.

Mastigocerca scipio GOSS.

10 Monostyla lunaris EHRB.

IV. CLADOCERA.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).

Alona affinis LEYD.

Scapholeberis mucronata (O.F.M.).

Daphnia longispina LEYD.

17. Cheltyge-nor.

I. PROTOZOA.

Arcella discoides EHRB.

Dinobryon elongatum IMR.

II. NEMATODA.

Plectus tenuis BAST.

V. COPEPODA.

Cyclops serrulatus C. K.

Canthocamptus northumbrius
BRAD. var.

Ophiocamptus mongolicus n. sp.

Diaptomus Zichyi DAD.

III. GASTROTRICHA.

Chaetonotus polychætus n. sp.

VI. CLADOCERA.

15 Chydorus sphaericus
(O. F. M.).

Alonella exigua (FISCH.).

Alona affinis LEYD.

“ costata SARS.

“ guttata SARS.

20 Ceriodaphnia rotunda SARS.

Simocephalus vetulus
(O. F. M.).

IV. ROTATORIA.

5 Anuræa aculeata EHRB.

“ longispina KELL.

Lepadella ovalis EHRB.

Euchlanis dilatata EHRB.

Pterodina patina EHRB.

10 Triarthra longisetæ EHRB.

18. *Ajagam maranai-bulun.*

I. PROTOZOA.

Dinobryon sertularia EHRB.

II. ROTATORIA.

Synchaeta pectinata EHRB.

Anuraea aculeata EHRB.

Cathypna luna EHRB.

5 Polyarthra platyptera EHRB.

III. COPEPODA.

Cyclops serrulatus C. K.

" strenuus FISCH.

Diaptomus Ziehyi DAD.

IV. CLADOCERA.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).

10 Alona quadrangularis (O. F. M.).

" costata SARS G. O.

Macrothrix odontocephala DAD.

Simocephalus vetulus (O. F. M.).

Daphnia longispina var.

V. OSTRACODA.

15 Candona candida (O. F. M.).

Eucandona rostrata (C. K.).

19. *Djeglyk folyó torkolata.*

I. PROTOZOA.

Centropyxis aculeata (EHRB.).

Ceratium macroceros SCHR.

Dinobryon stipitatum STEIN.

" elongatum IMH.

II. HYDROIDEA.

5 Hydra viridis L.

III. NEMATODA.

Trilobus gracilis BAST.

IV. ROTATORIA.

Asplanchna Brightwelli Goss.

Anuraea aculeata EHRB.

" cochlearis Goss.

10 " acuminata EHRB.

" longispina KELL.

" striata EHRB.

Furcularia forficula EHRB.

Mastigocerca carinata EHRB.

15 Monostyla lunaris EHRB.

" quadridentata EHRB.

Lepadella ovalis EHRB.

Dinocharis pocillum EHRB.

Scaridium longicaudum EHRB.

20 Euchlanis dilatata EHRB.

Pterodina patina EHRB.

Triarthra longiseta EHRB.

Polyarthra platyptera EHRB.

V. COPEPODA.

Cyclops serrulatus C. K.

VI. CLADOCERA.

25 Chydorus sphaericus (O. F. M.).

Alona affinis LEYD.

" costata SARS.

Macrothrix odontocephala DAD.

Bosmina obtusirostris SARS G. O.

30 Simocephalus vetulus (O. F. M.).

Daphnia longispina LEYD.

" pulex d. GEER.

VII. TARDIGRAIDA.

Macrobiotus macronyx (DUG.).

VIII. HYDRACHNIDAE.

Hygrobatas octoporus n. sp.

20. *Noin-gol folyó.*

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| I. PROTOZOA. | Metopidia lepadella EHRR. |
| Epistylis plicatilis EHRR. | |
| II. ROTATORIA. | III. CLADOCERA. |
| Monostyla lunaris EHRR. | Chydorus sphaericus (O. F. M.). |

21. *Kis tó a Chatschim folyó torkolatánál.*

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| I. PROTOZOA. | Cathypna luna EHRR. |
| Arcella vulgaris EHRR. | Monostyla lunaris EHRR. |
| Centropyxis aculeata (EHRR.). | Dinocharis pocillum EHRR. |
| Diffugia lobostoma EHRR. | 15 Euchlanis dilatata EHRR. |
| Rhaphidiophrys elegans HRT. L. | Lepadella ovalis EHRR. |
| 5 Ceratium macroceros SCHR. | Polyarthra platyptera EHRR. |
| II. GASTROTRICHA. | IV. COPEPODA. |
| Chaetonotus polychaetus n. sp. | Cyclops serrulatus C. K. |
| | " strenuus FISCH. |
| III. ROTATORIA. | V. CLADOCERA. |
| Philodina roseola EHRR. | 20 Chydorus sphaericus (O. F. M.). |
| Anuræa cochlearis Goss. | Alonella exigua (FISCH.). |
| " longispina KELL. | Alona quadrangularis (O. F. M.). |
| 10 " striata EHRR. | |
| Mastigocerca elongata GOSSE. | |

22. *Öböl a Chatschim folyó völgyében.*

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| I. PROTOZOA. | III. COPEPODA. |
| Ceratium macroceros SCHR. | Cyclops vicinus ULJ. |
| | Diaptomus lobatus LILLJ. |
| II. ROTATORIA. | IV. CLADOCERA. |
| Anuræa aculeata EHRR. | Chydorus sphaericus (O. F. M.). |
| " cochlearis Goss. | Alonella exigua (FISCH.). |
| Cathypna luna EHRR. | 10 Daphnia longispina LEYD. |
| 5 Polyarthra platyptera EHRR. | |

23. *Chatschim-nor.*

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| I. PROTOZOA. | III. ROTATORIA. |
| Ceratium macroceros SCHR. | Anuræa aculeata EHRR. |
| | " cochlearis Goss. |
| II. NEMATODA. | 5 " longispina KELL. |
| Dorylaimus filiformis BAST. | Triarthra longiseta EHRR. |

Polyarthra platyptera EHRR.

IV. COPEPODA.

Diaptomus incrassatus SARS.

" *lobatus* LILLJ.

V. CLADOCERA.

¹⁰ *Chydorus sphaericus* (O. F. M.).

Leptorhynchus rostratus (C. K.).

Aolna quadrangularis (O. F. M.).

Bosmina obtusirostris SARS G. O.

Simcephalus vetulus (O. F. M.).

¹⁵ *Daphnia longispina* v. *jardini*

BAIRD.

" *pulex* de GEER.

" *longispina* v. *tenuitesta*

SARS G. O.

24. *A. Tochomyk folyó torkolata.*

I. PROTOZOA.

Arcella vulgaris EHRR.

Centropixys aculeata (EHRR.)

II. ROTATORIA.

Synchæta pectinata EHRR.

Anuræa cochlearis GOSS.

⁵ " *foliacea* EHRR.

" *longispina* KELL.

" *striata* EHRR.

Furcularia gibba EHRR.

Cathypna luna EHRR.

¹⁰ *Salpina spinigera* EHRR.

Triarthra longisetæ EHRR.

III. COPEPODA.

Ophiocamptus mongolicus n. sp.

Diaptomus incrassatus SARS.

Cyclops vicinus ULJ.

IV. CLADOCERA.

¹⁵ *Chydorus sphaericus* (O. F. M.).

Bosmina obtusirostris SARS G. O.

25. *A. Turuk folyó torkolata.*

I. PROTOZOA.

Arcella vulgaris EHRR.

Cyphoderia margaritacea

SCHLUMB.

Ceratium macroceros SCHR.

Dinobryon stipitatum STEIN.

⁵ " *elongatum* IMH.

II. GASTROTRICHA.

Chaetonotus polychætus n. sp.

III. ROTATORIA.

Philodina aculeata EHRR.

Anuræa aculeata EHRR.

" *cochlearis* GOSS.

¹⁰ " *acuminata* EHRR.

" *longispina* KELL.

Anuræa striata EHRR.

" *labis* GOSSE.

Mastigocerca carinata EHRR.

¹⁵ " *cornuta* EYF.

Salpina brevispina EHRR.

Scaridium longicaudum EHRR.

Lepadella ovalis EHRR.

Colurus bicuspidatus EHRR.

²⁰ *Euchlanis dilatata* EHRR.

Pterodina patina EHRR.

Polyarthra platyptera EHRR.

IV. COPEPODA.

Cyclops serrulatus C. K.

" *strenuus* FISCH.

²⁵ " *vicinus* ULJ.



V. CLADOCERA.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).

Alonella nana (BAIRD).

Macrothrix odontocephala DAD.

26. Tócsa a Turuk folyó völgyében.

I. PROTOZOA.

Arcella vulgaris EHRB.

" mitrata EHRB.

Epistylis plicatilis EHRB.

Vorticella microstoma EHRB.

II. NEMATODA.

5 Trilobus gracilis BAST.

Monhystera similis BÜTSCH.

Plectus tenuis BAST.

III. ROTATORIA.

Rotifer sp. ?

Actinurus neptunius EHRB.

10 Melicerta ringens EHRB.

Furcularia gibba EHRB.

Euchlanis triquetra EHRB.

IV. COPEPODA.

Cyclops strenuus FISCH.

V. CLADOCERA.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).

15 Alona affinis LEYD.

" costata SARS.

Acroperus harpæ BAIRD.

Scapholeberis mucronata (O.F.M.).

Daphnia pulex DE GEER.

VI. TARDIGRADA.

20 Macrobiotus macroxyx (DUJ.).

VII. HYDRACHNIDAE.

Pionopsis lutescens (HERM.).

27. Morin-Tuskul folyó.

I. PROTOZOA.

Arcella vulgaris EHRB.

Diffugia constricta EHRB.

" corona LEIDY.

II. NEMATODA.

Plectus tenuis BAST.

III. ROTATORIA.

5 Anuræa aculeata EHRB.

" cochlearis GOSS.

" foliacea EHRB.

" longispina KELL.

Furcularia forficula EHRB.

10 Monostyla lunaris EHRB.

Lepadella ovalis EHRB.

Triarthra longiseta EHRB.

Polyarthra platyptera EHRB.

IV. CLADOCERA.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).

15 Macrothrix odontocephala DAD.

Bosmina obtusirostris SARS G. O.

Daphnia longispina v. tenuitesta
SARS.

V. HYDRACHNIDAE.

Hydrachna geografica (O. F. M.).

Mideopsis orbicularis (O. F. M.).

20 Limnesia histronica (HERM.).

28. *A Borsok tó s a Kossogol összefolyása.*

I. PROTOZOA.

Arcella vulgaris EHRB.

Centropyxis aculeata (EHRB.).

Diffugia pyriformis PERTY.

" urceolata EHRB.

5 Rhaphidiophrys elegans H. et L.

Ceratium macroceros SCHR.

Dinobryon sertularia EHRB.

II. HYDROIDEA.

Hydra viridis L.

III. NEMATODA.

Dorylaimus filiformis BAST.

IV. ROTATORIA.

10 Rotifer sp. ?

Asplanchna Brightwelli Goss.

Synchaeta pectinata EHRB.

Anuraea aculeata EHRB.

" cochlearis GOSS.

15 " foliacea EHRB.

" clypeus n. sp.

" acuminata EHRB.

" longispina KELL.

" striata EHRB.

20 Metopidia labis Gosse.

Mastigocerca carinata EHRB.

" cornuta EYF.

Rattulus tigris EHRB.

Furcularia gibba EHRB.

25 Diglena catellina EHRB.

Dinocharis pocillum EHRB.

Metopidia acuminata EHRB.

Lepadella ovalis EHRB.

Colurus deflexus EHRB.

30 Euchlanis dilatata EHRB.

Triarthra longiseta EHRB.

Polyarthra platyptera EHRB.

V. COPEPODA.

Cyclops serrulatus C. K.

" vicinus ULJ.

VI. CLADOCERA.

35 Chydorus sphaericus (O. F. M.).

Alona affinis LEYD.

Bosmina obtusirostris SARS G. O.

Ceriodaphnia rotunda SARS.

VII. TARDIGRADA.

Macrobiotus macronyx (DUJ.).

29. *Borsok tó.*

I. PROTOZOA.

Diffugia corona WALL.

" urceolata EHRB.

II. NEMATODA.

Plectus tenuis BAST.

Diplogaster Elpatiewskyi n. sp.

5 Dorylaimus filiformis BAST.

III. ROTATORIA.

Metopidia acuminata EHRB.

IV. COPEPODA.

Cyclops serrulatus C. K.

V. CLADOCERA.

Alona affinis LEYD.

VI. TARDIGRADA.

Macrobiotus macronyx (DUJ.).

VII. HYDRACHNIDAE.

10 Piona rotundata KR.

30. Malyi Gumnuh jolyó.

I. PROTOZOA.

Centropyxis aculeata (EHRB.).
Vaginicola decumbens EHRB.

II. HYDROIDEA.

Hydra fusca L.

III. NEMATODA.

Trilobus gracilis BAST.

IV. ROTATORIA.

5 *Anuræa striata* EHRB.
Lepadella ovalis EHRB.

V. CLADOCERA.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alona affinis LEYD.
 " *costata* SARS.

31. Kiren-nor.

I. PROTOZOA.

Centropyxis aculeata (EHRB.).

II. NEMATODA.

Dorylaimus filiformis BAST.

III. ROTATORIA.

Anuræa striata EHRB.

IV. COPEPODA.

Cyclops gracilis LILLJ. ?

5 *Canthocamptus insignipes* LILLJ.

V. CLADOCERA.

Alona intermedia SARS.

VI. OSTRACODA.

Cypridopsis vidua (O. F. M.).

VII. HYDRACHNIDAE.

Limnesia connata KOEN.

32. Bulunai források.

I. ROTATORIA.

Anuræa aculeata EHRB.
 " *longispina* KELL.
Triarthra longiseta EHRB.

II. COPEPODA.

Diaptomus Zichyi DAD.

III. CLADOCERA.

5 *Bosmina obtusirostris* SARS G. O.
Daphnia longispina v. *caudata*
 SARS.

IV. OSTRACODA.

Eucypris incongruens (RAMDH.).

33. Chorchoito-nor.

I. PROTOZOA.

Diffugia pyriformis PERTY.
Euglypha alveolata EHRB.
Ceratum macroceros SCHR.
Euglena viridis EHRB.
 5 *Paramecium Aurelia* (O. F. M.).

Lagenophrys nassa STEIN.
Cothurniopsis imberbis EHRB.
Cothurnia crystallina EHRB.
Epistylis plicatilis EHRB.
 10 *Vorticella nebulifera* EHRB.

III. ROTATORIA.

- Rotifer macrurus EHRB.
 Actinurus neptunius EHRB.
 Asplanchna Brightwelli Goss.
 Anuraea aculeata EHRB.
 15 " cochlearis Goss.
 " striata EHRB.
 Mastigocerca carinata EHRB.
 " cornuta EYF.
 " elongata EHRB.
 20 " rattus EHRB.
 Rattulus tigris EHRB.
 Dinocharis poecillum EHRB.
 Colurus uncinatus EHRB.
 " deflexus EHRB.
 25 Monostyla lunaris EHRB.
 Metopidia acuminata EHRB.
 Lepadella ovalis EHRB.
 Euchlanis dilatata EHRB.
 " triquetra EHRB.
 30 Pterodina patina EHRB.

- Brachionus rubens EHRB.
 Triarthra longiseta EHRB.
 Polyarthra platyptera EHRB.

III. COPEPODA.

- Cyclops serrulatus C. K.
 35 " strenuus FISCH.
 " vicinus ULJ.
 Diaptomus Zichyi DAD.

IV. CLADOCERA.

- Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 Alona costata Sars.
 40 Daphnia longispina v. caudata
 Sars. [Sars.
 " longispina v. tenuitesta

V. OSTRACODA.

- Cypridopsis vidua (O. F. M.).
 Cypria ophthalmica (JUR.).
 Eucandona tuberculata n. sp.

34. Mota folyó.

I. PROTOZOA.

- Tocophrya cyclopum (Cl. et L.).

II. NEMATODA.

- Trilobus gracilis BAST.

III. COPEPODA.

- Cyclops fuscus (JUR.).
 Ophiocamptus mongolicus n. sp.

IV. CLADOCERA.

- 5 Alona costata Sars.
 Eurycerus lamellatus (O. F. M.).
 Simocephalus vetulus (O. F. M.).

V. OSTRACODA.

- Iliocypris gibba (RAMDH.).
 Eucandona tuberculata n. sp.

35. Mota öböl.

I. PROTOZOA.

- Diffugia corona WALL.

II. NEMATODA.

- Trilobus gracilis BAST.

III. ROTATORIA.

- Rotifer sp.?
 Triarthra longiseta EHRB.

IV. COPEPODA.

- 5 Cyclops vicinus ULJ.
 Canthocamptus northumbrius
 BRAD. var.

V. CLADOCERA.

- Alona affinis LEYD.

36. *A Kossogol nyugati partja a Djeglyk és Chatschim folyó között.*

I. PROTOZOA.	Triarthra longiseta EHRB.
Ceratium macroceros SCHR.	III. COPEPODA.
Dinobryon stipitatum elongatum.	Cyclops vicinus ULJ.
II. ROTATORIA.	Diaptomus incrassatus SARS.
Rotifer sp. ?	IV. CLADOCERA.
Conochilus volvox EHRB.	10 Bosmina obtusirostris SARS.
5 Anuræa aculeata EHRB.	Daphnia longispina LEYD.
" longispina KELL.	

37. *Chilin folyó.*

PROTOZOA.	Diffugia urceolata EHRB.
Arcella vulgaris EHRB.	" constricta EHRB.
Centropyxis aculeata (EHRB.).	

38. *Cap Mottabulun.*

I. PROTOZOA.	III. COPEPODA.
Ceratium macroceros SCHR.	Cyclops vicinus ULJ.
Dinobryon stipitatum STEIN.	Diaptomus incrassatus SARS.
II. ROTATORIA.	IV. CLADOCERA.
Synchaeta pectinata EHRB.	Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Anuræa aculeata EHRB.	Alona intermedia SARS.
5 " cochlearis GOSS.	15 Macrothrix odontocephala DAD.
" longispina KELL.	Bosmina obtusirostris SARS.
" striata EHRB.	Daphnia longispina LEYD.
Salpina spinigera EHRB.	V. OSTRACODA.
Triarthra longiseta EHRB.	Eucandona Elpatiewskyi n. sp.
10 Polyarthra platyptera EHRB.	

III. Az új fajok ismertetése.

1. *Diplogaster Elpatiewskyi* n. sp.

Teste előfelé alig észrevehetően, hátrafelé ellenben erősen vékonyodik. A cuticula csupán a test mellső harmadában látszik igen finoman gyűrűzöttnek, míg egybeült sima és sörtéket sehol sem visel.

A szájüreg terjedelmes, falazatát megvastagodott cuticula fõdi, mely egyes pontokon csomósodottnak látszik. A szájüregben sajátságos fogkészülék van. A garat elejének belsõ lumenét szintén megvastagodott cuticula fõdi. A mellsõ garatbulbus belsõ lumenét vastagabb cuticula határolja, mint a hátulsóét. A bélcsatorna falazatában a sejteket nem tudtam felismerni.

A nõi ivarszerv páros, aránylag rövid s az ivarnyílás a test közepe táján fekszik.

A fark az alfelnnyilástól kezdve hirtelen vékonyodik és igen hegyes csúcsban végzõdik, belsejében két mirigyet tudtam megkülönböztetni.

Csupán nõstényeit találtam meg, melyeknek méreti viszonyai a következõk: egész testhossza 1·5 - 1·55 mm; garathossza 0·3—0·35 mm; farkhossza 0·2—0·25 mm; legnagyobb átmérõje 0·07 mm.

Termõhelye: *Borsok* tó.

E faj, melyet gyûjtõjének, J. W. ELIPATIEWSKY-nek tiszteletére neveztem el, a genus többi fajaitól szájüregének s illetõleg fogkészülékének szerkezete alapján könnyen megkülönböztethetõ. Különben legközelebbi rokona a *Diplogaster fictor* BAST.

2. *Chaetonotus polychaetus* n. sp.

Teste meglehetõs zömök, fölülrõl nézve hátrafelé észrevehetõen szélesedik, a nyaktájon kissé befûzõdött s így némileg papucsához hasonlít, különben a test alakja nagyon emlékeztet a *Chaetonotus hystrix*-éra.

A fejen karélyokat megkülönböztetni nem tudtam, a mit különben hajlandó vagyok a konzerválás eredményének tulajdonítani. A nyak kevésbé keskenyebb a fejnél, és határa még az oldalt fekvõ állatkán is feltûnik a közte és a törzs között levõ mélyedés miatt.

A törzs a villafüggelék alapja felé kissé keskenyedik s a villafüggelék között meglehetõs mélyen bemetszett; oldalról nézve különben tompán ívesnek látszik.

Az egész test hátoldalát, a mennyire azt megállapítanom sikerült, körülbelül 16—17 hosszszorban rendezõdött pikkelyek

födik. Az egyes pikkelyek némileg ékformák, illetőleg háromkarélyosak, mellső végük hegyes, hátulsó végük, mely mintegy az ék alapjának felel meg, ívesen kimetszett, ennek következtében két hátulsó csúcsuk íves, hegyes szárnynyujtványt alkot. Minden egyes pikkely hátulsó szárnynyujtványával két utána következő pikkelyen fekszik és két szomszédos pikkely bizonyos fokig elfödi a köztük és a mögöttük fekvő pikkely csúcsrésztét.

Minden pikkelyről egy-egy mellékágas, háromélű túske ered, melyek közül a fejen lévők sokkal rövidebbek a nyakon s a törzsen lévőknel, illetőleg a tüskék a fejtől kezdve hátrafelé fokozatosan hosszabbodnak; de valamennyi között leghosszabbak a villafüggelékek közelében emelkedők. Valamennyi túske a pikkely hátulsó szegélyének közelében ered és alapja három taréjos; tarajai közül az egyik a pikkely középvonalában húzódik végig s csaknem a mellső csúcsig halad, míg a más kettő a pikkely hátulsó oldal szárnynyujtványain fekszik. Valamennyi tüskének mellékága nem a distalis csúcs közelében, hanem a túske közepe táján, tehát a végcsúcstól nagy távolságban ered.

A hasoldalon a pikkelyek jelenlétét nem tudtam megállapítani. A fej hasoldalának hosszú tapintósörte-pamatai közül csak az egyik párt sikerült felismernem.

A villafüggelékek sarlóformán gyengén görbültek, distalis végük felé fokozatosan keskenyednek és fölületük sima.

A szájső jól fejlett, falazatában 18 pálczikát számláltam meg. A garat hátrafelé fokozatosan vastagodik, de észrevehető bulbust nem alkot, a gyomor hosszának mintegy $\frac{3}{4}$ -ét teszi ki. A gyomor egyenes, hátrafelé keskenyedő tömlőhöz hasonlít.

A test hossza a villafüggelékek nélkül 0.095 mm, a villafüggelékek hossza 0.02 mm, a fej szélessége 0.04 mm, a törzs legnagyobb szélessége 0.05 mm, a fejtüskék hossza 0.003 mm, a nyaktüskék hossza 0.004—1.005 mm, a törzstüskék hossza 0.015—0.018 mm között változik.

Termőhelyei: *Chellyge-nor*; kis tó a *Chatschim* folyó torkolatánál; a *Turuk* folyó torkolata.

E faj pikkelyeinek alakjával és szerkezetével hasonlít a *Chaetonotus hystrix* METSCH. faj európai és még inkább paraguayi példányaihoz, de eltér ezektől abban, hogy tüskéinek mel-

lékága nem a distalis csúcs közelében ered, hanem közepén, legfőképen azonban tüskesorainak nagyobb számával különbözik. a mennyiben a *Chaetonotus hystrix*-nek csupán 9 tüskesora van.

3. *Anuraea clypeus* n. sp.

Pánczélja pajzsforma s ennek köszöni nevét is. Hátrafelé fokozatosan keskenyedik, oldalai gyengén ívesek, oldalszélei a hasoldalra hajlottak s ezt hosszában kis területen takarják; hátulsó vége meglehetősen hegyesen kerekített. A hátoldali homlokszegélyen hat tüskenyujtvány emelkedik, a melyek csaknem egyforma magasak s egymástól majdnem egyforma távolságban állanak, különben valamennyi aránylag rövid és széles. A hasoldali homlokszegély közepén mélyen öblözött, az öböl két oldalán a szegély egy-egy kisebb külső s egy-egy nagyobb belső, kerekített halmot alkot. A pánczél egész fölületén finom, hosszirányú vonalak húzódnak végig.

A pánczél egész hossza 0.13 mm, legnagyobb átmérője 0.068 mm.

A belső szervek szerkezete tekintetében e faj semmi lényeges eltérést nem mutat a genus többi fajaitól.

Termőhelyei: *Kossogol*, a *Changa* folyó torkolata; második kis tó az *Angolheim* tótól északra; a *Borsok* tó s a *Kossogol* összefolyása.

Az eddig ismert fajok közül legközelebbi rokona az *Anuraea* (*Notholca*) *jugosa* Gosse, a melytől azonban pánczéljának alakján kívül legfőképen a hasoldalra hajlott oldalszegélyeivel különbözik; ezen kívül az *Anuraea jugosa* tengeri alak, melyet Gosse Copenhagen mellett talált.

4. *Anuraea angulata* n. sp.

Pánczélja némileg tömlőhöz hasonlít, mellső és hátulsó vége keskenyebb, mint közepe. A hátoldali homlokszegélyen egymástól csaknem egyenlő távolságban álló és csaknem egyforma hosszú hat tüskenyujtvány ered; a hasoldali homlokszegély, a mennyire azt megállapítanom sikerült, hullámos és rajta hat

kis karélyka emelkedik. A pánczél oldalvonalai a homloktól kezdve majdnem a pánczél közepe tájáig, illetőleg kevéssel ezen túl, ferdén ki- és hátrafelé haladnak, majd hegyes csúcsot alkotnak, a melyen túl be- és hátrafelé futnak. A csúcsok előtt és mögött az oldalvonalak azonban nem egyenesek, hanem kisebb-nagyobb mértékben ívesek. A pánczél hátulsó végének közepén rövid, meglehetősen széles tüskenyújtvány ered, az *Anuraea labis* GOSSE fajéhez hasonlólag.

A pánczél egész fölületén meglehetősen tömötten álló hosszvonalak emelkednek, melyek közül legélesebbek a homlok tüskenyújtványaitól eredők.

A pánczél egész hossza 0.3 mm; legnagyobb szélessége 0.25 mm.

Termőhelye: *Kössogol*, a *Changa* folyó torkolata, de nem gyakori, a mennyiben csupán két példányát találtam.

A genus eddig ismert fajaitól pánczéljának alakja és szerkezete alapján könnyen megkülönböztethető. Különben legközelebbi rokonának az *Anuraea labis* GOSSE faj tekinthető.

5. *Canthocampatus northumbricus* BRADY.

var. *coronatus* n. var.

Fiatál és teljesen ivarérett példányokat egyaránt találtam. Az ivarérett példányok a test tagoltsága s a szelvények cuticulájának szerkezete tekintetében teljesen egyeznek a SCHMEIL O.-tól leírt európai példányokkal. A fiatal példányok potrohán a két első szelvény jól elkülönült, míg ellenben a két utolsó egybeolvadt s csupán egy tüskegyűrű mutatja a kettő közötti határt.

Mindkét villafüggelék aránylag hosszú, majdnem oly hosszú, mint az utolsó potrohszelvény, vége felé keskenyedik, hasoldala sima. hátoldalának középvonalában két cuticulahalom van, melyek közül a proximalis a hátoldali sörtét viseli, míg a distalis széles, rövid kúphoz hasonlít; a külső szegély proximalis harmadában, egymás szomszédságában egy rövidebb s egy hosszabb sörte emelkedik, közepe táján pedig egy hosszabb sörte ül. A csúcs-sörték alapját apró tüskék koszorúja övedzi.

A második csáppár külső ága izeletlen, külső szegélyének

distalis harmadában, valamint csúcsán és csúcsa közelében egy-egy erős sörtét visel, belső szegélyén rövid, vékony sörte ül s így összesen négy sörtével fegyverzett.

A lábak mindenben hasonlítanak a faj európai törzspéldányaéhoz, de a belső ágak valamivel hosszabbaknak látszanak.

Az ivarérett példányok ötödik lába tökéletesen egyezik a faj európai törzspéldányaival. A fiatal példányok ötödik lábának külső ága valamivel rövidebb és más forma, mint az ivaréretteké, a sörtéinek száma és elhelyezése azonos; a belső ág már szembezőkö eltérést mutat, a mennyiben csupán három sörtével fegyverzett s ezek is rövidek, inkább tűskeformák.

Termőhelye: *Cheltyge-nor*; *Mota*-öböl.

6. *Ophiocamptus mongolicus* n. sp.

Nőstény.

A test hátrafelé csak kis mértékben vékonyodik. A törzs első szelvénye az orrmánynyal együtt kevésbé hosszabb, mint az utána következő négy szelvény együttvéve, hátrafelé kissé szélesedik, kevésbé hosszabb, mint a milyen széles, hátulsó zugai majdnem derékszögűek. Az orrmány jól fejlett, aránylag hosszú, ívesen a hasoldalra hajlott. A következő négy törzsszelvény csaknem egyforma hosszú és egyforma alakú, hátulsó zugaik hátra- és kifelé kissé megnyultak, különösen a három első szelvényé. Valamennyi törzsszelvény hátulsó szegélye fogazatlan és tüskétlen, fölületük pedig sima.

A potroh genitális szelvénye hosszabb az utána következők akármelyikénél, hátulsó szegélye mindenütt fogazatlan és tüskétlen. A következő két szelvény csaknem egyforma hosszú, hátulsó szegélyük fogazatlan, de a hasoldalon a szegély előtt tüskék félgyűrűjét viselik. Az utolsó potrohszelvény hasoldalán a villafüggelékek alapján tüskekoszorú emelkedik.

Az analis operculum hosszú kúphoz hasonlít, szabad szegélye egészen sima, csúcsa kerekített.

A villafüggelékek mindenike hátulsó felében keskenyebb, oly hosszú, esetleg valamivel hosszabb, mint az utolsó potrohszelvény, külső szegélyén proximalis harmadában egy kis tűske mel-

lett egy hosszú finom sörte, distalis harmadában egy hosszú finom sörte ered, belső szegélyének közepén kis tüske ül. A csücs-sörték közül csupán a két középső fejlődött ki jól, melyek közül a külső gyenge, majdnem oly hosszú, mint a villafüggelék s az utolsó potrohszelvény együtt, míg a belső erős, oly hosszú, mint a villafüggelék s a potroh együtt; a külső sörte mellett egy tüske, a belső mellett egy rövid, finom sörte emelkedik.

A fiatal, ivaréretlen nőtény potrohán a két első szelvény még elkülönült, míg ellenben a két utolsó még egybeolvadt és csupán a hasoldali félgyűrű jelzi határukat; egyebekben azonban hasonlít az ivaréretthez.

Az első csáp hét izből összetett, két első íze igen vastag, míg a többi csaknem egyforma vékony s egyúttal egyforma hosszú is; az utolsó íz distalis felében feltűnően vékonyodik. Az érzőpálczika aránylag rövid, a mennyiben még az ötödik íz distalis végét sem éri el.

A fiatal nőtény első csápja hat ízű, négy első íze csaknem egyforma vastag. ötödik íze feltűnő rövid, míg a hatodik hosszú s az érzőpálczika az utolsó íz csücsáig ér.

A második csáppár egészen olyan, mint a himé. (L. ott.)

Valamennyi lábpár külső ága három, a belső ellenben két-izű. Az első lábpár külső ága kevéssel hosszabb a belsőnél, ízei csaknem egyforma hosszúak, az utolsón egy tüske és három sörte emelkedik; mindenik íz külső szegélye apró tüskékkel fegyverzett. A belső ág csak kevéssel hosszabb, mint a külsőnek két proximalis íze együtt, első íze csaknem kétakkora, mint a második, egyúttal sokkal vastagabb, külső szegélye tüskézett, belső szegélyén a distalis csücs közelében hosszú sörte emelkedik; a második íz csücsán három sörte ül, míg külső szegélye három kis tüskével fegyverzett. Ilyen szerkezetű a fiatal nőténynek az első lába is.

A második, valamint a harmadik lábpár külső ága már sokkal hosszabb a belsőnél, két első ízének tüskéje feltűnő hosszú, az utolsó íz külső szegélyén egy tüske, a belsőn egy, csücsán pedig három sörte emelkedik. A belső ág valamivel hosszabb a külsőnek két proximalis ízénél, második íze három sörtével fegyverzett és külső szegélyén tüskézett.

A negyedik lábpár külső ága egészen olyan, mint a második és harmadiké, belső ága azonban rövidebb, nem egészen oly hosszú, mint a külsőnek két proximalis íze együtt, második íze csúcán egy tüskével és két sörtével, belső szegélye egy sörtével fegyverzett.

A fiatal nőtény második lábán a belső ág két íze csaknem egyforma hosszú, de az első vastagabb s a másodiknak csúcán egy tüske és egy sörte ül. A negyedik láb külső ága csaknem mindenben hasonlít az ivarérettéhez, míg a belső ág utolsó ízén csupán három kis tüske ül.

Az ötödik láb külső ága levélforma, a belsőnél rövidebb, külső szegélyén három, distalis csúcán két, összesen öt hosszú tollas sörte ül, belső szegélyén apró tüskék emelkednek. A belső ág valamivel hosszabb a külsőnél, vége felé keskenyedik, külső szegélyén és csúcán két-két hosszú, belső szegélyén ellenben három rövid sörte ered.

A fiatal nőtény ötödik lábának mindkét ága egyforma hosszú, a külső ág némileg körforma, összesen öt sörtével fegyverzett, melyek közül két rövidebb a külső, egy pedig a belső szegélyén ül; a belső ág csupán egy erős tüskét s egy sörtét visel. De találtam oly fiatal nőtényt is, melynek ötödik lábán a belső ág egy kifelé görbült erősebb külső s egy egyenes, rövid belső tüskét is viselt a csúcson emelkedő tüskén és sörtén kívül.

A receptaculum seminis némileg hasonlít az *Ophiocamptus Sarsi* Mraz. fajához.

A kifejlődött nőtény hossza a villasörték nélkül 0.8 mm; a villasörtékekkel együtt 1.15 mm.

Hím.

A hím testének általános szerkezete tekintetében egyezik a nőténnyel, de rostruma valamivel vékonyabb és hosszabb, törzsszelvényeinek oldalszegélyei egyenesek.

Az ölelő csáp három első íze a többinél sokkal vastagabb, a harmadik ízén törforma, tüskés cuticulafüggelék van. A negyedik ízén az érzőpálczikán kívül még egy erős, finoman sörtézett tüske is emelkedik. Az utolsóelőtti második íznek belső oldalán négy tüskeforma fogacska van. Az utolsóelőtti íz igen kicsiny, valamennyi többinél kisebb, míg az utolsó oly hosszú, mint az

ötödik és hatodik íz együtt. Az érzőpálczika kevésse meghaladja az utolsóelőtti izet.

A második csáppár mellékága ujjforma, egyízű, csúcsán két kis sörtét visel. A főág utolsó íze felé szélesedik, külső szegélyén két tüskével fegyverzett.

Az első lábpár mindenben hasonlít a nőstényéhez, csak hogy belső ága olyan hosszú, mint a külső és izei csaknem egyforma hosszúak.

A második lábpár olyan, mint a nőstényé, úgy a harmadiknak és negyediknek külső ága is. A harmadik láb belső ágának utolsó ízén a belső szegély közepéről ostorforma erős söрте ered, míg csúcsán két kis söрте ül. A negyedik láb belső ágának első íze belső csúcsán meglehetősen erős sörtét visel; a második íz külső szegélyén két kis, a belsőn két kis és egy nagy söрте ül, míg distalis csúcsa erős tüskét hordoz.

Az ötödik láb külső ága megnyult négyszögletű lemezhez hasonlít, melynek külső szegélyén két kisebb, belső szegélyén egy rövid, distalis csúcsán pedig két hosszabb söрте emelkedik, míg a rövidebb belső ág csúcsán csupán két erős, túskeforma söрте ül.

A hatodik lábpárt három egyforma, egymástól egyenlő távolságban emelkedő söрте képviseli.

Testhossza a villasörték nélkül 0.5 mm.

Termőhelyei: *Angolheim* tó; első kis tó *Angolheim*től északra; *Chettyge-nor*, a *Tochomyk* folyó torkolata; *Mota* folyó.

E faj lábainak szerkezetével az *Ophiocamptus Sarsi* MRAZ. fajhoz hasonlít. A him ötödik lábpárja emlékeztet az *Ophiocamptus Sarsi* MRAZ. és *Canthocamptus crassus* SARS fajára; míg villafüggelékei olyanok, mint a *Canthocamptus insignipes* LILLJ. fajéi.

7. *Eucandona tuberculata* n. sp.

Kagylói oldalról nézve kis mértékben veséhez hasonlítanak, de hátul sokkal magasabb, mint elől. A mellső kagylószegély csak kevésse haladja meg a hátulsónak fél magosságát, hegyesen kerekített és egyformán megy át a hát- és a hasoldali szegélybe, meglehetősen széles likacscsatornás öve van és tömötten sörtés.

A hátoldali kagylószegély egészben véve tompán íves, hátulso harmadáig gyengén lejtősen emelkedik, hátulso harmadában legmagasabb s innen kezdve meredek, íves lejtőben ereszkedik le a hátulso szegélyhez. A hátulso szegély majdnem függélyes, felső harmada fölött mindkét kagylófalon kiálló, tompán kerekített halom emelkedik, a halom szabad szegélyén 7—8 kis ujjforma kiemelkedés van, melyek csúcsúkkal lefelé tekintenek, egy-egy finom, rövid sörtét viselnek s a halmot fűrészfogazottá teszik. E halmok jelenléte szolgáltatott alkalmat a faj elnevezésére. A hátulso szegélynek szintén van likacscsatornás öve, a mely alsó végén szélesebb, a halmok fölött erősen elkeskenyedik. de likacsok és sörték tulajdonképen csak a halmokig mutatkoznak. A hasoldali kagylószegély közepén szélesen és sekélyen öblös, az öböl előtt gyengén íves, az öböl mögött lefelé lejtősen íves, majd pedig egyenes s a hátulso szegélylyel észrevehető, kerekített zugot alkot, egész hosszában likacscsatornás övet visel, a mely hátulso harmadában sokkal szélesebb, mint egyebütt. A két kagyló különben egészen egyforma szerkezetű.

Fölülről nézve a kagylók keskeny tojásformát mutatnak, mindkét végükön kerekítettek, de a mellső csúcs hegyesebb a hátulsónál.

A kagylók falazata finoman szemecskés és egész fölülete sörtéket visel. A sörték a mellső kagylószegélyen, ezzel párhuzamos sorokban, tömötten állanak, míg egyebütt gyéren elszórtak.

Az első és második csáppár, a felső állkapcsi tapogató s az alsó állkapocs emlékeztet a genus többi tagjaiéra. Az állkapcsi láb tapogatója aránylag rövid és vastag, csúcsán különböző hosszú három sörtét visel; a koltýűfüggeléket helyettesítő két sörte közül az egyik erős, tollas, a másik gyenge, rövid és sima.

A második lábpár proximalis második íze oly hosszú, mint az utána következő kettő együttvéve, hátulso szegélyén három kis fogacska emelkedik. A következő két lábíz egyforma hosszú, az egyik sörtét visel, a másik ellenben hátulso szegélyén három kis fogacskával fegyverzett. Az utolsó íz csak fél oly hosszú, mint az őt megelőző; oldalsórtéje kevés haladja meg a distalis három lábíz együttes hosszát; a csúcssórték közül egyik oly

hosszú, mint a distalis három lábíz együttvéve, míg a másik csak kevéssel hosszabb a két utolsó lábíz együttes hosszánál.

Az első lábpár proximális második íze alsó szegélyén öt pamatban rendeződött sörtékkel borított, a harmadik íz alsó csücsán egy sörtét visel. fölül sörtepamatokkal fegyverzett; ugyanilyen a negyedik íz is; az ötödik íz a negyediknek félhosszánál hosszabb, némileg kúpforma, a csücskarom alapján két, meglehetősen hosszú sörtével fegyverzett. A csücskarom oly hosszú, mint a láb három utolsó íze együttvéve, sarlóforma, de aránylag gyenge.

A villafüggelék kardforma, distalis vége felé keskenyedik, szegélysörtéje végső harmadában ül, csücskarmai meglehetősen vékonyak, csaknem egyformák, a villafüggelék félhosszánál sokkal rövidebbek; a csücszsörte csak oly hosszú, mint a mekkora a villafüggelékek legkisebb szélessége.

A vulva hátrafelé feltűnően megnyult, keskeny szalaghoz hasonlít, distalis vége ferde, alsó szegélye proximális végén kettős halmot alkot s itt egyúttal szélesebb.

Kagylók hossza 1·3 mm; legnagyobb magassága 0·8 mm; legnagyobb átmérője 0·5 mm.

Egyetlen nősténypéldány állott rendelkezésemre érett petékkel és a receptaculum seminisben ondószálacsákkal.

Termőhelye: *Mota* folyó.

A genus eddig ismert fajaitól kagylóinak alakja, főleg pedig a kagylók hátulsó szegélyének kiemelkedő halmai alapján könnyen megkülönböztethető. De egyik feltűnő jellemvonása a szalagformán megnyult vulva is, melynek révén az *Eucandona Elpatiewskyi* Dad. fajra emlékeztet.

8. *Eucandona Elpatiewskyi* n. sp.

A kagylók oldalról nézve kis mértékben veseformát mutatnak, elül és hátul csaknem egyforma magasak, legnagyobb magasságuk kevéssel közepük mögött van. A mellső szegélyt a hátoldali felől gyenge mélyedés határolja, a melytől kezdve íves lejtőben ereszkedik lefelé s a hasoldali szegélylyel hegyesen kerekített, széles zúgot alkot, egész hosszában likacsatornás

övet visel, a mely fölfelé fokozatosan keskenyedik. A hátoldali szegély a határmélyedéstől kezdve lejtősen emelkedik, csaknem egyenes, közepe mögött azonban kerekített halmot alkot, a melytől kiindulólág ismét lejtőbe megy át s aztán észrevétlenül enyészik el a hátulsó szegélybe. A hátulsó szegély csaknem olyan szerkezetű, mint a mellső, de felső fele egyenes, a hasoldali szegélylyel szintén kerekített zúgot alkot, likacs-szatornás öve valamivel szélesebbnek látszik a mellső szegélyénél. A hasoldali szegély közepe táján kis mértékben szélesen öblös, egész hosszában likacs-szatornás övet visel, a mely az öböl mögött szélesebb, mint az öböl előtt.

A kagylók fölülről nézve igen keskeny tojáshoz, majdnem csónakhoz hasonlítanak, mindkét végen hegyesek, de elül mégis hegyesebbek, mint hátul, a legnagyobb szélesség közepükre esik.

A kagylók falazata finoman szemecskés és gyéren sörtes. Az izombenyomatok száma 7 s ezek egymás közelében fekvő majdnem zárt csoportot alkotnak.

Az első és második csáppár emlékeztet a genus többi fajaiéra. A felső állkapcsi tapogató proximalis ízén egy hosszú és egy rövid tollas sörte ül, a második iznek alsó csücsán négy hosszú sörte emelkedik s mintegy pamatot alkot; az utolsó iz csücsán két karom és három rövid sörte van.

Az alsó állkapocs tapogatójának második ízén két erős karom s ezek között egy rövid sörte ül, továbbá lejtős sorban három hosszabb sörte is emelkedik. A rágónyujtványok közül az első a csücssörtéken kívül még két sima karommal is fegyverzett.

Az állkapcsi láb tapogatója egyik szegélyén hullámos, a másikon egyenes, csücssörtéi majdnem egyforma hosszúak; a kopolyúfüggelék helyettesítő két sörte közül az egyik rövid, sima, a másik hosszú, tollas.

Az első lábpár proximalis második íze oly hosszú, mint az utána következő három iz együttvéve; alsó csücsán, épen mint a reá következő kettőén is, egy sörte ül és alsó szegélye hat sörte-pamattal fegyverzett. A következő két iz egyforma hosszú, míg a csücsiz alig fél oly hosszú, mint az utolsóelőtti. A csücskarom kevéssel hosszabb a láb félhosszánál.

A második lábpár utolsóelőtti két íze együttesen oly hosszú,

mint a proximalis második íz. Az utolsó íz hosszabb az öt megelőzőnek felénél, szegélysortéje oly hosszú, mint a három distalis lábíz együttvéve; a csúcssörték közül az egyik csak kevéssel rövidebb a szegélysorténél, míg a másik nem egészen oly hosszú, mint a két utolsó lábíz együttvéve.

A villafüggelékek kardformán gyengén görbültek, különösen distalis harmadukban, végük felé fokozatosan keskenyednek; a szegélysorte oly hosszú, mint a hátulsó csúcskarom; a mellső csúcskarom hosszabb és erősebb a hátulsónál; a csúcssorte igen rövid.

A vulva hátrafelé erősen megnyult, hegyesen végződik, alsó szegélye hullámos, alapján két nagyobb dudor van.

A kagylók hossza 1·5 mm; legnagyobb magassága 0·75 mm.

Termőhelye: *Cap Mottabulun*. Egyetlen, teljesen ivarérett nőténypéldány állott rendelkezésemre.

A genus eddig ismert fajai közül ez az új faj, melyet gyűjtője, ELPATIEWSKY J. W. nevére neveztem el, kagylóinak alakjával némileg az *Eucandona devexa* KAUFM. fajhoz hasonlít, de a kagylók szerkezetében mutatkozó különbségeken kívül elüt ettől vulvájának szerkezetével s e tekintetben az *Eucandona tuberculata* DAD. fajra emlékeztet.

9. *Eulais Elpatiewskyi* n. sp.

Teste kis mértékben tojásforma, hátul valamivel tompábban kerekített, mint elül, hossza 3 mm, legnagyobb átmérője 2·3 mm.

Bőre finoman vonalas és gyéren szemecskés. Színe ismeretlen, mert a spiritusban konzervált példány egészen színtelen volt.

A capitulum hossza a szájkorong elejétől mérve 0·47 mm; hátulsó szegélye gyengén íves, majdnem egyenes, egész fölülete szemecskésnek látszik, különösen a szájkorong körül. A szájkorong majdnem teljesen körforma, átmérője 0·36 mm, alatta a capitulum csak igen kis mértékben mélyedt. A légzacskók hátrafelé hajlítva nem haladják meg a garatot. A garat hátulsó vége egyszerűen kerekített, rajta gyűrű nincs.

A palpus maxillaris első íze a másodiknál kétszerre rövi-

debb, vége felé szélesedik. A második iz distalis vége felé feltűnő széles, kétszernél többel szélesebb, mint alapján, belső, illetőleg alsó csúcsa tompán kerekített, distalis szegélye mentén 7—8 sörte emelkedik a belső oldalon egy sorban, míg a külsőn csupán négy van. A harmadik iz kevéssel keskenyebb a másodiknál, de ugyanolyan alakú, belső, illetőleg hasoldali csúcsának belső oldalán sok apró sörte ül, míg külső oldalán sörtétlen, distalis szegélye közelében belül és kívül egy sorban 3—4 sörte emelkedik. A negyedik iz kétszer oly hosszú, mint a harmadik, distalis vége felé gyengén vékonyodik, külső oldalán a szegély mentén csupán 8—10, ellenben belső oldalán sok sörte emelkedik. Az ötödik iz a negyediknek felénél hosszabb, meglehetősen tömötten sörtés, végcsúcsán 4—5 tüskeforma fogacska emelkedik.

A lábak izei tömötten sörtések, a sörték valamennyien simák. Az egyes lábpárok hátrafelé fokozatosan hosszabbodnak. A negyedik lábpár csúcskarmának erős mellékkarma van.

Az egyes szemkeretek veseformák, csúcsaik csaknem egyformán kerekítettek; a mellső lencse kúp-, a hátulsó csolnakforma. Az egyes szemkeretek hossza 0.25 mm. A szemkereteket összekötő híd mellső szegélye kúpformán kiemelkedett, csúcsa kerekített, hátulsó szegélye mélyen és hegyesen bemetszett. A híd szélessége feltűnő nagy, a mennyiben a szemkeretek mellső csúcsától majdnem a hátulsoig terjed, hossza mintegy 0.08 mm, szélessége 0.2 mm. Az izmok tapadására szolgáló cuticula-megvastagodás körforma.

Termőhelye: *Chubtu-nor*.

Csupán egy példány állott rendelkezésemre. E fajt, mely a genus eddig ismert fajai közül legközelebb áll az *Eulais discreta* KOEN. s a RIBAGA C.-től rajzolt *Eulais protendens* BERL. fajhoz, gyűjtője, ELPATIEWSKY J. W. tiszteletére neveztem el.

10. *Hygrobates octoporus* n. sp.

Teste ellypsisforma, elül és hátul egyformán szélesen kerekített; hossza 1.8 mm, legnagyobb átmérője 1 mm.

A bőr puha, hajlékony, finoman vonalas.

Az epimerák a test mellső felét foglalják el. Az első epi-

merapár hátulsó felében egybeolvadt, hátulsó szegélye ívesen kerekített, két oldali zúga kicsúcsosodott. A második epimerapár mindkét fele különálló, megnyult ékforma s az első párnak hátulsó kiálló csúcsáig ér. A harmadik epimerapár mindkét fele szintén ékforma, mint a másodiké, de vastagabb, be- és hátrafelé irányul, hátulsó negyedében hosszú érző sörte emelkedik. A negyedik epimerapár valamennyi többinél nagyobb, mellső szegélye egyenes, a külső hullámos, a hátulsó és a belső ellenben íves, belső végén érző sörte emelkedik. Valamennyi epimera finoman szemecskés.

A palpus maxillaris második és harmadik ízének hasi oldalán a distalis kétharmad területen apró tüskék emelkednek, míg a hátoldal közepén és a distalis szegélyen egy-egy erős, sima tüske ül. A negyedik íz kevéssel rövidebb, mint az öt megelőző két íz együttvéve, hasoldali szegélyének közepén kis halmocskáról finom érző sörte emelkedik, distalis végén fölül és alul egyaránt két-két finom sörte ül. Az utolsó íz több finom sörtét visel és distalis végén három fogacskával fegyverzett.

A lábak hátrafelé fokozatosan hosszabbodnak, kevés evező sörtét viselnek, a fölületükön emelkedő, különböző hosszúságú tüskék és sörték valamennyien simák. A harmadik lábpár második ízének distalis szegélyén kívül levélforma, sörtékkel szegélyezett nyujtvány emelkedik. Mindenik láb finoman szemecskésnek látszik.

Az ivarnyílás két oldalán elkülönült lemezen két oldalt 4—4 ivarkorong ül, melyek közül egy a lemez mellső csúcsán, egy közepe táján és kettő hátulsó csúcsán helyezkedett el. Valamennyi ivarkorong tojásforma, a két mellső egyforma nagy, míg a két hátulsó közül az egyik kisebb, a másik pedig nagyobb a többinél. Az egyes lemezek külső szegélye mentén finom sörték emelkednek.

Termőhelye: *Kossogol*, a *Changa* folyó torkolatánál és a *Djeglik* folyó torkolata, a honnan összesen három példány állott rendelkezésemre.

E faj legfeltűnőbb jellemvonása az ivarkorongok száma, a melyre való tekintettel nyerte az *octoporus* nevet.

IV. A fajok földrajzi elterjedése.

A Mongolia mikrofaunájára vonatkozó eddigi irodalmi adatok, hozzá számítva a vizsgálataim során elért eredményeket is, távolról sem elegendők arra, hogy ezeknek alapján némi következtetést vonhassak Mongolia mikrofaunájának jellemére s illetőleg sajátosságaira, s ezért megelégszem és meg kell elégednem azzal, hogy a megfigyelt fajokat bizonyos irányelvek alapján megkülönböztetett csoportokba rendezzem s így némileg megkönnyítsem a későbbi és specialiter az egyes állatcsoportok zoogeographiai elterjedésének körvonalozásával foglalkozó bűvárok munkáját.

A vizsgálataim során megfigyelt 160 faj és néhány varietás elterjedés tekintetéből mindenekelőtt két nagy csoportba osztható, nevezetesen: 1. olyanokra, a melyek Ázsia más területeiről még eddig nem s csupán Mongoliából ismeretesek; 2. olyanokra, a melyek Mongolián kívül Ázsia más területeiről is ismeretesek. Ilyenforma csoportosítás mellett aztán a fajok következőleg oszlanak meg:

1. *Mongolián kívül Ázsia más területeiről még nem ismert fajok.*

Arcella mitrata EHRB.	Hydra viridis L.
Cyphoderia ampulla (EHRB.).	Monhystera similis BÜTSCH.
Lithaphydiophrys elegans HERTW. L.	Plectus tenuis BAST.
Glenodinium cinctum EHRB.	20 Diplogaster Elpatiewskyi n. sp.
3 Dinobryon sertularia EHRB.	Dorylaimus filiformis BAST.
" cylindricum IMH.	Chaetonotus polychaetus n. sp.
v. angulatum (SELIGO).	Philodina aculeata EHRB.
" cylindricum IMH.	Rotifer macrurus EHRB.
v. palustre LEMM.	25 " sp. ?
" stipitatum STEIN.	Floscularia sp. ?
" elongatum IMH.	Synchaeta tremula EHRB.
10 Lionotus folium (DUJ.).	Anuræa angulata n. sp.
Strombidium Claparedii S. K.	" clypeus n. sp.
Lagenophrys nassa STEIN.	30 Furcularia gibba EHRB.
Vaginicola decumbens EHRB.	Diglena grandis EHRB.
Cothurnia crystallina EHRB.	Anuræa acuminata EHRB.
15 Epistylis plicatilis EHRB.	" foliacea EHRB.
Vorticella nebulifera EHRB.	" labis GOSSE.

- | | | | |
|----|---|----|--|
| 35 | <i>Anuræa longispina</i> KELL. | 50 | <i>Eucandona Elpatiewskyi</i> n. sp. |
| | " <i>scapha</i> GOSSE. | | <i>Iliocypris gibba</i> (RAMD.). |
| | <i>Euchlanis triquetra</i> EHRB. | | <i>Limnocythere incisa</i> DAHL. |
| | <i>Cathypna diomis</i> GOSSE. | | <i>Canthocamptus northumbrius</i> v. |
| | <i>Colurus deflexus</i> EHRB. | | <i>coronatus</i> n. v. |
| 40 | <i>Lepadella acuminata</i> EHRB. | | <i>Eulais Elpatiewskyi</i> n. sp. |
| | <i>Brachionus rubens</i> EHRB. | 55 | <i>Hydrachna geographica</i> O. F. M. |
| | <i>Ophiocamptus mongolicus</i> n. sp. | | <i>Mideopsis orbicularis</i> (O. F. M.). |
| | <i>Alonella nana</i> (BAIRD). | | <i>Limnesia connata</i> KOEN. |
| | <i>Alona intermedia</i> SARS. | | " <i>histrionica</i> HERM. |
| 45 | <i>Macrothrix odontocephala</i> DAD. | | <i>Hygrobates octoporus</i> n. sp. |
| | <i>Bosmina Lilljeborgii</i> SARS. | 60 | <i>Pionopsis lutescens</i> (HERM.). |
| | <i>Ceriodaphnia rotunda</i> SARS. | | <i>Piona rotundata</i> KR. |
| | <i>Herpetocypris strigata</i> (O. F. M.). | | " <i>fuscata</i> (HERM.). |
| | <i>Eucandona tuberculata</i> n. sp. | | " <i>nodata</i> (O. F. M.). |

E jegyzék adatai szerint tehát a megfigyelt fajoknak egyharmadánál több az olyan, a mely Ázsia más területeiről még eddig nem ismeretes s így Ázsia faunájára is új; de egyúttal új Mongolia faunájára is.

2. Mongolián kívül Ázsia más területeiről is ismert fajok.

- | | | | |
|----|--|----|--------------------------------------|
| | <i>Arcella vulgaris</i> EHRB. | | <i>Hydra fusca</i> L. |
| | " <i>discoides</i> EHRB. | | <i>Trilobus gracilis</i> BAST. |
| | <i>Centropyxis aculeata</i> (EHRB.). | | <i>Philodina roseola</i> EHRB. |
| | <i>Diffugia corona</i> WALL. | 25 | <i>Rotifer vulgaris</i> EHRB. |
| 5 | " <i>constricta</i> EHRB. | | <i>Actinurus neptunius</i> EHRB. |
| | " <i>globulosa</i> EHRB. | | <i>Asplanchna Brightwelli</i> GOSSE. |
| | " <i>lobostoma</i> EHRB. | | <i>Melicerta ringens</i> EHRB. |
| | " <i>urceolata</i> EHRB. | | <i>Conochilus volvox</i> EHRB. |
| | " <i>pyriformis</i> PERTY. | 30 | <i>Synchaeta pectinata</i> EHRB. |
| 10 | <i>Euglypha alveolata</i> EHRB. | | <i>Plesoma sibirica</i> DAD. |
| | <i>Peridinium tabulatum</i> EHRB. | | <i>Fureularia forficula</i> EHRB. |
| | <i>Ceratium macroceros</i> SCHR. | | <i>Diglena catellina</i> EHRB. |
| | <i>Euglena deses</i> EHRB. | | <i>Mastigocerca carinata</i> EHRB. |
| | " <i>viridis</i> EHRB. | 35 | " <i>cornuta</i> EYF. |
| 15 | <i>Paramecium aurelia</i> EHRB. | | " <i>elongata</i> GOSSE. |
| | <i>Oxytricha pelliionella</i> EHRB. | | " <i>Rattus</i> (EHRB.). |
| | <i>Euplotes charon</i> EHRB. | | " <i>scipio</i> GOSSE. |
| | <i>Zoothamnium parasita</i> STEIN. | | <i>Rattulus tigris</i> EHRB. |
| | <i>Vorticella microstoma</i> EHRB. | 40 | <i>Anuræa aculeata</i> EHRB. |
| 20 | <i>Cothurniopsis imberbis</i> (EHRB.). | | " <i>cochlearis</i> GOSSE. |
| | <i>Tokophrya Cyclopum</i> (CL. et L.). | | <i>Dinocharis pocillum</i> EHRB. |

- Scaridium longicaudum* EHRB.
Salpina brevispina EHRB.
 45 " *spinigera* EHRB.
Euchlanis dilatata EHRB.
Cathypna luna EHRB.
Monostyla lunaris EHRB.
 " *quadridentata* EHRB.
 50 *Colurus bicuspidatus* EHRB.
 " *uncinatus* EHRB.
Metopidia lepadella EHRB.
Lepadella ovalis EHRB.
Pterodina ellyptica EHRB.
 55 " *patina* EHRB.
Triarthra longiseta EHRB.
Polyarthra platyptera EHRB.
Cyclops albidus (JUR.).
 " *fuscus* (JUR.).
 60 " *serrulatus* C. K.
 " *strenuus* FISCH.
 " *vicinus* ULJ.
Canthocamptus insignipes LILLJ.
Diaptonus acutilobatus SARS.
 65 " *incrassatus* SARS.
 " *lobatus* LILLJ.
 " *Zichyi* DAD.
Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alonella exigua (FISCH.),
 70 *Alona costata* SARS.
 " *affinis* LEYD.
 " *quadrangularis* (O.F.M.).
Alona guttata SARS.
 " *rectangula* SARS.
 75 *Leptorhynchus rostratus* (C. K.).
Acroperus harpæ BAIRD.
Eurycercus lamellatus (O. F. M.).
Bosmina obtusirostris SARS.
 " *longirostris* (O. F. M.).
 80 *Ceriodaphnia reticulata* (JUR.).
Scapholeberis mucronata (O.F.M.).
Simocephalus vetulus (O. F. M.).
Daphnia carinata KING.
 " *magna* STR.
 85 " *pulex* d. G.
 " *longispina* LEYD.
 " " *v. Leydigi* SARS.
 " " *v. rosea* SARS.
 " " *v. tenuitesta* SARS.
 90 " " *v. caudata* SARS.
 " " *v. jardi* BAIRD.
Eucypris incongruens (RAMD.).
Cypridopsis vidua (O. F. M.).
Cypria ophthalmica (JUR.).
 95 *Candona candida* (O. F. M.).
Eucandona rostrata (C. K.).
Iliocypris lacustris KAUFM.
Macrobiotus macronyx (DUJ.).
Lebertia taninsignita (LEB.).
 100 *Atax crassipes* (O. F. M.).
Piona conglobata C. K.

Mint e jegyzék adataiból kitűnik, a vizsgálataim során feljegyzett fajoknak nem egészen kétharmadát más ázsiai területekről is feljegyezték már.

Úgy az első csoportban, valamint a másodikban is találkozunk néhány oly faj, a mely bizonyos tekintetekből kiválóbb figyelmet érdemel; nevezetesen találunk köztük 1-ször: olyanokat, a melyek még eddig csupán Mongoliából ismeretesek és 2-szor: olyanokat, a melyeket már más bűvárok is feljegyezték Mongoliából, s ezek a következők:

1. Eddig még csak Mongoliából ismert fajok.

Diplogaster Elpatiewskyi n. sp.	Ophiocamptus mongolicus n. sp.
Chaetonotus polychaetus n. sp.	Eucandona tuberculata n. sp.
Anuræa angulata n. sp.	" Elpatiewskyi n. sp.
" clypeus n. sp.	Eulais Elpatiewskyi n. sp.
5 Canthocamptus northumbrius	10 Hygrobatas octoporus n. sp.
var. coronatus n. v.	

Az irodalomban azonban még találunk néhány olyan fajt, a mely még eddig szintén csupán Mongoliából ismeretes s a melyeket RICHARD J., DADAY E. v. és SARS G. O. írt le; ezek a következők:

Echinocotyle Linstowi DAD.	10 Simocephalus mixtus SARS.
" polyacantha DAD.	Daphnia longispina v. leucocephala SARS.
Drepanidotænia Rátzi DAD.	Cypris ovalis SARS.
" mesacantha DAD.	Limnocythere mongolica DAD.
5 Tænia Zichyi DAD.	Estheria propinqua SARS.
Diaptomus Chaffanjonii RICH.	15 Branchipodopsis affinis SARS.
Beckella orientalis SARS.	Leptestheria tenuis SARS.
Moina mongolica DAD.	
" macrocopa SARS.	

A két jegyzéknek adataiból kitűnik, hogy Mongolia faunájára ez idő szerint jellemző 26 faj ismeretes, a melyeket más területen eddig még senki sem talált meg.

2. Mongoliából más bűvároktól is feljegyzett fajok.

Zoothamnium parasita STEIN.	Scapholeberis mucronata (O.F.M.).
Tocophrya cyclopum (CL. et L.).	Simocephalus vetulus (O. F. M.).
Cyclops serrulatus C. K.	10 Daphnia carinata KING.
" strenuus FISCH.	" magna STR.
5 " vicinus ULJ.	" pulex d. G.
Diaptomus incrassatus SARS.	Eucypris incongruens (RAMDH.).
Chydorus sphaericus (O. F. M.).	Iliocypris lacustris KAUFM.

Tehát a vizsgálataim során megfigyelt 160 faj között elenyészően csekély azoknak a száma, a melyeket Mongoliából már megelőzőleg az említett három bűvár valamelyike feljegyzett.

Hogy teljes képet nyujtsak a Mongolia mikrofaunájára vo-

natkozó eddig ismert adatok felől, az alábbi jegyzékben összeállítottam azoknak a fajoknak a sorát, a melyeket Mongoliából DADAY E. v. és SARS G. O. feljegyeztek, de én vizsgálataim során nem találtam meg s ezek a következők:

Vortex truncatus OERST. (DAD.).	10 Simocephalus exspinosus C. K.
Brachionus Mülleri EHRB. (DAD.).	(SARS).
Diaptomus asiaticus ULJ. (DAD.).	Daphnopsis tibetana SARS (SARS).
« bacillifer KOELB. (SARS).	Daphnia pulex v. pulicaria SARS
5 « Wierzejskyi RICH. (SARS).	(SARS).
Hemidiaptomus Ignatovi SARS.	Cypris pubera (O. F. M.) (SARS).
(SARS).	Branchinecta orientalis SARS
Alona elegans SARS. (SARS).	(SARS).
Macrothrix hirsuticornis BR. NR.	15 Estheria Davidi SARS (SARS).
(SARS).	Apus granarius SARS (SARS).
Moina rectirostris (JUR.) (SARS).	

Ha az épen felsorolt fajokat hozzáadjuk a J. W. ELPATIEWSKY-től gyűjtött anyagban tölem megfigyeltékhez, úgy végeredményképen megállapíthatjuk, hogy Mongolia mikrofaunájából ez idő szerint 170 faj és varietás ismeretes, a melyek közül 30 korábbi gyűjtéseknek és vizsgálatoknak révén, míg 140 a J. W. ELPATIEWSKY gyűjtéseinek s az én vizsgálataimnak a során tűnt fel.

V. A Kossogol tóból feljegyzett fajok.

Abban a reményben, hogy nem végzek egészen fölösleges munkát, helyénvalónak láttam az alábbiakban a 270 km hosszú és 51 km széles, tehát megközelítőleg 14040 négyszög km területű Kossogol tónak tekintélyes mekkoraságú és épen ezért változatos természeti viszonyok között levő víztömegéből megfigyelt fajok névjegyzékét is külön összeállítani. És ezt annyival is inkább megokoltnak tartom, mert így némi képet alkothatunk a Kossogol tó mikrofaunájának gazdagsága és változatossága felől.

A fajok felsorolása folyamán alulról fölfelé haladó sorrendet követek:

I. PROTOZOA.

Class. *Sarcodina*.

- Arcella vulgaris EHRB.
 " discoides EHRB.
 Centropyxis aculeata (EHRB.).
 Diffugia corona WALL.
 5 " constricta EHRB.
 " globulosa EHRB.
 " pyriformis PERTY.
 " urceolata EHRB.
 Cyphoderia ampulla (EHRB.).
 10 Rhaphydiophyris elegans H. et L.

Class. *Mastigophora*.

- Glenodinium cinctum EHRB.
 Peridinium tabulatum EHRB.
 Ceratium macroceros SCHR.
 Dinobryon sertularia EHRB.

- 15 Dinobryon cylindricum IMH.
 v. angulatum (SEL.).
 " cylindricum IMH.
 v. palustre LEMM.
 " stipitatum STEIN.
 " elongatum IMH.
 Euglena viridis EHRB.

Class. *Infusoria*.

- 20 Lionotus folium (DUJ.).
 Strombidium Claparedii S. K.
 Euplotes Charon EHRB.
 Vaginicola decumbens EHRB.
 Epistylis plicatilis EHRB.
 25 Vorticella microstoma EHRB.
 Zoothamnium parasita STEIN.
 Tokophrya Cyclopum (CL. et L.).

II. COELENTERATA.

Class. *Hydroidea*.

- Hydra fusca L.
 " viridis L.

III. VERMES.

Class. *Nemathelminthes*.

- 30 Trilobus gracilis BAST.
 Plectus tenuis BAST.

Class. *Gastrotricha*.

- Chaetonotus polychætus n. sp.

Class. *Rotatoria*.

- Philodina aculeata EHRB.
 Rotifer vulgaris EHRB.
 35 " macrurus EHRB.
 Rotifer sp.?
 Conochilus volvox EHRB.
 Asplanchna Brightwelli GOSSE.
 Synchroneta pectinata EHRB.
 40 " tremula EHRB.

Plæsoma sibirica DAD.

- Anuræa aculeata EHRB.
 " angulata n. sp.
 " clypeus n. sp.
 45 " cochlearis GOSSE.
 " acuminata EHRB.
 " foliacea EHRB.
 " labis GOSSE.
 50 " striata (O. F. M.).
 Rattulus tigris (EHRB.).
 Diglena catellina EHRB.
 " grandis EHRB.
 Furcularia forficula EHRB.
 55 " gibba EHRB.
 Mastigocerca carinata EHRB.
 " cornuta EYF.

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| Mastigocerca elongata GOSSE. | Metopidia lepadella EHRR. |
| " Rattus EHRR. | Lepadella ovalis EHRR. |
| 60 " scipio GOSSE. | 70 Scaridium longicaudum EHRR. |
| Monostyla lunaris EHRR. | Dinocharis poecillum EHRR. |
| " quadridentata EHRR. | Colurus bicuspidatus EHRR. |
| Cathypna luna EHRR. | Euchlanis dilatata EHRR. |
| " diomis GOSSE. | Pterodina ellyptica EHRR. |
| 65 Salpina brevispina EHRR. | 75 " patina EHRR. |
| " spinigera EHRR. | Triarthra longiseta EHRR. |
| Metopidia acuminata EHRR. | Polyarthra platyptera EHRR. |

IV. ARTHROPODA.

1. *Copepoda*.

- Cyclops albidus (JUR.).
 " fuscus (JUR.).
 80 " serrulatus C. K.
 " strenuus FISCH.
 " vicinus ULJ.
 Canthocamptus northumbricus
 v. coronatus n. v.
 Ophiocamptus mongolicus n. sp.
 85 Diaptomus incrassatus SARS.
 " lobatus LILLJ.

2. *Cladocera*.

- Chydorus sphaericus (O. F. M.).
 Alonella nana (BAIRD).
 " exigua (FISCH.).
 90 Alona affinis LEYD.
 " costata SARS.
 " intermedia SARS.
 " rectangula SARS.
 Eurycerus lamellatus (O. F. M.).
 95 Macrothrix odontocephala DAD.
 Bosmina Lilljeborgii SARS.
 " obtusirostris SARS.
 Ceriodaphnia reticulata (JUR.).
 Simocephalus vetulus (O. F. M.).
 100 Daphnia magna STR.

- Daphnia longispina O. F. M.
 " longispina O. F. M.
 v. rosea SARS.
 " longispina O. F. M.
 v. Leydigi SARS.
 " longispina O. F. M.
 v. tenuitesta SARS.

3. *Ostracoda*.

- 105 Cypria ophthalmica (JUR.).
 Herpetocypris strigata (O. F. M.).
 Candona candida (O. F. M.).
 Eucandona Elpatiewskyi n. sp.
 " tuberculata n. sp.
 110 Iliocypris gibba (RAMD.).
 " lacustris KAUFM.

4. *Tardigrada*.

- Macrobiotus macronyx (DUJ.).

5. *Hydrachnidæ*.

- Hydrachna geographica (O.F.M.).
 Mideopsis orbicularis (O. F. M.).
 115 Lebertia tauinsignita (LEB.).
 Limnesia histriónica HERM.
 Hygrobatas octoporus n. sp.
 Atax crassipes (O. F. M.).

A jegyzékben feltüntetett 118 faj és köztük néhány varietás elég fényes tanubizonyyságot tesz a Kossogol tó mikrofaunájának gazdagságáról, de bizonyára még sem foglalja magában a fajok teljes összegét, s épen ezért tartózkodom ezen alkalommal az elméleti fejtegetésektől s még a más tavak mikrofaunájával való összehasonlítást is mellőzöm, mint olyant, a mely a további vizsgálatoknak s ezek eredményeinek a feladata. Egy pár megjegyzést azonban, a közölt névjegyzékre támaszkodva, mégis bátorodom tenni.

Általános jelleme a Kossogol tó mikrofaunájának az, hogy a míg egyfelől nagyon sok oly fajban bővelkedik, a melyek más nagy édesvizi tó planktonjában teljesen idegenek, a minők különösen a *Cladocerák* között találhatók, addig másfelől hiányoznak belőle oly fajok, a melyek más nagy tavak planktonjában állandó, hogy úgy mondjam jellemző állatkák, a minők például ugyancsak a *Cladocerák* közül a *Sididae*-családnak a képviselői, specialiter a *Diaphanosoma*-genus fajai, s a minő a *Leptodoridae*-családból a *Leptodora hyalina* LILLJ. is. De feltűnhetik az is, hogy daczára a Kossogol tó természeti fekvésének és jelentékeny mélységének, hiányzik belőle a *Bythotrephes*-genus is.

De szembeszökő jellemvonása a Kossogol tó mikrofaunájának az is, hogy a *Rotatoriák* osztályából az *Anuraea*-genusnak 9 faja ismeretes, a milyen fajszaot, a gení tó kivételével, más nagy tó planktonjából eddig még nem jegyeztek fel. Épen így jellemző a *Protozoák* közül a *Dinobryon*-genus fajgazdagsága is.

Végezetül talán nem tévedek tulságosan, ha a felsorolt fajok jegyzékére támaszkodva a Kossogol tó mikrofaunájára általános jellemző tény gyanánt mondom ki azt, hogy benne a partlakó s a planktonikus szervezetek karakteristikusan és tömegesen lépnek fel, míg a fenéklakók elenyésző számban mutatkoznak az aránylag nagy mélység ellenére is.

Ha a Kossogol tónak és a környékén levő különböző álló vizeknek, tócsáknak és kisebb tavaknak mikrofaunáját hasonlítjuk össze a fajok előfordulására való tekintettel, arra az eredményre jutunk, hogy a Kossogol tó mikrofaunájából aránylag kevés oly faj hiányzik, a mely a környékén fekvő vizekben tenyészik. Ezt eléggé igazolja az, hogy a megfigyelt 160 fajból

és varietasból a Kossogol tóban 118 tenyészik, tehát csupán 42 faj hiányzik belőle az összes számból. Ennek oka különben természetes körülményekben található meg, a mennyiben a termőhelyül szolgált összes vizek a Kossogol vízterületéhez tartoznak, ezzel majdnem valamennyien, különbözőképen ugyan, de összeköttetésben állanak.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1905 november 20.-án tartott üléséből.)

A GÁZOK ABSORPTIOCOEFFICIENSEINEK A HŐMÉRSÉKKEL VALÓ VÁLTOZÁSÁNAK TÖRVÉNY- SZERŰSÉGÉRŐL.

WINKLER LAJOS 1. tagtól.

Egyik régebbi dolgozatomban, melyet az osztályelnök úr volt szives a t. akadémiának 1891 október 19.-én bemutatni, arra az eredményre jutottam, hogy a hydrogen-, nitrogen-, szénmonoxyd-, nitrogenoxyd- és oxygen-gáz vízre vonatkozó absorptio-coefficiensei a hőmérsék emelkedésével azért kisebbednek, mert a víz belső surlódása a hőmérsék emelkedésével csökken. A kérdéses törvényszerűséget a következőképen formuláztam :

$$\frac{\beta - \beta_1}{\beta} = \frac{\mu - \mu_1}{\mu} \cdot \frac{\sqrt[3]{m}}{k}.$$

E képletben μ a víz belső surlódását egyik, μ_1 másik hőmérséken, β és β_1 a gáz absorptiocoefficienseit ugyane hőfokon, végül m a gáz molekulasúlyát jelenti.

Ez értekezésemben azt kívánom kimutatni, hogy e törvényszerűség valamennyi gáz absorptiocoefficienseinek változására érvényes, ha víz az oldószer és a gáz absorptiókor a HENRY-DALTON-féle törvénynek hódol.

E végből induljunk ki újból a *nitrogen-, szénmonoxyd-, nitrogenoxyd- és oxygen-gáz* absorptiocoefficienseiből : ¹

Abs. coeff.	N ₂	CO	NO	O ₂
0°-on	0.02348	0.03537	0.07381	0.04890
10 "	0.01857	0.02816	0.05709	0.03802
20 "	0.01542	0.02319	0.04706	0.03102
30 "	0.01340	0.01998	0.04004	0.02608
40 "	0.01183	0.01775	0.03507	0.02306
50 "	0.01087	0.01615	0.03152	0.02090
60 "	0.01022	0.01488	0.02954	0.01946

¹ Math. és termtud. értesítő IX. k. 253. és XIX. k. 52. l.

A víz belső surlódásaképen azokat az adatokat használjuk, melyek a LANDOLT és BÖRNSTEIN-féle tabellák II. kiadásának 288. lapján vannak felsorolva; ez adatok a következők:

Hőfok	A víz viszonylagos belső surlódása
0°	100.0
10°	73.3
20°	56.2
30°	44.9
40°	36.7
50°	31.5
60°	26.9

Számítsuk ki ez adatok alapján k értékeit:

$$k = \frac{\mu_0 - \mu_t}{\mu_0} \cdot \frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta_t} \cdot \sqrt[3]{m}.$$

A 0°-ra vonatkozó adatokból kiindulva és azután a 10, 20, 30, 40, 50 és 60°-ra vonatkozó adatokat külön-külön tekintetbe véve, k értékei ezek:

Hőmérsék-köz	N ₂ -ra vonatk.	CO-ra vonatk.	NO-ra von.	O ₂ -ra vonatk.
0°—10°	3.88	3.98	3.66	3.81
0°—20°	3.88	3.86	3.76	3.80
0°—30°	3.90	3.85	3.74	3.75
0°—40°	3.87	3.86	3.75	3.80
0°—50°	3.87	3.83	3.72	3.80
0°—60°	3.93	3.83	3.79	3.86

A négy gázra vonatkozó első három számadat középértéke 3.82.

Számítsuk ki ezután k értékeit a *methan-* és *aethan-gáz* absorptiocoefficiensei alapján.*

Abs. coefficiens	CH ₄	C ₂ H ₆
0°-on	0.05563	0.09874
10 "	0.04177	0.06561
20 "	0.03308	0.04724
30 "	0.02762	0.03624
40 "	0.02369	0.02915
50 "	0.02134	0.02459
60 "	0.01954	0.02177

* Math. és termtud. értesítő XIX. köt. 52. l.

k értékei a következők:

Hőmérsék-köz	CH_4 -ra vonatk.	C_2H_6 -ra vonatk.
$0^\circ-10^\circ$	2.70	2.47
$0^\circ-20^\circ$	2.72	2.61
$0^\circ-30^\circ$	2.76	2.71
$0^\circ-40^\circ$	2.78	2.79
$0^\circ-50^\circ$	2.80	2.83
$0^\circ-60^\circ$	2.84	2.91

Míg tehát k értékei a kísérleti hibák határain belül a N_2 , CO , NO és O_2 gázokra vonatkozólag állandóak, ha 0° -hoz akár közelebb, akár távolabb fekvő hőfokot is veszünk tekintetbe, addig k értékei a metanra vonatkozólag csekély mértékben, az æthanra vonatkozólag valamivel jelentékenyebben növekednek, a mi azzal magyarázható, hogy az előbb említett gázok ideális gázhoz közelebb állanak, mint utóbbiak. Mindamellett határozottan kitűnik, hogy míg k értéke a tekintetbe vett kétatomos gázokra vonatkozólag, ha a 0° -ból indulunk ki, 3.8 körül van, az az ötatomos metanra vonatkozólag az első három számadat középértéke alapján már csak 2.7-et, a nyolcztatomos æthanra vonatkozólag 2.6-et tesz ki, vagyis k értéke a gázmolekulákat alkotó atomok számától függ. Graphikus extrapolatio, illetőleg interpolatio útján az alábbi táblához jutunk, a melyben tehát megtaláljuk, hogy a különböző atomú gázokra vonatkozólag körülbelül mekkorának kell lennie a k értékének:

A molekulában foglalt atomok száma	k értéke 0° és 20° hőmérsék-közre vonatkozólag
1	4.5
2	3.8
3	3.2
4	2.9
5	2.7
6	2.7
7	2.6
8	2.6
9	2.6
10 vagy több atom	2.5

Annak a megvizsgálására térünk most át, hogy e tábla számadatai mennyire találók, ha k értékeit olyan gázok és gőzök

absorptioefficiensei alapján számítjuk ki, melyek e tábla szerkesztésénél nem voltak tekintetbe véve; a sorrendet, melyben az egyes gázokat szemügyre vesszük, a molekulákat alkotó atomok száma szabja meg.

Argon. Ez *egyatomos* gáz absorptioefficiensét vízre vonatkozólag RAMSAY 12° -on 0.0394-nek, 13.9° -on 0.0405-nek találta.¹ Az absorptioefficiensek értékeit azután nagyobb hőmérséki határok között T. ESTREICHER állapította meg;² e szerző adatai és az ezek alapján számított k értékek a következők:

Abs. coeff.		k értékei	
0° -on	0.05780	$0^{\circ}-10^{\circ}$	4.21
10 "	0.04525	$0^{\circ}-20^{\circ}$	4.35
20 "	0.03790	$0^{\circ}-30^{\circ}$	4.32
30 "	0.03256	$0^{\circ}-40^{\circ}$	4.29
40 "	0.02865	$0^{\circ}-50^{\circ}$	4.21
50 "	0.02567		

A három első adat középértéke $k=4.29$, tehát eléggé egyezik a táblában foglalt egyatomos gázokra vonatkozó, extrapolatio útján kapott értékkel [4.5].

Én is meghatároztam, és pedig még 1897-ben e gáz absorptioefficiensét,³ egyelőre azonban csak közelítő pontossággal, mert az alkalmazott argon nem volt elég tiszta, t. i. akkor még ismeretlen kísérőin kívül kevés nitrogen-gázt is tartalmazott (levegőre vonatkozó sűrűsége 1.378 volt). Az absorptioefficiensek és a belőlük számított k értékek ezek:

Abs. coeff.		k értékei	
0° -on	0.053		
10 "	0.042	$0^{\circ}-10^{\circ}$	4.4
20 "	0.035	$0^{\circ}-20^{\circ}$	4.4
30 "	0.030	$0^{\circ}-30^{\circ}$	4.3
40 "	0.027	$0^{\circ}-40^{\circ}$	4.4

Mint látható, az eredmény (4.4) csaknem éppen az, mintha ESTREICHER adatait vesszük a számítás alapjául.

¹ RAYLEIGH és RAMSAY, Argon, Phil. Trans. R. S. 186. A, 225.

² Zeitschrift f. phys. Chem. XXI. 176.

³ THAN. Kísérleti chemia I. köt. 854. l.

Helium. A helium-gáz absorptiocoeficiensét RAMSAY $18\cdot2^{\circ}$ -on $0\cdot0073$ -nak találta. T. ESTREICHER¹ azután különféle hőfokokon határozta meg e gáz vízre vonatkozó absorptiocoeficiensét; adatai a következők:

Abs. coeff.	
0° -on	0·01500
10 "	0·01442
20 "	0·01386
30 "	0·01382
40 "	0·01387
50 "	0·01404

E számadatok nem alkalmasok k értékének kiszámítására, mert nézetem szerint nem kellő pontosak. ESTREICHER kísérleteinél ugyanis a valóban absorbeált heliumgáz mennyisége rendkívül csekély volt: alig 1 cm, az absorptiometerben foglalt heliumgáz összes mennyisége pedig aránylag sok volt: körülbelül 18 cm. Ha már most meggondoljuk, hogy a nem absorbeált körülbelül 17 cm-nyi helium-gázt elég tág hőmérséki határok között ($0\cdot5$ — 50°) mérte, *a vízgőz tensiója pedig gázzal töltött térben mindig kisebb, mint a levegőüres térben,*² és ESTREICHER számításainál a vacuumra vonatkozó vízgőztensiót használta, úgy e körülmény a 17 cm-nyi gáznak 0° -ra való reduktiója alkalmával már könnyen 0·1 cm-nyi hibát okozhat, mely hiba azután az absorbeált gázmennyiségre (1 cm) vonatkoztatva 10%-nyira növekedik. Másrészt az absorptiocoeficienseknek a hőmérsékkel való változását kifejező görbe vonal lefutása nagyon valószínűtlen. Véleményem szerint az absorptiocoeficienseknek körülbelül 60° -ig csökkennie kellene és csak e hőmérséki fokon túl növekednie, nem pedig már 30° -on túl, amint azt ESTREICHER találta. Míg tehát az ESTREICHER-féle adatok megerősítést nem nyernek, azoknak helyességében kételkednem kell, annál is inkább, mert RAMSAY $18\cdot2^{\circ}$ -on csak felényi értéket kapott.

Ha a heliumgáz absorptiocoeficiensét 0° -on önkényesen

¹ loc. cit.

² Szerző kísérletei szerint az 1 atmosphæra nyomású gázzal töltött térben a vízgőz tensiója körülbelül 10%-kal kisebb, mint levegőüres térben.

1-nek tesszük, akkor e gáznak vízre vonatkozó absorptioefficiensei a levezetett törvényszerűség szerint más hőfokokon a következők volnának:

$$\beta_t = 1 - \frac{\mu_0 - \mu_t}{\mu_0} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{4.5}$$

A számításokat elvégezve a következő táblához jutunk:

Abs. coeff.

0°-on	1.000
10 "	0.906
20 "	0.845
30 "	0.806
40 "	0.777
50 "	0.758
60 "	0.742

Feltűnhetnék, hogy az argon-gáz absorptioefficienseit, melyeket ugyanazzal a készülékkel ugyanaz a bűvár határozott meg, egyelőre helyeseknek fogadjuk el és csak a heliumra vonatkozó adatokat kifogásoljuk. A viszonyok azonban az argon-gázra nézve kedvezőbbek, ugyanis az ESTREICHER mérései alkalmával tényleg absorbeált gázmennyiség néhányszorta több volt, továbbá a hőmérsék emelkedésével az absorptioefficiens csökkenése sokkal jelentékenyebb, mint a helium-gáznál, végül úgy RAMSAY, mint szerző mérései ESTREICHER adatainak helyességét ellenőrzik.

Hydrogengáz. E *kélatomos* gáz vízre vonatkozó absorptioefficiensét többek között TIMOFEEJEW¹ és szerző² határozták meg. TIMOFEEJEW adatai és az ezek alapján számított *k* értékek a következők:

Abs. coeff.

0°-on	0.02153	<i>k értékei</i>
10 "	0.01978	0°—10° 4.14
20 "	0.01837	0°—20° 3.76

Középértékben $k=3.95$, mely szám a táblában közölttel (3.8) elég jól egybevág.

¹ Zeitschrift f. phys. Chemie 6 p. 141. l. [1890].

² Math. és termtud. értesítő IX. k. 75. l.

Az én adataim és az ezek alapján számított k értékek a következők:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	0·02148		
10 "	0·01955	0°—10°	3·74
20 "	0·01819	0°—20°	3·60
30 "	0·01699	0°—30°	3·32
40 "	0·01644	0°—40°	3·40
50 "	0·01608	0°—50°	3·43
60 "	0·01600	0°—60°	3·61

A három első adat középértéke, $k=3·55$, kissé eltér a tábla adatától [3·8], de talán csak azért, mivel ez esetben a hőmérsék emelkedésével az absorptioefficientensek csak lassan csökkennek, tehát kis kísérleti hiba már lényegesen befolyásolja k értékét. TIMOFEEV és szerző kísérletei között ugyanis 10°-on és 20°-on alig 1%-nyi az eltérés, és a megfelelő k értékek mégis már számbavehetően különböznek.

Brom-gőz. Az absorptioefficientenseket szerző határozta meg.¹

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	60·5		
10 "	35·1	0°—10°	3·45
20 "	21·3	0°—20°	3·67
30 "	13·8	0°—30°	3·88
40 "	9·4	0°—40°	4·07
50 "	6·5	0°—50°	4·17
60 "	4·9	0°—60°	4·32

Tehát k értéke a hőmérsék-közök növekedésével szintén növekedik, a mi azzal magyarázható, hogy a brom-gőz ideális gáztól már jó messze áll.

Hydrogensulfid. E *háromatomos* gáz vízben való oldhatóságát SCHÖNFELD² és FAUSER GÉZA³ határozták meg. SCHÖNFELD adatai azonban kétségtelenül egészen hibások, míg FAUSER adatai, mint ellenőrző méréseim bizonyítják, a valósághoz közel állók. Meg kell azonban jegyezni, hogy FAUSER értekezésében,

¹ M. Ch. F. IV. k. 33. l.

² LIEBIG's Ann. 95. k. 1. l. (1855).

³ Math. és termtud. értesítő VI. k. 291. l.

mint az a számításokhoz használt képletből kitűnik, tulajdonképpen a hidrogensulfid vízben való «oldhatósága» van közölve és pedig szerző definitiójának megfelelően (Math. és termtud. értesítő VII. k. 331. l.). A FAUSER adatai alapján számított absorptio-coefficiensek, továbbá k értékei a következők:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	4·686		
10 "	3·520	0°—10°	3·48
20 "	2·672	0°—20°	3·30

Középértékben $k=3·39$; a tábla szerint 3·2.

A hidrogensulfid-gáz vízre vonatkozó absorptiocoefficiensét szerző is meghatározta; ez adatok és a belőlük számított k értékek a következők:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	4·621		
10 "	3·362	0°—10°	3·18
20 "	2·554	0°—20°	3·17
30 "	2·014	0°—30°	3·16
40 "	1·642	0°—40°	3·18
50 "	1·376	0°—50°	3·16
60 "	1·176	0°—60°	3·18

Szendioxyd. BUNSEN-HENRICH¹ e gáz vízre vonatkozó absorptiocoefficiensei alapján k értékei ezek:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	1·7326		
10 "	1·1893	0°—10°	3·00
20 "	0·8939	0°—20°	3·13

BOHR² adatai alapján k értékei a következők:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	1·713		
10 "	1·194	0°—10°	3·11
20 "	0·878	0°—20°	3·17
30 "	0·665	0°—30°	3·18
40 "	0·530	0°—40°	3·24
50 "	0·436	0°—50°	3·24
60 "	0·359	0°—60°	3·27

Középértékek 3·07 és 3·15; a tábla szerint 3·2.

¹ Zeitschrift f. phys. Chem. IX. (1892) 435. l.

² Wied. Annal. 68 (1899) 504. l.

Szénoxysulfid. E gáz vízben való «oldhatóságát» még 1873-ban ROHRBACH¹ határozta meg THAN tanár laboratóriumában. ROHRBACH adatai alapján e gáz absorptiocoefficiensei, továbbá k értékei a következőknek adódnak ki:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	1.46		
10 "	0.67	0°—10°	1.93
20 "	0.48	0°—20°	2.56

A k értékei tehát sehogysem egyeznek a tábla adataival (3.2). Hogy a ROHRBACH-féle adatokat ellenőrizsem, én is meghatároztam a carbonylsulfid absorptiocoefficiensét vízben. Ez adatok és a belőlük számított k értékek a következők:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	1.333		
10 "	0.835	0°—10°	2.80
20 "	0.561	0°—20°	2.96
30 "	0.403	0°—30°	3.09

Középértékben $k=2.95$, mely szám eléggé egybevág a tábla adataival. A levezetett törvényszerűség tehát az absorptiocoefficiensek relatív helyességének ellenőrzésére felhasználható.

Szendisulfid-gőz. Abban a dolgozatomban, a melyben a brom vízben való oldhatóságáról értekezem,² éppen ez elemi tettel végzett kísérleteim alapján azt következtetem, hogy az olyan folyadékok gőzének absorptiocoefficiensei, a mely folyadékoknak jelentékenyebb tensiójuk van, továbbá vízben korlátolt mennyiségben oldódnak, egyszerű módon kiszámíthatók, ha az illető folyadék vízben való oldhatóságát, továbbá tensióját vesszük figyelembe. Az absorptiocoefficienseket úgy kapjuk meg, ha keressük, mennyi oldódnék a víz térfogat-egységében az illető gőzből, ha tensiója 760 mm volna.

G. CHANCEL és PARMENTIER³ mérései szerint 1000 cm víz old:

0°-on	----	2.04 gr. szendisulfidot
10 "	----	1.94 " "
20 "	----	1.79 " "
30 "	----	1.55 " "

¹ Akadémiai értekezések 1873.

² loc. cit.

³ C. R. 99. 892. l. (1884) és 100. 773. l. (1885).

E kísérletek alapján a széndisulfid-gőz (1 mol 22·4 liter) absorptio-coefficiensei (tensio REGNAULT szerint), továbbá k értékei a következők:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	3·573		
10 "	2·189	0°—10°	2·92
20 "	1·346	0°—20°	2·98
30 "	0·799	0°—30°	3·01

A középérték: 2·97 eléggé megközelíti a tábla számát [3·2].

Dinitrogenoxyd. CARIUS-HENRICH ¹ szerint e gáz absorptio-coefficiensei és az ezek alapján számított k értékek a következők:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	1·3026		
10 "	0·9123	0°—10°	3·15
20 "	0·6661	0°—20°	3·16

WALTHER ROTH ² méréseinek eredményei ezek:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	1·3668		
20 "	0·9479	0°—10°	3·08
20 "	0·6654	0°—20°	3·01

A középértékek 3·16 és 3·05; a tábla szerint 3·2.

Acetylen. E *négyatomos* gáz absorptio-coefficiensét én is meghatároztam; az *ideiglenes* adatok és az ezek alapján számított k értékek a következők:

Abs. coeff.		k értékei	
0°-on	1·732		
10 "	1·309	0°—10°	3·26
20 "	1·032	0°—20°	3·21
30 "	0·842	0°—30°	3·17

A középérték: 3·21 keveset tér el a tábla számától [2·9].

Chloroform-gőz. Ez *ötatomos* gőz absorptio-coefficiensét G. CHANCEL és PARMENTIER ³ adataiból számíthatjuk ki (v. ö. széndisulfid-gőz). E buvárok szerint 1000 cem víz old:

¹ loc. cit.

² Zeitschrift f. phys. Chem. XXIV. k. 123. l.

³ loc. cit.

0°-on	9·87 gr. chloroformot
10 "	7·50 " "
20 "	6·95 " "
30 "	7·05 " "

Az én méréseim szerint a chloroform-gőz tensiója pedig :

0°-on	60·9 mm.
10 "	99·1 "
20 "	157·6 "
30 "	240·7 "

Ez adatok alapján számított értékek :

Abs. coeff.		<i>k értékei</i>	
0°-on	23·09		
10 "	10·78	0°—10°	2·47
20 "	6·28	0°—20°	2·96
30 "	4·17	0°—30°	3·31

A középérték 2·92; a tábla szerint 2·7.

Aethylen. E *hatatomos* gáz absorptiocioefficiensét én is meghatároztam; az *ideiglenes* adatok és az ezek alapján számított *k* értékek a következők :

Abs. coeff.		<i>k értékei</i>	
0°-on	0·226		
10 "	0·162	0°—10°	2·86
20 "	0·122	0°—20°	2·89
30 "	0·098	0°—30°	2·95

Középérték : 2·90; a tábla szerint 2·7.

Propylen. E *kilenczatomos* gáz absorptiocioefficiensai, melyeket THAN¹ tanár állapított meg, a következő eredményhez vezetnek :

Abs. coeff.		<i>k értékei</i>	
0°-on	0·4465		
10 "	0·2796	0°—10°	2·48
20 "	0·2205	0°—20°	3·01

A középérték 2·75; a tábla szerint 2·6.

¹ Termtud. Közlöny 2. 13. l. (1861).

Tehát, ha víz az oldószer — a heliumgáz kivételével — valamennyi tekintetbe vett gázra és gőzre vonatkozólag (18) a kérdéses törvényszerűséget érvényesnek találtuk.

Dolgozatom eredményét a következőkben foglalhatom össze: A már ismert képletet

$$\frac{\beta_0 - \beta_t}{\beta_0} = \frac{\mu_0 - \mu_t}{\mu_0} \cdot \frac{1}{k} m$$

így is írhatjuk

$$\beta_0 - \beta_t = \frac{\beta_0}{\mu_0} \cdot \frac{1}{k} m (\mu_0 - \mu_t),$$

vagy egyszerűsített alakban:

$$\beta_0 - \beta_t = C(\mu_0 - \mu_t).$$

Szavakba foglalva:

A gázok absorptiocoefficienseinek a hőmérsékkel való változása az oldószer belső surlódásának változásával arányos.

A következő táblában C arányossági tényező értékei vannak felsorolva azokra a gázokra nézve, melyeknek vízre vonatkozó absorptioefficienseit én állapítottam meg; az illető gáz absorptioefficiense, úgyisint a víz belső surlódása 0° -on önkényesen 1-nek van téve:

Hőmérsék-köz	H ₂	N ₂	CO	NO	O ₂	H ₂ S	COS	CH ₄	C ₂ H ₆
0—10 C°	0·337	0·783	0·764	0·848	0·833	1·020	1·40	0·93	1·26
0—20 „	0·350	0·784	0·786	0·827	0·834	1·021	1·32	0·93	1·19
0—30 „	0·379	0·779	0·790	0·830	0·844	1·024	1·27	0·91	1·15
0—40 „	0·371	0·784	0·787	0·829	0·835	1·018	—	0·91	1·11
0—50 „	0·367	0·784	0·793	0·836	0·836	1·025	—	0·90	1·10
0—60 „	0·349	0·773	0·793	0·821	0·824	1·020	—	0·89	1·07

A fentebb szavakba foglalt törvényszerűséget a vízre mint oldószerre vonatkozólag tapasztalati úton bebizonyítottanak tartom. Mennyiben érvényes e törvényszerűség, ha nem vizet, hanem más oldószert használunk, ezzel egy későbbi értekezésemben kívánok foglalkozni.

A SZÉNHYDROGÉNEK HALOIDSZÁRMAZÉKAINAK OLDÉKONYSÁGA VÍZBEN.

REX SÁNDOR-tól.

Bevezetés.

A vízben kevésbé oldható folyadékok — milyenek pl. a szénhidrogének haloidszármazékai stb. — különböző hőmérsé-
ken való oldékonyságára nézve az irodalomban alig találunk
adatot. Tudomásom szerint különböző hőmérséken csak CHANCEL
és PARMENTIER¹ határozták meg a chloroform, továbbá a szén-
diszulfid oldékonyságát vízben.

A szénhidrogének haloidszármazékai oldékonyságának meg-
határozásához azért fogtam, hogy egyrészt a fentebb említett
irodalmi hiányosságot pótoljam, másrészt és legfőképen azért,
hogy megvizsgáljam, vajon az absorptiocoeficienseknek a hő-
mérsékkel való változását kifejező törvényszerűségek a folyadé-
kok oldékonyságára nézve is érvényesek-e?

WINKLER ugyanis «*A bróm oldhatósága vízben*»² cz. dol-
gozatában bebizonyítja, hogy a folyós bróm vízben tulajdon-
képen oldhatlan és csak a gőze oldódik. E következtetést
általánosítja és valószínűvé teszi, hogy illó folyadékok oldása-
kor szintén absorptio-jelenséggel van dolgunk, azaz a folyadé-
kok absorptiocoeficienseiknek és tensióiknak megfelelően oldód-
nak egymásban.

A folyadékok tensiójának meghatározása.

Az absorptiocoeficiensek kiszámításakor szükségem volt a
kísérleti folyadékok tensiójának ismeretére. Ez az általam vizs-

¹ Compt. rendt. 99., 892; 1884.

“ “ 100., 773; 1885.

² M. chem. folyóirat IV. kötet 33—39. l.

gált legtöbb folyadékra vonatkozólag nem volt ismeretes és a mely folyadékokra nézve meg is volt határozva, azokat is újból meghatároztam, mivel nekem vízzel kevert folyadékok tensiójára volt szükségem, az irodalomban pedig víztől mentes folyadékok tensióját találjuk.

Szükségesnek találtam továbbá a már más szerzőktől meghatározott folyadékok tensiójának újból való meghatározását azért is, hogy ugyanannak a folyadéknak a tensióját mérjem, a mely folyadéknak az oldékonyságát meghatározom, hogy így a tisztítás ellenére esetleg a folyadékban maradt bármiféle szennyezés okozta hiba lehetőleg el legyen kerülve.

A tensio mérésére az 1. rajzon látható készüléket alkalmaztam.

A készülék két 900 mm. hosszú, 15 mm. belső átmérőjű barometer-csőből áll, melyek közül az egyik 60 cm. hosszúságban milliméter-osztályzattal van ellátva. Mindkét cső végére, *b*-nél, kisebb átmérőjű cső van excentrikusan forrasztva, hogy a higanynyal megtöltött csöveket könnyebb legyen egyik edényből a másikba áthelyezni.

A csövekre 7 cm. átmérőjű, kétszer átfúrt kausukdugót huztam, a melynek furatai egymáshoz lehető közel voltak. Magát a kísérletet a következőképen végeztem. Mindkét csövet megtöltöttem higanynyal, vigyázva, hogy levegő ne maradjon bennük. Az így megtöltött csöveket ferdén állítva, állványba fogtam, és pedig úgy, hogy a csövek nyitott végei higanyba merüljenek. Azután forralással levegőmentessé tett vizet és a szintén levegőmentes vizsgálandó folyadékot beledesztilláltam az osztályzattal ellátott csőbe; a másik csőbe pedig annyi levegőmentes vizet desztilláltam, hogy a két csőben levő folyadékoszlop nyomása egyenlő legyen.

A csöveket ezután áthelyeztem az 50 cm. magas, higanynyal megtöltött edénybe *a* és alkalmas fogóval függőlegesen megerősítettem. A hőmérsék szabályozhatósága végett a nagy gummidugóra körülbelül 70 cm. hosszú üvegcsővet erősítettem,



1. rajz.

melybe azután vizet töltöttem. E vízfürdőbe pontos hőmérő volt beleállítva. Miután a vízfürdő hőmérsékletét kellő hőfokra szabályoztam és 15—20 perczig vártam, hogy a csőben levő higany is felvegye a külső hőmérsékletet, a két csőben a higany-meniscusokat leolvastam. A nem osztályozott cső higany-meniscusát is a másik cső osztályzatán olvastam le, a mi a víztartó-edényen alkalmazott, fémből készült ellenzővel igen pontosan volt végezhető.

A két higany-meniscus különbsége 0° -ra redukálva adja az illető folyadék tensióját milliméterekben. A víztensiót természetesen itt nem kell számításba venni, mert mindkét csőben víz lévén, a tensiók egymást kiegyenlítik.

Minden hőfokon három észlelés történt, és pedig úgy, hogy a meniscusok állása minden észleléskor más legyen, a mit az α higanytartó emelésével, illetőleg sülyesztésével könnyen elértem. Minden észlelés előtt egyszersmind a csövekben levő folyadékokat az α higanytartó emelésével felnyomtam a csövek beforrasztott végéig, egyrészt, hogy a folyadékot az üveg falán végig kenve, a felület nagyobbításával a gőz telítettsége gyorsabban és biztosabban bekövetkezzék, másrészt, hogy meggyőződjem, vajjon levegő nem jutott-e a készülékbe. 0° -on víz helyett jéggel vettem körül a csöveket.

Olyan folyadékok tensiójának meghatározására, melyeknek forráspontja alacsony hőfokon van, tehát a tensiójuk 30° -on igen nagy, a milyen pl. az C_2H_5Br , $(CH_3)_2CHCl$, a leírt készüléket nem találtam alkalmasnak, miért is ezen esetekben más berendezésű készüléket alkalmaztam. Ez a készülék olyan U alakú cső, melynek két szára lehetőleg közel van egymáshoz. A cső egyik szára felül le van forrasztva. A le nem forrasztott szár milliméter-osztályzattal bír, körülbelül 10 cm.-rel hosszabb mint a másik és a készülék megerősítésére való. A higanynyal megtöltött csőbe bedesztilláltam a vizet és a vizsgálandó folyadékot, és beleállítottam egy vízfürdőbe, melynek a hőfokát pontosan 30° -on tartottam. Miután a készülék a vízfürdő hőmérsékét fölvette, a meniscusokat leolvastam, és pedig itt is mindkettőt a hosszabb csövön lévő skálán. A meniscusok állását higany pótlásával vagy kivételével tetszés szerint változtathat-

tam. A meniscusok észlelésével egyidejűleg leolvastam a barometer állását is. A 0° -ra redukált barometer-állásból levonva a leolvasott és 0° -ra redukált higanyoszlopot, valamint a hőfoknak megfelelő víztensiót, kapom az illető folyadéknak a tensióját.

A következő táblában közlöm a meghatározott folyadékok tensióját mm.-ekben. Minden adat 3 észlelés középértéke.

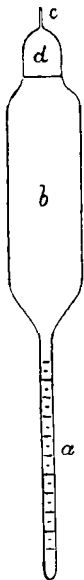
Készítmény neve	T e n s i o			
	0° -on	10° -on	20° -on	30° -on
Methylenchlorid	147.4 mm	229.7 mm	348.9 mm	511.4 mm
Chloroform	61.0 "	100.0 "	158.4 "	240.0 "
Tetrachlormethan	33.4 "	56.3 "	91.3 "	141.1 "
Methylenbromid	11.5 "	20.4 "	34.7 "	56.4 "
Methyljodid	141.2 "	220.2 "	331.4 "	483.4 "
Aethylenchlorid	20.6 "	36.6 "	61.0 "	97.4 "
Aethylidenchlorid	70.1 "	115.3 "	182.1 "	277.2 "
Aethylbromid	165.2 "	256.9 "	385.9 "	563.7 "
Aethyljodid	41.0 "	68.1 "	107.1 "	166.2 "
Propylchlorid	115.2 "	183.9 "	280.3 "	414.4 "
Isopropylchlorid	191.7 "	291.5 "	435.5 "	629.7 "
Propylbromid	41.6 "	68.9 "	110.8 "	170.6 "
Isopropylbromid	69.1 "	111.4 "	175.4 "	264.2 "
Propyljodid	11.7 "	19.6 "	35.1 "	54.8 "
Isopropyljodid	21.1 "	34.5 "	56.4 "	88.4 "
Szendisulfid	126.4 "	197.6 "	296.6 "	432.6 "

A folyadékok oldékonyságának meghatározására használt készülék leírása.

A kevésbé oldható folyadékok oldékonyságának meghatározásakor az oldott anyagnak chemiai úton való megmérése nagy nehézséggel jár és sok esetben szinte kivihetetlen. Olyan módszerre volt szükségem, melylyel bármilyen, víztől nem bomló, nehezen oldható folyadék oldékonyságát physikai úton meg

lehessen határozni, miért is dr. WINKLER LAJOS tanár tanácsára a következőkben leírt készülékeket használtam kísérleteimhez.

A meghatározás azon alapszik, hogy ismert térfogatú vízzel összeráztam ismert térfogatú kísérleti folyadékot és a víz telítése után meghatároztam a fel nem oldódott kísérleti folyadék térfogatát.



2. rajz.

A 2. rajzon látható készülék a víznél nagyobb fajsúlyú folyadékok oldékonyságának meghatározására való. A készülék alsó része, *a*, 100 mm. hosszú. milliméter-osztályzattal ellátott cső, melyet higanynyal pontosan ki kell köbözní; ez a kísérleti folyadék lemerésére való. E cső belső átmérőjét úgy választjuk meg, hogy az a vizsgálandó folyadék vízben való oldékonyságának megfelelő legyen. És pedig a közepes mennyiségben oldódó folyadékok számára körülbelül 5 mm. belső átmérőjű csövet (1 mm. körülbelül 0.02 cm^3) találtam alkalmasnak, a vízben jobban oldódó folyadékok vizsgálatához pedig körülbelül 7 mm. belső átmérőjű csövet (1 mm. körülbelül 0.05 cm^3) használtam. A rajzon *b*-vel jelzett, az oldó víz befogadására való edény térfogata pedig 150—200 cm^3 . Ez edény felső részén körkörös jel van, a mely jelig térfogatát adott hőmérséken vízzel való köbözéssel meghatározzuk. A rajzon *d*-vel jelölt részben levegő marad, hogy a kísérleti folyadéknak a vízzel való intensív összerázását lehetővé tegyük. A készülék ez üresen maradó részének térfogatát, legalább közelítő pontossággal, szintén meg kell állapítanunk.

A készülék *c* szűk csőben végződik, hogy megtöltés után azt leforrasztva, az edény zárása biztos legyen.

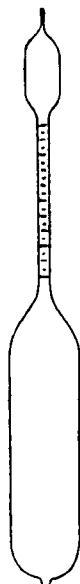
Egyes folyadékok, mint pl. a propyljodid, vízben oly kevésbé oldódnak, hogy a fentebbi méretű készüléket használva, csak 4—5 mm. oldódik belőlük, miáltal a legcsekélyebb észlelési hiba már nagyon befolyásolja a kísérlet eredményét. Az *a* cső szűkítése — mely egyik módja lett volna a leolvasás pontosabbá tételének — nem mutatkozott czélszerűnek, mert

az 5 mm.-nél szűkebb csövekből a folyadék kiöntése nehézséggel jár. Czélszerűbb a *b* edény térfogatát nagyobbítani úgy, hogy az az előbbinek körülbelül háromszorosa legyen.

A víznél kisebb fajsúlyú folyadékok oldékony-ságának meghatározására a 3. rajznak megfelelő készüléket használtam. Méreteiben a rendesen használt készülékkel megegyező, ez esetben azonban az *a* cső a víztartó edény fölé van helyezve.

A készülék megtöltése és a kísérlet elvégzése a következő módon történt. Először a készüléket a jelig megtöltöttem destillált vízzel. Az oldékony-ságára meghatározandó folyadék betöltésére a 4. rajzon látható készüléket használtam. A *b* higanytartó sülyesztésével az illető folyadékot a kapilláris csövön beszivattam az *a* edénybe. Midőn kellő mennyiségű folyadék volt benn, a csapot elzártam, ügyelve arra, hogy a kapilláris cső végig telve legyen folyadékkal. Most a kapillárist betoltam a vízzel telt absorptio-edénybe annyira, hogy a kapilláris hegye az osztályozott cső aljáig érjen. A higanytartó emelésével és a csap kinyitásával a kívánt folyadékmennyiséget betoltam az edénybe. Ha a folyadékot ily módon visszük az edénybe, az oly kis felületen érintkezik a vízzel, hogy számbavehető mennyiséget nem oldhat belőle. Miután a folyadék be volt töltve, a készüléket leforrasztottam. A leforrasztás után meghatároztam a betolt folyadék térfogatát mindazon hőfokokon, melyeken kísérletet végeztem, oly módon, hogy az *a* csövet megfelelő hőmérsékű vízbe, illetőleg olvadó jégbe tettem.

A víznél kisebb fajsúlyú folyadékok oldékony-ságának meghatározására való edénynél természetesen a folyadék-oszlopnak a különböző hőfokon való észlelésekor az egész edényt be kell állítani a megfelelő hőmérsékű vízbe és e folyadék-oszlopnak úgy a felső, mint alsó meniscusát észlelni kell.

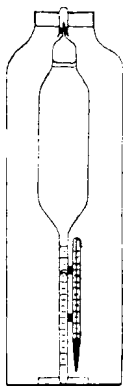


3. rajz.



4. rajz.

A térfogat észlelése után a készülékre rövid hőmérőt erősítettem és az egészet megfelelő nagyságú, erős falú és széles szájú edényben, mely kellő hőmérsékletű vízzel volt megtöltve, megerősítettem úgy, hogy az edény a hengernek hossz tengelyében álljon. (5. rajz.) Végül a henger dugóját gummilappal lekötöttem. Miután az absorptio-edényben levő folyadékok a külső víz hőmérsékét felvették, az osztályozott csőből a folyadékot kiöntöttem és a vízzel mindaddig ráztam, míg az az illető hőfokon telítve volt. A víz telítettségét az mutatta, hogy többszöri összerázás után a fel nem oldódott folyadékot az osztályozott



5. rajz.

csőben összegyűjtve, annak a térfogata többé észrevehetően nem változott. A folyadék-cseppek összegyűjtése az edény ütügetésével és a víznek az edényben levő levegőbuborékkal való kavargatásával könnyen és tökéletesen elvégezhető. Miután a fel nem oldódott folyadék tökéletesen összegyűlt, annak térfogatát a milliméter-osztályzaton leolvastam. Az észlelt térfogatot levonva az e hőfoknak megfelelő eredeti térfogatból, megkapjuk, hogy az illető hőfokon hány milliméternyi folyadék oldódik. Tudva, hogy 1 mm. hány cm^3 -nek felel meg, kiszámíthattam az oldott mennyiséget cm^3 -ekben, a fajsúly tekintetbe vételével pedig grammokban.

Hogy a d edényben gőz-állapotban maradó folyadéktól eredő hibát elkerüljem, ismerve a d edény térfogatát és a nyomást, a gőz súlyát kiszámíthattam és levontam az oldott mennyiségből. A víznél kisebb fajsúlyú folyadékok oldékonyságának meghatározására használt készüléknél ez a correctio elesik, mert a d edény előre telítve van a folyadék gőzével.

Minden folyadék oldékonyságát 0° , 10° , 20° és 30°C -on határoztam meg. A 0° -ú kísérletnél a hengerben lévő vizet fagyasztó keverékben megfagyasztottam.

Csupán azt kívánom még megjegyezni, hogy az absorbeáló edények tisztaságára nagy gondot kell fordítanunk, mert ha a legcsekélyebb tisztátalanság van jelen, a folyadék-cseppek az edény falához ragadnak és többé össze nem gyűjthetők. Tisztításra a kénsavas chromsav-oldat bizonyult legalkalmasabbnak.

A készítmények tisztítása.

A kísérLETEIMHEZ HASZNÁLT FOLYADÉKOK KAHLBAUM- vagy MERCK-féle legtisztább készítmények. Minden egyes készítmény gondosan volt fractionálva, fractionálás után előbb koncentrált kén-savval — ha az illető készítményt nem támadta meg —, azután destillált vízzel többszörösen rázogattam.

A vízzel való rázogatásnak célja egyrészt, hogy a vízzel közönséges hőfokon telített folyadék észrevehető vízmennyiséget nem old kísérlet közben és így az ebből származó esetleges hibák lehetőleg el legyenek kerülve. Különben, hogy a folyadékban oldódó víz ezen kísérleteknél észrevehető hibát nem okoz, annak bizonyítására a chloroform oldékonyságát meghatároztam vízzel előre nem telített és vizes chloroformmal, és mint az alább közölt adatokból látszik, az eredmények a kísérleti hibák határain belül megegyeznek.

A vízzel való rázogatásnak igen fontos előnye az, hogy az organikus folyadékok nagy részén, ha azokat hosszabb ideig vízzel rázzuk, vékony hártya képződik és e vékony hártya a folyadék-részek összeolvadását megakadályozza. Ha most már vízzel nem rázogadjuk a folyadékot a betöltés előtt, úgy ez a hártyaképződés az absorbeáló edényben történik és e miatt a folyadék nem állván össze, a fel nem oldódott rész térfogatát többé leolvasni nem lehetséges. Ha azonban vízzel még a betöltés előtt addig rázogadjuk a folyadékot, míg a hártyaképződés megtörtént, az többé nem akadályozza a kísérlet kivitelét.

KísérLETEIM EREDMÉNYÉT táblázatokba foglalva a következőkben közlöm.

Az «oldott mennyiség» cz. rovatban a kísérletnél tényleg feloldott mennyiséget közlöm köbcentiméterben és grammban. A cm^3 -ból grammra való átszámításhoz szükséges fajsúlyt számítás útján kaptam a 0° -ú fajsúlyból, ismerve a folyadékok térfogat-változását a hőmérsékkel. A 0° -ú fajsúlyt BEILSTEIN «Handbuch der organischen Chemie» cz. munkájából vettem.

Az absorptio-coefficientst közlöm grammban és köbcentiméterben kifejezve. A térfogat-egységben kifejezett absorptio-coefficientens látszólagos, tekintve, hogy a valóságban nem állít

hatjuk elő az illető folyadék 0°-ú és 760 mm. nyomású gőzét. Számítás útján a gr. abs.-coeff.-ből kaptam egyszerű aránylat-tal, feltéve, hogy a vegyület mol-nyi mennyisége gőzállapotban 22.42 normál liter.

Methylenchlorid CH_2Cl_2 .

KARLBAUM féle készítmény. Fp. 41 C°.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	147.4 mm.	156.0 cm. ³	2.676 cm. ³ = 3.687 gr.	23.63 gr.-ot	0.1219	32.15
10°	229.7 "	156.0 "	2.436 " = 3.308 "	21.21 "	0.0702	18.51
20°	348.9 "	156.3 "	2.328 " = 3.119 "	19.96 "	0.0435	11.47
30°	511.4 "	156.7 "	2.321 " = 3.071 "	19.60 "	0.0291	7.69

Chloroform $CHCl_3$ (száraz).

Fp. 61.7 C°.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	61.0 mm.	174.2 cm. ³	1.207 cm. ³ = 1.841 gr.	10.57 gr.-ot	0.1319	24.72
10°	100.0 "	174.2 "	1.042 " = 1.570 "	9.01 "	0.0693	12.98
20°	158.4 "	174.5 "	0.958 " = 1.425 "	8.17 "	0.0396	7.42
30°	240.0 "	174.9 "	0.931 " = 1.367 "	7.82 "	0.0249	4.67

Chloroform $CHCl_3$ (nedves).

Fp. 61.7 C°.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	61.0 mm.	174.2 cm. ³	1.213 cm. ³ = 1.851 gr.	10.62 gr.-ot	0.1325	24.92
10°	100.0 "	174.2 "	1.035 " = 1.560 "	8.95 "	0.0688	12.93
20°	158.4 "	174.5 "	0.961 " = 1.430 "	8.20 "	0.0397	7.47
30°	240.0 "	174.9 "	0.920 " = 1.352 "	7.73 "	0.0246	4.63

Tetrachlormethan CCl_4 .

KAHLBAUM-féle készítmény. Fp. 76·7 C°.

<i>t</i>	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	33·4 mm.	174·2 cm.	30·104 cm. ³ = 0·170 gr.	0·97 gr.-ot	0·0222	3·23
10°	56·3 "	174·2 "	0·090 " = 0·145 "	0·83 "	0·0113	1·64
20°	91·3 "	174·5 "	0·087 " = 0·139 "	0·80 "	0·0066	0·97
30°	141·1 "	174·9 "	0·095 " = 0·148 "	0·85 "	0·0046	0·67

Methylenbromid CH_2Br_2 .

MERCK-féle készítmény. Fp. 97·8 C°.

<i>t</i>	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	11·5 mm.	174·2 cm.	0·804 cm. ³ = 2·044 gr.	11·73 gr.-ot	0·7754	99·86
10°	20·4 "	174·2 "	0·794 " = 1·997 "	11·46 "	0·4270	54·99
20°	34·7 "	174·5 "	0·803 " = 1·999 "	11·46 "	0·2511	32·33
30°	56·4 "	174·9 "	0·831 " = 2·040 "	11·71 "	0·1577	20·31

Methyljodid CH_3J .

KAHLBAUM-féle készítmény. Fp. 42·8 C°.

<i>t</i>	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	141·2 mm.	174·2 cm.	1·168 cm. ³ = 2·728 gr.	15·65 gr.-ot	0·0843	13·31
10°	220·2 "	174·2 "	1·093 " = 2·520 "	14·46 "	0·0500	7·88
20°	331·4 "	174·5 "	1·085 " = 2·470 "	14·16 "	0·0325	5·13
30°	483·4 "	174·9 "	1·109 " = 2·489 "	14·23 "	0·0224	3·53

Aethylenchlorid $CH_2Cl \cdot CH_2Cl$.

KAHLBAUM-féle készítmény. Fp. 83·7—84·3 C°.

<i>t</i>	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	20·6 mm.	174·5 cm.	1·256 cm. ³ = 1·608 gr.	9·22 gr.-ot	0·3400	76·99
10°	36·6 "	174·2 "	1·216 " = 1·541 "	8·84 "	0·1835	41·56
20°	61·0 "	174·5 "	1·208 " = 1·514 "	8·68 "	0·1082	24·49
30°	97·4 "	174·9 "	1·271 " = 1·575 "	8·90 "	0·0695	15·72

Aethylidenchlorid $CH_3 \cdot CHCl_2$.KAHLBAUM-féle készítmény. Fp. $57^\circ C$.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	70·1 mm.	174·2 cm.	0·949 cm. ³ = 1·143 gr.	6·56 gr.-ot	0·0712	16·12
10°	115·3 "	174·2 "	0·872 " = 1·036 "	5·95 "	0·0392	8·88
20°	182·1 "	174·5 "	0·817 " = 0·958 "	5·49 "	0·0229	5·19
30°	277·2 "	174·9 "	0·813 " = 0·941 "	5·38 "	0·0148	3·34

Aethylbromid C_2H_5Br .MERCK-féle készítmény. Fp. $37·7^\circ C$.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	165·2 mm.	174·2 cm. ³	1·261 cm. ³ = 1·858 gr.	10·67 gr.-ot	0·0491	10·08
10°	256·9 "	174·2 "	1·157 " = 1·681 "	9·65 "	0·0286	5·87
20°	385·9 "	174·5 "	1·109 " = 1·591 "	9·12 "	0·0180	3·69
30°	563·7 "	174·9 "	1·102 " = 1·560 "	8·92 "	0·0120	2·47

Aethyljodid C_2H_5J .KAHLBAUM-féle készítmény. Fp. $72·3^\circ C$.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	41·0 mm.	174·2 cm. ³	0·388 cm. ³ = 0·767 gr.	4·41 gr.-ot	0·0817	11·73
10°	68·1 "	174·2 "	0·368 " = 0·721 "	4·14 "	0·0462	6·64
20°	107·1 "	174·5 "	0·363 " = 0·701 "	4·02 "	0·0285	4·10
30°	166·2 "	174·9 "	0·379 " = 0·723 "	4·13 "	0·0189	2·72

Propylchlorid $CH_3 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot Cl$.KAHLBAUM-féle készítmény. Fp. $46·2^\circ C$.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	115·2 mm.	165·3 cm. ³	0·679 cm. ³ = 0·622 gr.	3·76 gr.-ot	0·0248	7·08
10°	183·9 "	165·4 "	0·590 " = 0·533 "	3·23 "	0·0133	3·80
20°	280·3 "	165·6 "	0·503 " = 0·449 "	2·71 "	0·0073	2·10
30°	414·4 "	166·0 "	0·521 " = 0·458 "	2·76 "	0·0051	1·44

Isopropylechlorid $(CH_3)_2 \cdot CH \cdot Cl$.

KAHLBAUM-féle készítmény. Fp. 34·8 C°.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	191·7 mm.	165·3 cm. ³	0·822 cm. ³ =0·728 gr.	4·40 gr.-ot	0·0175	4·98
10°	291·5 "	165·4 "	0·686 " =0·598 "	3·62 "	0·0094	2·69
20°	435·5 "	165·6 "	0·586 " =0·503 "	3·04 "	0·0053	1·51
30°	629·7 "	166·0 "	0·595 " =0·504 "	3·03 "	0·0037	1·04

Propylbromid $CH_3 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot Br$.

KAHLBAUM-féle készítmény. Fp. 70·8 C°.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	41·6 mm.	174·5 cm. ³	0·375 cm. ³ =0·521 gr.	2·98 gr.-ot	0·0546	9·94
10°	68·9 "	174·5 "	0·334 " =0·458 "	2·63 "	0·0290	5·28
20°	110·8 "	174·8 "	0·316 " =0·429 "	2·45 "	0·0168	3·06
30°	170·6 "	175·2 "	0·321 " =0·430 "	2·46 "	0·0109	1·99

Isopropylbromid $(CH_3)_2 \cdot CH \cdot Br$.

KAHLBAUM-féle készítmény. Fp. 59 C°.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	69·1 mm.	174·5 cm. ³	0·537 cm. ³ =0·730 gr.	4·18 gr.-ot	0·0460	8·38
10°	111·4 "	174·5 "	0·476 " =0·637 "	3·65 "	0·0249	4·54
20°	175·4 "	174·8 "	0·419 " =0·554 "	3·17 "	0·0137	2·50
30°	264·2 "	175·2 "	0·427 " =0·555 "	3·17 "	0·0091	1·66

Propyljodid $CH_3 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot J$.

KAHLBAUM-féle készítmény. Fp. 100·6 C°.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	11·7 mm.	440·9 cm. ³	0·282 cm. ³ =0·502 gr.	1·14 gr.-ot	0·0740	9·76
10°	19·6 "	441·0 "	0·257 " =0·453 "	1·03 "	0·0399	5·25
20°	35·1 "	441·6 "	0·270 " =0·470 "	1·07 "	0·0231	3·04
30°	54·8 "	442·8 "	0·263 " =0·453 "	1·02 "	0·0142	1·87

Isopropyljodid $(CH_3)_2 \cdot CH \cdot J$.KHALBAUM-féle készítmény. Fp. $88.2^\circ C$.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	21.1 mm.	174.5 cm.	$0.167 \text{ cm.}^3 = 0.291 \text{ gr.}$	1.67 gr.-ot	0.0602	7.93
10°	34.5 "	174.5 "	$0.145 \text{ " } = 0.250 \text{ "}$	1.43 "	0.0315	4.15
20°	56.4 "	174.8 "	$0.143 \text{ " } = 0.244 \text{ "}$	1.40 "	0.0188	2.48
30°	88.4 "	175.2 "	$0.139 \text{ " } = 0.234 \text{ "}$	1.33 "	0.0115	1.51

Széndisulfid CS_2 .

KHALBAUM-féle készítmény. Tisztítás céljából előbb higany-
nyal rázva mindaddig, míg a higany többé nem feketedett meg.
Azután fémnatriummal állani hagytam egy napig és lefraction-
áltam. Fp. $46^\circ C$.

t	gőz-tensio	oldó víz	oldott mennyiség	1000 cm ³ víz old	Abs. coeff. gr.-ban kifejezve	Abs. coeff. cm ³ -ben kifejezve
0°	126.4 mm.	174.2 cm.	$0.349 \text{ cm.}^3 = 0.450 \text{ gr.}$	2.58 gr.-ot	0.0155	4.58
10°	197.6 "	174.2 "	$0.327 \text{ " } = 0.416 \text{ "}$	2.39 "	0.0092	2.71
20°	296.6 "	174.5 "	$0.278 \text{ " } = 0.350 \text{ "}$	2.01 "	0.0051	1.52
30°	432.6 "	174.9 "	$0.272 \text{ " } = 0.339 \text{ "}$	1.94 "	0.0034	1.00

A kényelmesebb használhatóság kedvéért a 100 gr. víz
által oldott folyadékmennyiséget gr.-ban kifejezve a következő
összeállításban közlöm.

Vegyület neve	100 gr. viz old			
	0 ^o -on	10 ^o -on	20 ^o -on	30 ^o -on
Methylenchlorid	2.363	2.122	2.000	1.969
Chloroform	1.062	0.895	0.822	0.776
Tetrachlormethan	0.097	0.083	0.080	0.085
Methylenbromid	1.173	1.146	1.148	1.176
Methyljodid	1.565	1.446	1.419	1.429
Aethylenchlorid	0.922	0.885	0.869	0.894
Aethylidenchlorid	0.656	0.595	0.550	0.540
Aethylbromid	1.067	0.965	0.914	0.896
Aethyljodid	0.441	0.414	0.403	0.415
Propylehlorid	0.376	0.323	0.272	0.277
Isopropylehlorid	0.440	0.362	0.305	0.304
Propylbromid	0.298	0.263	0.245	0.247
Isopropylbromid	0.418	0.365	0.318	0.318
Propyljodid	0.114	0.103	0.107	0.103
Isopropyljodid	0.167	0.143	0.140	0.134
Széndisulfid	0.258	0.239	0.201	0.195

A Winkler-féle absorptio-törvényszerűség alkalmazása.

WINKLER törvényszerű összefüggést állapított meg a gázok absorptio-coefficienseinek a hőmérsékkel való változása és a víz belső surlódásának változása között.

Első értekezésében ¹ csupán a kétatomos gázokra állapította meg az összefüggést, míg második értekezésében ² annak érvényességét az összes gázokra bebizonyította.

Az általa megállapított törvényszerűség röviden összefoglalva a következő:

A gázok absorptio-coefficienseinek a hőmérsékkel való változása és a víz belső surlódásának változása között fennálló összefüggést a következő képlet fejezi ki:

¹ Zeitschrift f. phys. Chem. IX. 171; (1892.) Berichtigung X. 144. (1892)

² Math. és Tern.-tud. Értesítő XXIV. köt. 78. l.

$$\frac{\beta_0 - \beta_t}{\beta_0} = \frac{\mu_0 - \mu_t}{\mu_0} \cdot \frac{\sqrt[3]{m}}{k}, \quad 1)$$

a mely képletben β_0 jelenti a gáz absorptio-coefficiensét 0° -on, β_t egy másik hőfokon, μ_0 jelenti a víz relativ belső surlódását 0° -on, μ_t egy másik hőfokon, m jelenti az illető gáz molekulasúlyát, k pedig egy arányossági tényező, melynek értéke, ha a képletben szereplő többi tényező ismeretes, a fentebbi képletből könnyen kiszámítható.

$$k = \frac{\mu_0 - \mu_t}{\mu_0} \cdot \frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta_t} \cdot \sqrt[3]{m}. \quad 2)$$

A k értékét WINKLER graphikus interpolációval 1—12 atomos gázokra nézve megállapította és azt találta, hogy annak értéke a molekula nagybodásával kisebbedik.

Az így kapott értékek a kísérleti úton talált értékekkel megegyeznek. Elterést csak azon gázoknál tapasztalt, melyek az ideális gázoktól távolabb állanak. Ugyanis, míg az ideális gázokhoz közel eső gázoknál — pl. O_2 , H_2S stb. — k értéke egyforma, ha a 0° -tól távolabb vagy közelebb eső hőfokot vesszük tekintetbe, addig az ideális gázoktól távolabb eső gázoknál a k értéke a hőmérsék emelkedésével kissé nő.

Kísérleti eredményeimből kiszámítva a fentebbi képlet alapján a k arányossági tényezőt, a kapott eredményeket az alábbi táblákban összefoglalva közlöm. A víz relativ belső surlódásának értékeiül a LANDOLT-BÖRNSTEIN «Physikalisch-Chemische Tabellen» cz. munkából vett következő adatokat használtam: ¹

$$0^\circ = 100.0, \quad 10^\circ = 73.3, \quad 20^\circ = 56.2, \quad 30^\circ = 44.9.$$

A táblában a szögletes zárójel \square közé helyezett számok a WINKLER meghatározta. részben még nem publikált absorptio-

¹ Az oldat belső surlódása helyett a tiszta oldószer belső surlódási adatainak használata csak a kevésbé oldható folyadékok esetében engedhető meg, mivel ezek a tiszta oldószer belső surlódását észrevehetően nem módosítják.

coefficiensekből vannak számítva és az összehasonlítás kedvéért vannak közölve. Az C_2H_5Cl oldékonysága nem lévén meghatározva, annak k értéke interpolatióval van kiszámítva a többi adatokból és megkülönböztetésül kerek () zárójel közé van helyezve.

Az egyes tabellák fölé irt k értékek WINKLERnek graphikus interpolatióval kapott értékeit jelentik.

Három-atomos vegyületek.

$$k = 3.2.$$

Vegyület neve	k értéke		
	0^0-10^0	0^0-20^0	0^0-30^0
Szendioxyd*	3.15	3.16	3.16
Szénoxysulfid	[2.80]	[2.96]	[3.09]
Szendisulfid	2.77	2.77	2.99

Öt-atomos vegyületek.

$$k = 2.7$$

Vegyület neve	k értéke		
	0^0-10^0	0^0-20^0	0^0-30^0
Methan	[2.70]	[2.72]	[2.76]
Methylchlorid	[2.75]	[2.91]	[3.01]
Methylenchlorid	2.77	3.00	3.18
Chloroform	2.74	3.08	3.33
Tetrachlormethan	2.91	3.35	3.72
Methylenbromid	3.32	3.62	3.86
Methyljodid	3.42	3.72	3.91

* BOHR adataiból számítva. Wied. Ann. 68. 504. 1899.

Nyolcz-atomos vegyületek.

$k = 2.6$

Vegyület neve	k értéke		
	0^0-10^0	0^0-20^0	0^0-30^0
Aethan	[2.49]	[2.61]	[2.70]
Aethylchlorid	(2.63)	(2.84)	(2.95)
Aethylenchlorid	2.68	2.97	3.20
Aethylidenchlorid	2.75	3.06	3.21
Aethylbromid	2.91	3.35	3.72
Aethyljodid	3.31	3.62	3.86

Tizenegy-atomos vegyületek.

$k = 2.5$

Vegyület neve	k értéke		
	0^0-10^0	0^0-20^0	0^0-30^0
Propan		[2.5]	—
Propylchlorid	2.48	2.66	2.96
Isopropylchlorid	2.49	2.70	2.99
Propylbromid	2.83	3.15	3.43
Isopropylbromid	2.90	3.11	3.42
Propyljodid	3.21	3.52	3.77
Isopropyljodid	3.10	3.53	3.77

A fenti tábla adataiból azt látjuk, hogy a haloid-származékok k értéke az egyforma atomszámú vegyületeknél fokozatosan nő. Az illető sorozat gázalakú tagjának k értékéhez legközelebb áll az utána következő chlor-származék k értéke és a molekulasúly nagyobbodásával ez az érték fokozatosan nő és a jod-származékoknál találjuk a legnagyobb értéket, míg a CO_2 kén-származékainál a k értékei kisebbednek.

Látjuk továbbá, hogy ugyanazon vegyületnél a k értéke a hőmérsék különbség nagyobbodásával nő, holott a törvény szerint állandónak kellene lenni. Azonban a k ezen növekedését

már WINKLER is tapasztalta a kevésbé tökéletes gázoknál és így az a folyadék-gőzöknél előre várható volt.

A gázok absorptio-coefficienseinek a hőmérsékkel való változását kifejező formulából következik, hogy az egyenlő molekulasúlyú és egyforma atomszámú gázok absorptio-coefficienseinek a hőmérsékkel való százalékos csökkenése egyenlő kell hogy legyen, a mint azt WINKLER* a N_2 -re és CO -ra kísérletileg is igazolta.

Az alább közölt táblákban egy pár ilyen absorptio szempontjából isomer gáz, valamint az általam meghatározott isomer folyadékok absorptio-coefficienseinek a hőmérsékkel való százalékos változása van feltüntetve.

<i>t</i>	Abs. coeff. csökkenése %-ban	
	N_2 Winkler ¹	CO Winkler ²
0°—10°	20·91 %	20·38 %
0°—20°	34·33 %	34·44 %
0°—30°	42·93 %	43·51 %
0°—40°	49·62 %	49·82 %
0°—50°	53·70 %	54·34 %
0°—60°	56·47 %	57·93 %
	CO_2 Bunsen-Henrich ³	N_2O Carius-Henrich ⁴
0°—10°	31·36 %	29·96 %
0°—20°	48·41 %	48·86 %
	CO_2 Bohr ⁵	N_2O Walther-Roth ⁶
0°—10°	30·30 %	30·65 %
0°—20°	48·75 %	51·32 %
	Aethylenchlorid	Aethylidenchlorid
0°—10°	46·03 %	44·92 %
0°—20°	68·18 %	67·80 %
0°—30°	79·57 %	79·28 %

* loc. cit.

¹ Math. és Termtud. Ért. IX. 253. l.

² Math. és Termtud. Ért. XIX. 52. l.

³ BUNSEN: Lieb. Ann. 93. 1. (1855). HENRICH: Z. phys. Chem. IX. 435. (1892.)

⁴ CARIUS: Lieb. Ann. 94. 129. (1855). HENRICH: Z. phys. Chem. IX. 435. (1892.)

⁵ Wied. Ann. 68. 504. (1899.)

⁶ Z. phys. Chem. XXIV. 123. (1897.)

<i>t</i>	Abs. coeff. csökkenése %-ban	
	<i>Propylchlorid</i>	<i>Isopropylchlorid</i>
0°—10°	46·28%	46·00%
0°—20°	70·40%	69·63%
0°—30°	79·62%	79·03%
	<i>Propylbromid</i>	<i>Isopropylbromid</i>
0°—10°	46·89%	45·86%
0°—20°	69·17%	70·16%
0°—30°	79·94%	80·20%
	<i>Propyljodid</i>	<i>Isopropyljodid</i>
0°—10°	46·15%	47·66%
0°—20°	68·84%	68·69%
0°—30°	80·87%	80·96%

A mint ez adatokból látszik, a kísérleti hibák határain belül az absorptio-coefficiensek csökkenései egyenlők; a miből következik, hogy a folyadékoknál ép úgy, mint a gázoknál: az egyenlő molekulasúlyú és atomszámú, vagyis absorptio szempontjából isomer vegyületek absorptio-coefficienseinek a hőmérsék emelkedésével való csökkenései egyenlők.

A végzett kísérletekből tehát azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a WINKLER által a gázok absorptio-coefficienseinek a hőmérsékkel való változására nézve megállapított törvényszerűségek a folyadékok vízben való oldásánál is érvényesek, a miből következik, hogy a *folyadékok oldásánál ép úgy absorptio-jelenséggel van dolgunk, mint a gázok vízben való oldásánál.*

*

Dolgozatomat a m. kir. tud. egyetem I. chemiai intézetében készítettem. Kedves kötelességem e helyen is hálás köszönetemet kifejezni dr. WINKLER LAJOS egyetemi tanár úrnak azon szíves és jóindulatú támogatásáért és tanácsaiért, melyekkel munkám elkészítését lehetővé tette.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1905 november 20.-án tartott ülésétől.)

TÖMEGPONT EGYENSÚLYA ELLENÁLLÓ KÖZEGBEN.

FEJÉR LIPÓT-tól.

Ismeretes, hogy valamely szabad tömegpont egyensúlyának stabilitására vagy labilitására a legtöbb esetben döntő a potenciálfüggvénynek az egyensúlyi helyzet környezetében való viselkedése.

1. A híres LAGRANGE-DIRICHLET-féle tétel szerint valamely egységnyi tömegű P tömegpontnak G egyensúlyi helyzete *stabilis*, ha az $U(x, y, z)$ potenciálfüggvénynek a G pontban «izolált» *maximuma* van.

Ha ekkor a G pont körül, mint középpont körül, két eleendő kicsiny, de különben tetszőleges R_1 és R_2 ($R_1 < R_2$) sugaru gömböt írunk, akkor a következőt állíthatjuk:

Ha a P tömegpont mozgása folyamán egyszer, valamely t_0 időpontban, a kisebbik, R_1 sugarú gömb belsejében van, akkor a tömegpont nemcsak minden *későbbi* időben *marad* a nagyobb, R_2 sugarú gömb belsejében, hanem minden *korábbi* időben is az R_2 sugarú gömb belsejében *volt* — föltéve, hogy a t_0 időpontban a sebessége kisebb, mint egy az R_1, R_2 sugaraktól függő mennyiség. Az izolált maximum esetében tehát stabilitás van a «jövőre» és «multra» vonatkozólag.

2. Hogy miképen áll a stabilitással illetőleg labilitással minden más esetben, ezzel KNESER, LIAPOUNOFF, HADAMARD, PAINLEVÉ, HAMEL, BOHL stb. foglalkoznak idevágó dolgozataikban. Vizsgálataik legegyszerűbb eredményeképen a LAGRANGE-DIRICHLET-féle stabilitási tétel mellé a következő labilitási tételt állíthatjuk:

Ha a potenciálfüggvénynek a G egyensúlyi helyzetben «izolált» *minimuma* van, és ha a potenciálfüggvénynek mini-

mális volta a TAYLOR-féle sor legalacsonyabb rendű tagjai révén jut felszínre, akkor az egyensúlyi helyzet labilis. Ha tehát G körül, mint középpont körül, elegendő kicsiny R sugárral gömböt írunk, akkor a szóban forgó esetben a következőt állíthatjuk:

Ha a P tömegpont akárhol is van az R sugarú gömb belsőjében, akkor adhatunk neki egy, *nagyságára* nézve *tetszőleges kicsiny* kezdősebességet úgy, hogy egy bizonyos későbbi t időpontban az R sugarú gömb felületét *átlépi*.

A következőkben két tételt közlünk, melyek a fől soroltaknak azon esetben felelnek meg, midőn a mozgás *ellenálló közegben* játszódik le.

Ellenállás esetén a mozgások az

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{\partial U}{\partial x} - f(v) \frac{x'}{v} \\y'' &= \frac{\partial U}{\partial y} - f(v) \frac{y'}{v} \\z'' &= \frac{\partial U}{\partial z} - f(v) \frac{z'}{v} \\v &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{1}$$

egyenletek szerint történnek. Ismeretes dolog, hogy ha az ellenálló közegben történő mozgás lefolyására, vagy, mi több, annak végelfolyására nézve keresünk előleges tájékoztatást, úgy ez az «ellenállás nélküli» mozgással való összehasonlítás révén nem igen nyerhető. Ennek oka abban rejlik, hogy az ellenállást képviselő

$$\left(-f(v) \frac{x'}{v}, -f(v) \frac{y'}{v}, -f(v) \frac{z'}{v}\right)$$

erő nem az ellenállás nélküli mozgás pillanatnyi sebességi vektorával, hanem éppen az ellenállásos mozgás pillanatnyi sebességi vektorával ellentett irányú — tehát oly sebességi iránynyal, mely, hogy úgy fejezzük ki magunkat, nem *explicite*, hanem az (1) egyenletek által *implicite* van megadva.

Ezen megjegyzés talán értéket ad a következő két tételnek.

1. Ha a potenciálfüggvénynek a G egyensúlyi helyzetben izolált maximuma van, akkor a jövőre nézve stabilitás van, míg a *multa* vonatkozólag labilitás is lehetséges.

Szorozzuk meg az (1) egyenleteket rendre x' , y' , z' -sal, adjuk őket össze és integráljunk a t_0 és t határok között. Akkor egy ismeretes

$$\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + \int_{t_0}^t f(v) v dt = U + h \quad (A)$$

egyenlethez jutunk, mely az elevenerő-egyenletnek felel meg. Ha most a P pont helyzetét egy a t_0 -nál nagyobb t időpontban figyeljük meg, akkor ezen újabb helyzet x , y , z koordinátáira nézve

$$U(x, y, z) + h > 0. \quad (2)$$

Ugyanis az (A) egyenlet baloldalának első tagja mindenestre pozitív (vagy 0). A második tagja azonban szintén, mert v az $x'^2 + y'^2 + z'^2$ pozitív négyzetgyöke, $f(v)$ pedig mint «ellenállási függvény» a következő tulajdonságokkal bír:

$$\begin{aligned} f(v) &= 0 & \text{ha} & \quad v = 0 \\ f(v) &> 0 & \text{ha} & \quad v > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

és

$$f(v)$$

a v -vel monoton nő.

A (2) alatti egyenlőtlenségből azonban a DIRICHLET-féle módon már arra lehet következtetni, hogy a jövőre nézve stabilitás van, hogy tehát a jelzett föltételek mellett, ha $t > t_0$, a tömegpont örökké az R_2 gömb belsejében marad.

Ha ellenben $t < t_0$, akkor az (A) egyenlet baloldalán föllépő integrál *negatív*. Ekkor tehát nem állíthatjuk, hogy $U + h > 0$. Hogy $t < t_0$ -ra nézve labilitás *tényleg* létrejöhet, ezt már a *közönseges csillapított rezgések* esete mutatja.

Különben az (A) egyenletből a mozgás természetére nézve, a mennyiben azt csak a t_0 -nál nagyobb t időre nézve kísérik figyelemmel, még más következtetést is vonhatunk. Mint hogy ugyanis $t > t_0$ -nál, a P pont állandóan az R_2 sugarú gömb belsejében marad, tehát kell, hogy az (A) egyenlet baloldalát képező

két (pozitív) tag mindegyike tetszőleges nagy t -nél is egy véges felső határ alatt maradjon. Ámde az $f(v)$ függvénynek (3) alatt adott tulajdonságainál fogva az

$$\int_0^t f(v) v dt$$

integrál csak úgy maradhat egy véges felső határ alatt, ha v végtelen sokszor tetszőleges kicsinyre lesz.

A közönséges csillapított rezgő mozgásnak ama ismert tulajdonsága, mely szerint annak sebessége tetszőleges sokszor tetszőleges kicsiny lesz, bármely potenciálra és tetszőleges ellenállási törvény mellett érvényes. Fölösleges megjegyeznünk, hogy az ellenállás nélküli esetben a tétel nem érvényes. Példa erre az

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

közönséges rezgés, a melynél a sebesség nagysága állandó.¹

II. Érdekesebb azonban azon eset vizsgálata, midőn a potenciálfüggvénynek az egyensúlyi helyzetben *izolált minimuma* van, mely tulajdonsága a potenciálfüggvénynek a TAYLOR-féle sor legalacsonyabb rendű tagjai által lesz nyilvánvalóvá.

Ha nincs ellenállás, akkor, mint említettük, az egyensúlyi helyzet labilis. Már most az ellenállás mechanikai hatását szem előtt tartva, már előre azt a heuristikus kijelentést tehetjük, hogy az ellenállás a labilitás esélyét *csökkenti*. Szigorúan ki lehet most már mutatni, hogy, ha

$$\frac{f(v)}{v}$$

a v kicsiny értékei mellett egy véges felső határnál, M-nél kisebb, akkor az egyensúlyi helyzet labilis. Ha tehát pl. $f(v)$ olyan erősen konvergál a zérushoz mint v^α , hol $\alpha \geq 1$ — a legtöbbször használatos esetek $\alpha = 1, 2$ ide tartoznak —, akkor az egyensúlyi

¹ Az I. alatti tételt már a kolozsvári Ferencz-József Tudományegyetemen tartott habilitációs előadásomban is tárgyaltam.

helyzet labilitása még biztosítva van. Ha azonban az $f(v)$ végtelen kicsinynyé válásának mértéke v^α , hol $0 < \alpha < 1$, vagyis, ha az ellenállás — összehasonlítva az $\alpha \geq 1$ esethez tartozó ellenállással — a v kicsiny értékei mellett *nagy*, akkor a labilitást a most közlendő módszer segítségével már nem tudom kimutatni. *Kénytelen vagyok nyíltan hagyni azt a kérdést, vajjon az ellenállás képes-e ezen esetben a labilitást teljesen megszüntetni?*

Legyen az egyensúlyi helyzet a koordinátarendszer kezdőpontjában. A labilitás kimutatására egész természetes lesz az

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

helyfüggvény időszerinti megváltozása után járni

$$(r^2)' = 2(xx' + yy' + zz')$$

és

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)'' = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + \frac{xx'' + yy'' + zz''}{2}.$$

Ha most x'' , y'' , z'' értékeit az (1) alatti egyenletrendszerből vesszük, akkor az

$$\begin{aligned} \left(\frac{r^2}{4}\right)'' &= \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + \frac{x}{2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{z}{2} \frac{\partial U}{\partial z} - \\ &\quad - \frac{f(v)}{v} \frac{xx' + yy' + zz'}{2} \end{aligned} \quad (B)$$

egyenletet nyerjük.

Minthogy

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{2} = \left(\frac{r^2}{4}\right)',$$

tehát, ha röviden

$$p = \frac{f(v)}{v}$$

$$q = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + \frac{x}{2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{z}{2} \frac{\partial U}{\partial z},$$

akkor

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)'' + p \left(\frac{r^2}{4}\right)' = q. \quad (4)$$

Legyen most már

$$U = U_{2n} + U_{2n+1} + \dots$$

az $U(x, y, z)$ TAYLOR-féle sorfejtése az $x=0, y=0, z=0$ hely környezetére. Itt U_{2n} a föltevés szerint egy $2n$ -edfokú, homogén és pozitív-definit alakot jelent. Tehát

$$q = -\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + nU_{2n} + \dots$$

A q ezen alakjából következik, hogy lehetséges az O kezdőpont körül, mint középpont körül egy R sugarú gömböt írni úgy, hogy q mindig pozitív értékű, ha a P pont a gömb belsejében vagy annak fölületén van. Egyetlen kivételt képez azon eset, midőn a tömegpont O -ban van és sebessége egyenlő zérussal. Most már a következőt állítjuk:

Ha a P tömegpont az időszámítás kezdetén P_0 -ban, az R sugarú gömb egy *tetszőleges* belső pontjában van, és ha a tömegpontnak az \vec{OP}_0 irányban *tetszőleges kicsiny sebességet* adunk, akkor a tömegpont véges idő leforgása után föltétlenül elhagyja az R sugarú gömb fölületét.

A (4) alatti egyenletből, ha azt mint $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ -ban lineáris, inhomogén, elsőrendű differenciálegyenletet fogjuk föl, következik, hogy

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)' = \frac{\int_0^t q e^{\int_0^t p dt}}{e^{\int_0^t p dt}} + \frac{\left(\frac{r^2}{4}\right)'_0}{e^{\int_0^t p dt}}. \quad (5)$$

Itt $\left(\frac{r^2}{4}\right)'_0$ jelenti az $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ értékét a $t=0$ kezdeti időpontban, tehát oly érték, mely a föltevés szerint, bár tetszőleges kicsiny, de mindenesetre *pozitív*.

Most már legelőször is azt állítjuk, hogy a tömegpont v sebessége (mely tehát $t=0$ mellett nem zérus) a tömegpontnak az R sugarú gömbben való tartózkodása alatt nem konvergálhat

a 0-hoz, a midőn t valamely \bar{t} értékhez konvergál. Az (5) alatti formula tehát minden t értékre nézve érvényes.

Ha ugyanis

$$\lim_{t=\bar{t}} v=0$$

volna, akkor, minthogy a föltevés szerint $\frac{f(v)}{v}$ a v kis értékei mellett egy véges felső határ alatt marad, az (5) egyenlet azon ellentmondáshoz vezet, hogy bal oldala a $\lim_{t=\bar{t}}$ határátmenetnél a zérushoz, míg jobb oldala ugyanazon határátmenetnél egy teljesen meghatározott pozitív értékhez konvergál.

Az (5) alatti formula tehát minden véges pozitív t mellett érvényes.

Az (5) alatti egyenletből rögtön adódik, hogy $(r^2)'$ mindig pozitív, hogy tehát a P tömegpont egyensúlyi helyzetétől *folyton távolodik*. De hogy egészen biztosan állíthassuk, hogy P az R sugarú gömb fölületét átlépi és nem talán csak hozzá aszimptotikusan közeledik, ki fogjuk mutatni, hogy a P pont az R sugarú gömb belsejében mozogván, $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ nemcsak pozitív, hanem minden időben egy pozitív alsó határ fölött marad.

$t=0$ mellett $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ a föltevés szerint pozitív. Véges t mellett, mint már említettük, az $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ mindig pozitív. Elég tehát ki-mutatnunk, hogy $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ a t nagy értékei mellett egy pozitív alsó határ fölött marad.

Először is világos, hogy P mindig az $\bar{O}P_0$ sugarú gömbön kívül mozog. De míg a pont az OP_0 és R sugarú gömbfelületek között mozog, azalatt q állandóan egy pozitív, ε -nal jelölendő, alsó határ fölött van. Ez q előbb részletezett alakjából következik.

Tehát

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)' > \varepsilon \int_0^t e^{\int_0^t p dt} dt,$$

és így csak azt kell még belátnunk, hogy a jobb oldalon álló hányados a *t nagy* értékei mellett egy pozitív alsó határ fölött marad. Vezessük be e végből a

$$\tau = e^{\int_0^t p dt}$$

mennyiséget mint új integrálási változót. Ezt tehetjük, mert *p* mindig pozitív lévén, τ az 1-től monoton nő, ha *t* a 0-tól $+\infty$ -ig monoton nő. Tehát

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)' > \varepsilon \frac{1}{\tau} \int_1^{\tau} \frac{d\tau}{p}.$$

De a tekintetbe jövő *v* értékek mellett (csak kis *v* értékek szerepelhetnek) a föltevés szerint a $p = \frac{f(v)}{v}$ hányados állandóan *M* felső határ alatt fekszik; tehát

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)' > \frac{\varepsilon}{M} \frac{\tau-1}{\tau} = \frac{\varepsilon}{M} \left(1 - \frac{1}{\tau}\right).$$

Most már, ha csak *t* nagyobb egy bizonyos *a* pozitív számnál, akkor τ mindenesetre nagyobb egy $1+a$ pozitív számnál, hol *a* pozitív.

De ezzel a labilitást már kimutattuk.

A közölt módszer a (B) egyenlet használatán alapszik. Ez a JACOBI dynamikájában szereplő egy egyenlet mintájára van szerkesztve.¹

Megemlítjük még, hogy módszerünk nem csak a most tárgyalt izolált minimum esetében használható; célhoz vezet azon esetekben is, melyeket az ellenállás tekintetbe vétele nélkül és más módszerekkel PAINLEVÉ tárgyalt.²

¹ Az elevenerő egyenlet és JACOBI-féle egyenlet centrális szerepet játszanak stabilitási és labilitási vizsgálatokban. L. a «Mathematikai és Physikai Lapok»-ban nemsokára megjelenő habilitációs előadásomat.

² Comptes-Rendus, T. 125. 1897, p. 1021.

A LINEÁR DIFFERENTIÁLRENDSZEREK ELMÉLETÉHEZ.

SCHLESINGER LAJOS lev. tagtól.

(Negyedik és befejező közlemény.)¹

VI.

Tegyük föl most megfordítva, hogy adva van egy $x=a$ -ban *canonicus* alakú differenciálrendszer, azaz oly rendszer, melynek coefficientensei $x=a$ -ban legfőlebb elsőrendű polussal bírnak :

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{P_{\lambda k}(x)}{x-a} y_{\lambda},$$

($k=1, 2, \dots, n$)

akkor azt akarjuk kimutatni, hogy e rendszer integráljai az $x=a$ pontban nem határozatlanok. E tétel bebizonyítását, FUCHS nyomán, az utolsó fejezet végén² említett szerzők akkép adják, hogy oly $x-a$ hatványai szerint haladó sorokat állítanak föl, a melyek a differenciálrendszert forma szerint kielégítik, és hogy azután e sorok convergentiáját az a pont bizonyos környezetében igazolják. Az itt közlendő bebizonyítás egészen közvetlen módon kimutatja, hogy a differenciálrendszer integráljai a következő tulajdonsággal bírnak: Legyen S az a terület, mely az a pontot magában foglalja és melyen belül a $P_{\lambda k}(x)$ függvények holomorphok, és fektessünk az a pontból egy l metszetet az S

¹ Lásd az első-harmadik közleményt ezen Értesítő XXII. és XXIII. kötetében; v. ö. a jelen értekezés végén olvasható irodalmi áttekintést.

² Értesítő XXIII, p. 154.

terület határvonala felé. Ha x egy tetszésszerű úton, a mely az l metszetet át nem lépi, az a pont felé tart, akkor a differentiálrendszer integráljai jól meghatározott véges vagy végtelen nagy határértékek felé közelednek, a melyek függetlenek az x útjától. E tulajdonság jellemzi épen az a pontot mint olyat, a melyben emez integrálok nem határozatlanok.¹ Más szóval: képzeljünk a körül mint centrum körül két kört rajzolva, melyeknek radiusai ε és η elegendő kicsinyek, $\eta < \varepsilon$, akkor valamely integrál értéke az ε radiusú kör valamely pontjában, kivonva belőle ugyanezen integrál értékét az η radiusú kör valamely pontjában, abszolút értékre nézve kisebbé tehető, mint egy tetszőleges kis mennyiség, az által, hogy az ε -t elegendő kicsinynek választjuk. Az integrál értékén itt természetesen azt az értéket értjük, mely az l metszettel szétmetszett S területen belül egyértékűleg van meghatározva.

A behatárolásnál követendő eljárás hasonló lesz ahhoz, melylyel kimutatni szokás,² hogy az

$$\int_a^x \frac{f(x) dx}{(x-a)^{1-\alpha}} \quad (a)$$

alakú integrál, a hol $f(x)$ az a pontban holomorph és $\alpha > 0$, határozott értékkel bír.

Képzeljük az a pontot a független változó átalakítása révén a zérópontba áthelyezve, akkor differentiálrendszerünket akkép írhatjuk, hogy

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n \left(\frac{A_{\lambda k}}{x} + \phi_{\lambda k} \right) y_\lambda,$$

hol az $A_{\lambda k}$ -k állandók, a $\phi_{\lambda k}$ -k pedig az $x=0$ pontnak S környezetében holomorphok. Legyen továbbá $(\gamma_{ik})^{-1}$ az a matrix, mely az (A_{ik}) -t canonicus alakjába transformálja; egyszerűség kedvéért föltételezzük, hogy az

¹ Lásd FUCHS: Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1885, p. 28 ; SCHLESINGER: Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen I (1895), p. 16, 17.

² V. ö. pld. JORDAN: Cours d'Analyse II (1894), p. 260.

$$A_{ik} - \delta_{ik} r_i = 0 \\ (i, k=1, 2, \dots, n)$$

egyenlet r_1, \dots, r_n gyökei egymástól mind különbözők, mely megszorítás, a mint az adandó bebizonyítás menetéből fölismerhető lesz, e bebizonyítás lényegét nem érinti. Ha azután a differenciálrendszerbe y_1, \dots, y_n helyébe a

$$\sum_{\lambda=1}^n y_\lambda \gamma_{\lambda k}$$

kat bevezetjük, akkor ez új mennyiségeket ismét y_1, \dots, y_n -nel jelölve és

$$(\gamma_{ik})^{-1} (\psi_{ik}) (\gamma_{ik}) = (\phi_{ik})$$

téve, a differenciálrendszer

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{r_k}{x} y_k + \sum_{\lambda=1}^n \phi_{\lambda k} y_\lambda \quad (1) \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

alakot ölti. Az által, hogy minden y_k -t x -nek elég magas pozitív egész kitevőjű hatványával megszorozzuk, mindig el lehet érni azt, hogy az r_1, \dots, r_n mennyiségek valós részei lényegesen pozitívak legyenek. Ezt tehát — az általánosság megszorítása nélkül — a priori föltehetjük. Vizsgáljuk már most az (1) rendszer megoldásait mindenek előtt egy a zéró pontban végződő sugar mentén, tegyük tehát

$$x = te^{i\theta}, \quad (i=\sqrt{-1}) \quad (2)$$

a hol t valós és pozitív változó mennyiséget, θ pedig állandó szöget képvisel, akkor

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{r_k}{t} y_k + \sum_{\lambda=1}^n \phi_{\lambda k} (te^{i\theta}) \cdot e^{i\theta} y_\lambda. \quad (3)$$

E rendszer valós független változóval bír, coefficientensei azonban e valós változó complex függvényei; könnyű belátni, hogy az ilyen rendszerekre az I. fejezet vizsgálatai¹ mutatis mutandis alkalmazhatók. Legyen

¹ Ezen Értesítő XXII, p. 487. s. köv.

$$x_0 = t_0 e^{\theta i}, \quad x_1 = \varepsilon e^{\theta i}$$

a sugárnak két S -en belül levő pontja, $\varepsilon < t_0$, és határozzuk meg a (3) rendszer azon integrárendszerét y_1, \dots, y_n , mely x_0 -ban az $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ kezdőértékekkel bír, az x_1 pontban. Akkor az I. fejezet értelmében¹ a következő algorithmust kell megalkotni:

$$y_k^{(v)} = y_k^{(v-1)} + (t_v - t_{v-1}) \frac{r_k}{\tau_{v-1}} y_k^{(v-1)} + \\ + (t_v - t_{v-1}) \sum_{\lambda=1}^n \Phi_{\lambda k}(\tau_{v-1} e^{\theta i}) e^{\theta i} y_{\lambda}^{(v-1)}, \\ (v=1, 2, \dots, m)$$

a hol

$$t_0 > t_1 > \dots > t_m = \varepsilon, \quad t_{v-1} \geq \tau_{v-1} > t_v.$$

Az abszolút értékeket véve nyerjük:

$$|y_k^{(v)}| < |y_k^{(v-1)}| \left| 1 + (t_v - t_{v-1}) \frac{r_k}{\tau_{v-1}} \right| + |t_v - t_{v-1}| g \sum_{\lambda=1}^n |y_{\lambda}^{(v-1)}|,$$

ha g -vel a $\Phi_{\lambda k}(x)$ függvények abszolút értékeinek felső határát jelöljük az S területen belül.

Ha k -ra nézve 1-től n -ig összegezzünk, lesz:

$$\sum_{k=1}^n |y_k^{(v)}| < \sum_{k=1}^n |y_k^{(v-1)}| \left\{ 1 + (t_v - t_{v-1}) \frac{r_k}{\tau_{v-1}} \right\} + (t_{v-1} - t_v) n g. \quad (4)$$

Legyen

$$r_k = \rho_k + \sigma_k i,$$

akkor

$$\left| 1 + (t_v - t_{v-1}) \frac{r_k}{\tau_{v-1}} \right| = \left\{ 1 - \frac{t_{v-1} - t_v}{\tau_{v-1}} 2\rho_k + \left(\frac{t_{v-1} - t_v}{\tau_{v-1}} \right)^2 (\rho_k^2 + \sigma_k^2) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

és ha $\bar{\rho}$ egy pozitív mennyiség, mely az ρ_1, \dots, ρ_n -eknél nem nagyobb, r pedig egy pozitív mennyiség, mely az r_1, \dots, r_n -eknél nem kisebb, lesz:

$$\left| 1 + (t_v - t_{v-1}) \frac{r_k}{\tau_{v-1}} \right| < \left\{ 1 - \frac{t_{v-1} - t_v}{\tau_{v-1}} 2\rho + \left(\frac{t_{v-1} - t_v}{\tau_{v-1}} \right)^2 r^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Tegyük egy pillanatra

¹ Az i. h. p. 488.

$$1 - \frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} 2\bar{\rho} + \left(\frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} \right)^2 r^2 = a,$$

$$(t_{v-1}-t_v) ng = \beta,$$

akkor

$$\left| 1 + (t_v - t_{v-1}) \frac{r_k}{\tau_{v-1}} \right| + (t_{v-1} - t_v) ng < a^{\frac{1}{2}} + \beta,$$

$$< (a + \beta^2 + 2a^{\frac{1}{2}}\beta)^{\frac{1}{2}}.$$

De nyilvánvaló, hogy

$$a < \left(1 + \frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} r \right)^2,$$

tehát

$$\left| 1 + (t_v - t_{v-1}) \frac{r_k}{\tau_{v-1}} \right| + (t_{v-1} - t_v) ng <$$

$$< \left\{ a + \beta^2 + 2\beta \left(1 + \frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} r \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$< \left\{ 1 - 2 \frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} (\rho - ng\tau_{v-1}) + \left(\frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} \right)^2 (r + ng\tau_{v-1})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Válaszszuk most az x_0 -t olyannak, hogy

$$\rho = \bar{\rho} - ng t_0 > 0$$

legyen, akkor $\tau_{v-1} < t_0$ lévén, lesz

$$\left| 1 + (t_v - t_{v-1}) \frac{r_k}{\tau_{v-1}} \right| + (t_{v-1} - t_v) ng <$$

$$< \left\{ 1 - 2 \frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} \rho + \left(\frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} \right)^2 (r + ng t_0)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

tehát ha

$$(r + ng t_0)^2 - \rho^2 = \sigma^2$$

(a baloldalon álló mennyiség természetesen pozitív) lesz végre

$$\left| 1 + (t_v - t_{v-1}) \frac{r_k}{\tau_{v-1}} \right| + (t_{v-1} - t_v) ng < \left| 1 - \frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} (\rho + \sigma i) \right|.$$

A (4) szerint kapjuk tehát, hogy

$$\sum_{k=1}^n |y_k^{(v)}| < \sum_{k=1}^n |y_k^{(v-1)}| \left| 1 - \frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} (\rho + \sigma i) \right|,$$

és így

$$\sum_{k=1}^n |y_k^{(m)}| < \sum_{k=1}^n |y_k^{(0)}| \prod_{v=1}^m \left| 1 - \frac{t_{v-1}-t_v}{\tau_{v-1}} (\rho + \sigma i) \right|,$$

majd pedig m -re nézve áttérve a limeshez

$$\sum_{k=1}^n |y_k(x_1)| < \sum_{k=1}^n |y_k^{(0)}| \lim_m \prod_{v=1}^m \left(1 - \frac{t_{v-1} - t_v}{\tau_{v-1}} (\rho + \sigma i) \right). \quad (5)$$

A jobb oldalon szereplő limes igen egyszerű módon meghatározható. Tekintsük ugyanis a

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\rho + \sigma i}{t} \eta \quad (6)$$

differentiálegyenletet, akkor ennek amaz η integrálja, mely t_0 -ban $\eta^{(0)} = 1$ -re reducálódik, az ε pontban

$$\eta^{(v)} = \eta^{(v-1)} + (t_v - t_{v-1}) \frac{\rho + \sigma i}{\tau_{v-1}} \eta^{(v-1)}$$

($v = 1, 2, \dots, m$)

algorithmussal lesz meghatározva, úgy hogy

$$\eta(\varepsilon) = \lim_m \eta^{(m)} = \lim_m \prod_{v=1}^m \left(1 - \frac{t_{v-1} - t_v}{\tau_{v-1}} (\rho + \sigma i) \right),$$

azaz

$$\left(\frac{\varepsilon}{t_0} \right)^{\rho + \sigma i} = \lim_m \prod_{v=1}^m \left(1 - \frac{t_{v-1} - t_v}{\tau_{v-1}} (\rho + \sigma i) \right). \quad (7)$$

Nyerjük tehát az (5)-ből, hogy

$$\sum_{k=1}^n |y_k(x_1)| < \sum_{k=1}^n |y_k^{(0)}| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{t_0} \right)^{\rho}, \quad (8)$$

a miből egyszersmind az is következik, hogy az y_k -k, ha x egy a zérópontban végződő sugár mentén a zéró felé tart, egyenletesen a zéró felé közelednek. Talán nem fölösleges megjegyezni, hogy ezt az eredményt directe is, azaz a (6) differentiálegyenlet integrálása nélkül, lehet származtatni, ha a t_1, \dots, t_m osztási pontokat és a $\tau_0, \dots, \tau_{m-1}$ közbeeső értékeket speciális módon megválasztjuk, azaz, ha hasonló módon járunk el, mint FARKAS barátom¹ az (α) -féle integrálok convergentiájának bizonyításá-

¹ Lásd FARKAS GY.: Vector-tan és az egyszerű inæquatiók tana, Kolozsvár (évszám nélkül), p. 55. s köv.

nál. Helyezzük t. i. mindjárt az ε , illetőleg az x_1 pontot a zéróba, és osszuk a t_0 -tól 0-ig terjedő integratio-intervallumot m egyenlő részre, úgy hogy

$$t_{\nu-1} - t_{\nu} = \frac{t_0}{m},$$

a $\tau_{\nu-1}$ közbeeső értékeket pedig helyezzük a $t_{\nu-1}$ -be; akkor

$$\begin{aligned}\tau_{\nu-1} = t_{\nu-1} &= \frac{m-\nu+1}{m} t_0, \\ \frac{t_{\nu} - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}} &= -\frac{1}{m-\nu+1},\end{aligned}$$

lesz tehát

$$\begin{aligned}\prod_{\nu=1}^m \left(1 + \frac{t_{\nu} - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}} (\rho + \sigma i) \right) &= \prod_{\nu=1}^m \left(1 - \frac{\rho + \sigma i}{m - \nu + 1} \right) = \\ &= \prod_{\nu=1}^m \left(1 - \frac{\rho + \sigma i}{\nu} \right), \\ \lim_m \prod_{\nu=1}^m \left(1 - \frac{t_{\nu} - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}} (\rho + \sigma i) \right) &= \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho + \sigma i}{\nu} \right),\end{aligned}$$

az utóbbi *végtelen szorzatról* pedig ismeretes, hogy pozitív ρ esetén a zéró felé divergál.

Legyen most $x_2 = \eta e^{\sigma i}$, hol $\eta < \varepsilon$, akkor a (7) szerint

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |y_k(x_2)| &< \sum_{k=1}^n |y_k^{(0)}| \cdot \left(\frac{\eta}{t_0} \right)^{\rho}, \\ \sum_{k=1}^n |y_k(x_1)| &< \sum_{k=1}^n |y_k^{(0)}| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{t_0} \right)^{\rho},\end{aligned}$$

azaz

$$\sum_{k=1}^n |y_k(x_2) - y_k(x_1)| < 2 \sum_{k=1}^n |y_k^{(0)}| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{t_0} \right)^{\rho},$$

és így az *ugyanazon a sugaron fekvő* x_1, x_2 pontokra áll, hogy $|y_k(x_2) - y_k(x_1)|$ a sugár irányától és az η -tól független módon kisebbé tehető, mint egy tetszőleges kis mennyiség, az által, hogy az ε -t elegendő kicsinynek választjuk. Most még ki kell mutatni, hogy ugyanaz áll akkor is, ha x_1 helyébe oly

$x_3 = \varepsilon e^{\theta' i}$ pont lép, mely nem fekszik ugyanazon a sugáron mint x_2 , melyre nézve tehát $\theta' \neq \theta$.

Irjuk föl, hogy

$$|y_k(x_2) - y_k(x_3)| < |y_k(x_2) - y_k(x_1)| + |y_k(x_3) - y_k(x_1)|,$$

és tegyünk a jobb oldalon szereplő második különbség meghatározása céljából

$$x = \varepsilon e^{\varphi i}.$$

Az (1) differenciálrendszer akkor

$$\frac{dy_k}{d\varphi} = \sum_{\lambda=1}^n (r_k \delta_{\lambda k} + i \varepsilon e^{\varphi i} \phi_{\lambda k}) y_{\lambda}$$

alakot ölt, független változója ismét valós, coefficientensei pedig e valós változónak egyértékű véges és folytonos függvényei. Amaz integrálrendszer y_1, \dots, y_n , mely $\varphi = \theta$ -ban $y_1(x_1), \dots, y_n(x_1)$ kezdőértékekkel bír, $\varphi = \theta'$ -ban az I. fejezet algorithmusával lesz meghatározva. Ennek a fejezetnek (2) egyenlőtlensége¹ itt alkalmazható, mivel az

$$r_k \delta_{\lambda k} + i \varepsilon e^{\varphi i} \phi_{\lambda k} |$$

k egy csak ε -től függő felső határral bírnak. Legyen e határ γ , akkor

$$|y_k(x_3) - y_k(x_1)| < \gamma e^{n\gamma |\theta' - \theta|} \left| \sum_{k=1}^n |y_k(x_1)| \right|,$$

és mivel csak az oly $x=0$ -ban végződő utak jönnek tekintetbe, melyek az l metszetet nem lépik át, lesz

$$|y_k(x_3) - y_k(x_1)| < \gamma e^{n\gamma 2\pi} 2\pi \sum_{k=1}^n |y_k(x_1)|.$$

A (8) egyenlőtlenségre való tekintettel tehát mondhatjuk, hogy

$$|y_k(x_3) - y_k(x_1)|$$

az ε kisebbitésével kisebbé tehető, mint egy tetszőleges kis mennyiség, a mivel állításunk teljesen be van bizonyítva.

¹ Ezen Értesítő XXII, p. 489.

VII.

A következőkben oly lineár differenciálrendszerekkel akarok foglalkozni, melyeknek coefficientsei az x független változó *racionális* függvényei.

Az ilyen differenciálrendszerről azt mondjuk, hogy a FUCHS-féle osztályba tartozik, ha a rendszer integráljai nem bírnak határozatlansági helylyel. Nyilvánvaló, hogy az oly differenciálrendszer, mely minden singuláris pont környezetében (a végtelen távoli pontot is beleértve) canonicus alakú, a FUCHS-féle osztályba tartozik. De ennek fordítottja természetesen nem áll.

Ha

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda a_{\lambda k} \quad (1)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

egy a FUCHS-féle osztályba tartozó differenciálrendszer, akkor annak valamely

$$(y_{ik}) = \int_{x_0}^x (a_{ik} dx + \delta_{ik})$$

integrálmatrixáról is azt mondjuk, hogy a FUCHS-féle osztályba tartozik. Az (1) rendszer singuláris pontjait három osztályba sorozzuk:

1. Azon singuláris pontok, melyeknek megkerülésénél az (y_{ik}) matrix balfelől egy (δ_{ik}) -től különböző állandó matrixszal componálódik (*elágazó pontok*).

2. Azok, melyeknek környezetében az y_{ik} -k egyértékűek, de a melyekben az y_{ik} -k valamelyike végtelenné válik (*polusok*).

3. Azok, melyeknek környezetében az y_{ik} -k holomorphok (*lényegtelen singuláris pontok*).

Legyenek a_1, \dots, a_σ és $a_{\sigma+1} = \infty$ az elágazó pontok; fectessük a_1, \dots, a_σ pontoktól az l_1, \dots, l_σ metszeteket a végtelen távoli pont felé, és nevezzük az így szétmetszett x sikot T -nek. Akkor

$$(y_{ik}) = T \int_{x_0}^x (a_{ik} dx + \delta_{ik})$$

egyértékűleg van meghatározva a T -n belül, és jól meghatározott

$$A_v = (a_{ik}^{(v)}) \\ (v=1, 2, \dots, \sigma)$$

állandó matrixokkal szorozódik balfelől, ha x az l_v metszeteket pozitív értelemben átlépi. Ha s_v az oly x_0 -ból kiinduló hurkot jelent, mely az l_v metszetet pozitív értelemben átlépve az a_v pontot megkerüli, akkor ¹

$$(a_{ik}^{(v)}) = \int_{(s_v)} (a_{ik} dx + \delta_{ik}).$$

A végtelen távoli pontnak pozitív értelemben való megkerülése folytán (y_{ik}) fölveszi balfelől az

$$A_{\sigma+1} = (a_{ik}^{(\sigma+1)}) = A_1^{-1} \dots A_{\sigma}^{-1} \quad (2)$$

matrixot.

Ha (z_{ik}) egy az (y_{ik}) -vel cogrediens függvénymatrix, mely a FUCHS-féle osztályba tartozik, és mely a T -n belül racionális függvénymatrix jellegével bír, akkor azt mondjuk, hogy (z_{ik}) és (y_{ik}) ugyanabba a fajba (*species*, POINCARÉ) tartoznak. Nyilvánvaló, hogy ilyenkor

$$(z_{ik}) = (y_{ik})(r_{ik}), \quad (3)$$

hol (r_{ik}) racionális függvénymatrix, melynek determinánsa nem tűnik el identice; és fordítva, ha az (y_{ik}) -t jobbfelől egy racionális matrixszal componáljuk, az eredő matrix mindig (y_{ik}) -val ugyanabba a fajba tartozik. A (z_{ik}) -ra nézve áll, hogy ²

$$D_x(z_{ik}) = (r_{ik})^{-1} D_x(y_{ik})(r_{ik}) + D_x(r_{ik}),$$

ha tehát

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{i=1}^n b_{ik} z_i \quad (4)$$

az a differenciárendszer, melynek a (z_{ik}) eleget tesz, akkor

$$(b_{ik}) = (r_{ik})^{-1} (a_{ik})(r_{ik}) + D_x(r_{ik}).$$

Ezt az egyenletet még így is írhatjuk:

¹ V. ö. Értesítő XXIII, p. 145.

² Értesítő XXII, p. 498, (II) képlet.

$$\left(\frac{dr_{ik}}{dx} \right) = (r_{ik})(b_{ik}) - (a_{ik})(r_{ik}),$$

vagy

$$\frac{dr_{ik}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n (r_{i\lambda} b_{\lambda k} - a_{i\lambda} r_{\lambda k}), \quad (5)$$

$(i, k=1, 2, \dots, n)$

és a szükséges és elegendő föltétel arra, hogy a (4) és (1) differenciálrendszerek (azaz azoknak bizonyos integrál matrixai) ugyanabba a fajba tartoznak, már most abban áll, hogy az (5) rendszernek, mely n^2 homogén lineár elsőrendű differenciálegyenlet rendszere, legyen egy *particularis* racionális integrálrendszere.

Ha a

$$z_k = \sum_{\lambda=1}^n y_{\lambda} r_{\lambda k} \quad (6)$$

egyenletekkel értelmezett z_1, \dots, z_n -t azoknak a föltételeknek vetjük alá, hogy legyen

$$z_2 = \frac{dz_1}{dx}, \quad z_3 = \frac{dz_2}{dx}, \dots, z_n = \frac{dz_{n-1}}{dx},$$

akkor $r_{11}, r_{21}, \dots, r_{n1}$ még tetszőlegesen választható, és

$$r_{\lambda, k+1} = \frac{dr_{\lambda k}}{dx} + \sum_{\nu=1}^n a_{\lambda \nu} r_{\nu k}, \quad (7)$$

$(k=1, 2, \dots, n-1)$

az (5) differenciálrendszer coefficiensei pedig

$$b_{ik} = 0, \quad b_{k+1, k} = 1 \quad (8)$$

$(k=1, 2, \dots, n-1; \quad i=k+1)$

egyenleteknek tesznek eleget, úgy hogy

$$\frac{d^n z_1}{dx^n} = b_{1n} z_1 + b_{2n} \frac{dz_1}{dx} + \dots + b_{nn} \frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}}. \quad (9)$$

Az (5) rendszer integrálmatrixai ebben az esetben úgynevezett Wronski-féle matrixok

$$\left(\frac{d^{k-1} z_{i1}}{dx^{k-1}} \right),$$

$(i, k=1, 2, \dots, n)$

a (9) homogén lineár n -edrendű differenciálegyenlet coefficientensei pedig avval a jellemző alakkal birnak, melyet FUCHS ¹ föllállított.

A fajon belül még változhatnak a polusok, valamint a lényegtelen singuláris pontok. Ha a fajon belül vannak oly WRONSKI-féle matrixok, melyek reductibilis (9)-féle egyenleteknek tesznek eleget, akkor a fajt *reductibilisnek* mondjuk. Az ilyen esetben a (6)-ban az $r_{11}, r_{21}, \dots, r_{n1}$ -et mindig akkép lehet megválasztani, hogy z_1 alacsonyabb, mint n -edrendű homogén lineár differenciálegyenletnek tegyen eleget, melynek coefficientensei rationálisak. A reductibilitás tisztán az A_1, \dots, A_σ *fundamentalsubstitutióknak* a tulajdonsága.

A fajnak azon rendszereit, a melyek ugyanazokkal a polusokkal birnak, egy *osztályba* (*classis*, RIEMANN) foglaljuk. Az osztályon belül tehát meg csak a lényegtelen singuláris pontok változhatnak. Azt az osztályt, a melynek rendszerei nem birnak pólusokkal, a faj *főosztályának* mondjuk. Áll az a fontos tétel, hogy a főosztályban vannak mindig oly minden singuláris pont környezetében canonicus differenciárendszer (absolute canonicus rendszerek), a melyek nem birnak lényegtelen singuláris pontokkal. E tételt tisztán algebrai úton lehet behizonyítani, itt azonban mindjárt oly fordulatot adok ennek a kérdésnek, mely azt a RIEMANN-féle problémának alárendeli. Ezen czélból tegyünk egynéhány megjegyzést ezekre az absolute canonicus rendszerekre nézve.

Az ilyen rendszernek, a mint tudva van, ez az alakja:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{g_{\lambda k}(x)}{\varphi(x)} y_\lambda, \quad (A)$$

a hol

$$\varphi(x) = (x-a_1) \dots (x-a_\sigma), \quad (B)$$

a $g_{ik}(x)$ -ek pedig az x -nek legfőlebb $(\sigma-1)$ -edfokú egész rationális függvényei, úgy hogy

$$\frac{g_{ik}(x)}{\varphi(x)} = \sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(v)}}{x-a_v}, \quad (C)$$

¹ Crelle Journal 66. kötet (1865), Werke I (1904), p. 186, Gl. (12).

az $A_{ik}^{(v)}$ -k állandók. Ha e rendszer

$$(y_{ik}) = T \int_{x_0}^x \left(\frac{y_{ik}(x)}{\varphi(x)} dx + \delta_{ik} \right) \quad (D)$$

integrálmatrixának megfelelő fundamentalsubstitutiókat ismét A_1, \dots, A_σ -val jelöljük, akkor nyilvánvaló, hogy az (A) rendszer az

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_\sigma \\ A_1 & \dots & A_\sigma \end{pmatrix}$$

képlettel meghatározott fajnak főosztályába tartozik. Legyen az (A) rendszer azonkívül minden singuláris pont környezetében *normal* alakú.¹ Akkor az α_v -hoz tartozó determináló fundamentalegyenlet

$$|A_{ik}^{(v)} - \delta_{ik}| = 0, \quad (v=1, 2, \dots, \sigma) \quad (E)$$

az $\alpha_{\sigma+1} = \infty$ -hez tartozó pedig

$$A_{ik}^{(\sigma+1)} - \delta_{ik} = 0, \quad (F_1)$$

a hol

$$A_{ik}^{(\sigma+1)} = - \sum_{v=1}^{\sigma} A_{ik}^{(v)}. \quad (F')$$

Ha az (E) gyökeit $r_1^{(v)}, \dots, r_n^{(v)}$ -vel, az (F₁)-ét $r_1^{(\sigma+1)}, \dots, r_n^{(\sigma+1)}$ -gyel jelöljük, akkor az (F') szerint

$$\sum_{v=1}^{\sigma+1} \sum_{k=1}^n r_k^{(v)} = 0. \quad (G)$$

Az (A)-val ugyanabba az osztályba tartozó differenciárendszer integrálmatrixai

$$(y_{ik})(r_{ik}) \quad (H)$$

alakban foglaltatnak, hol (r_{ik}) racionális függvénymatrix, mely még bizonyos megszorításoknak vetendő alá. Itt csak azokkal a (H) alakú integrálmatrixokkal akarunk foglalkozni, melyek szintén absolute canonicus differenciárendszernek tesznek eleget.

¹ Értesítő XXIII, p. 102.

lényegtelen singuláris ponttal nem bírnak, és melyekben az egyes elágazó pontokhoz tartozó determináló fundamentalegyenletek gyökei az (A) rendszer megfelelő gyökeivel azonosak. Egyszerűség kedvéért föltételezzük, hogy az

$$A_1, A_2, \dots, A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

substitutiók fundamentalegyenletei nem bírnak többszörös gyökökkel. Ha akkor

$$(z_{ik}) = (y_{ik}) (r_{ik}) \quad (10)$$

a mondott tulajdonságokkal bíró rendszer, akkor az $x=a_\nu$ környezetében

$$(y_{ik}) = (c_{ik}^{(\nu)}) (x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \cdot \varphi_{ik}^{(\nu)}, \quad (11)$$

hol $(c_{ik}^{(\nu)})$ állandó matrixok, $\varphi_{ik}^{(\nu)}$ pedig az $x=a_\nu$ környezetében holomorph függvények, melyeknek determinánsa $\varphi_{ik}^{(\nu)}$ az $x=a_\nu$ -ben zérótól különböző értékkel bír. Az $x=a_{\sigma+1}$ helyébe $\frac{1}{x}$ -et kell tenni. Hasonlóképen lesz

$$(z_{ik}) = (c_{ik}^{(\nu)}) (x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \cdot \psi_{ik}^{(\nu)}, \quad (12)$$

hol a $\psi_{ik}^{(\nu)}$ -k szintén az $x = a_\nu$ környezetében holomorphok s determinánsuk e pontban zérótól különböző. A (10) szerint kapjuk, hogy

$$(r_{ik}) = (y_{ik})^{-1} (z_{ik}) = (\varphi_{ik}^{(\nu)})^{-1} (\psi_{ik}^{(\nu)}),$$

az r_{ik} -k tehát minden $x = a_\nu$ környezetében holomorphok, és mivel e függvények föltevésünk szerint más singuláris ponttal nem bírhatnak mint $x=a_\nu$, ($\nu=1, 2, \dots, \sigma+1$), következik, hogy az r_{ik} -k *állandók*. Ha most a (z_{ik}) -t még annak a föltételnek vetjük alá, hogy $x=x_0$ -ban (δ_{ik}) -ra reducálódjék, akkor $(r_{ik}) = (\delta_{ik})$, azaz (z_{ik}) az (y_{ik}) -val azonos. Ezzel tehát föltette egyszerű bebizonyítását nyertük a következő tételnek:¹

Alaptétel: *Egy absolute canonicus differentiórendszernek, melynek lényegtelen singuláris pontja nincs, és mely minden singuláris pont környezetében normalalakú, azon integrálmatrixa, mely x_0 -ban (δ_{ik}) -ra reducálódik, a determináló*

¹ V. ö. ezen Értesítő XXII, p. 336.

fundamentalegyenletek gyökeinek rögzítésével az osztályon belül egyértékűleg van meghatározva.

Ha tehát egy

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_\sigma \\ A_1 & \dots & A_\sigma \end{pmatrix}$$

képlettel meghatározott fajnak főosztályában van (A) alakú differentiálrendszer, mely minden singuláris pont környezetében normalalakú, akkor nincsen más, melynek determináló fundamentalegyenletei ugyanazokkal a gyökökkel bírnak.

Ha az $A_1 \dots A_\sigma, A_{\sigma+1}$ substitutiók valamelyike olyan, hogy fundamentalegyenlete többszörös gyökkel bír, akkor az adott bizonyítás csak annyiban módosul, hogy az (y_{ik}) az illető singuláris pont környezetében nem a (11) alakban, hanem ebben az alakban lesz előállítható:

$$(y_{ik}) = (c_{ik}^{(v)}) (y_{ik}^{(v)}) (\varphi_{ik}^{(v)}), \quad (11a)$$

hol $(y_{ik}^{(v)})$ egy CAUCHY-féle matrixot jelent, mely most a fődiagonális alatt is birhat zérótól különböző, logaritmusokkal ellátott elemeket. Egyszerűség kedvéért azonban a következőkben is ragaszkodunk a most kirotott egyszerűsítő megszorításhoz.

VIII.

Azt a kérdést, vajon egy

$$\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_\sigma \\ A_1, \dots, A_\sigma \end{pmatrix}$$

képlettel adott faj főosztálya tartalmaz-e mindig oly differentiálrendszert, a minőnek az előbbi fejezetben az (A) rendszert föltételeztük, most azzal az általánosabb kérdéssel helyettesítjük, vajjon létezik-e mindig egy ilyenemű (A) rendszer, melyre nézve az a_1, \dots, a_σ tetszésszerint adott pontjai a síknak, és az A_1, \dots, A_σ -k azután tetszésszerint adott állandó matrixok el nem tűnő determinánssal. Ez utóbbi kérdés pedig nem egyéb, mint a RIEMANN-féle probléma. Már egy korábbi alkalommal¹

¹ Értesítő XXII, p. 337. s. köv.

jelezttem volt röviden a *méthode de continuité* alkalmazását arra, hogy e kérdésre megfelelhessünk; most e bebizonyítást részletesen akarjuk kifejteni.

Ha az A_1, \dots, A_σ tetszésszerű matrixok (melyeknek valamint az $A_{\sigma+1} = A_1^{-1} \dots A_\sigma^{-1}$ matrixnak fundamentálegyenletei nem bírnak többszörös gyökkel), akkor az (A) differenciárendszerben úgy választhatjuk az $A_{ik}^{(\nu)}$ állandókat, hogy az $r_k^{(\nu)}$ ($k=1, 2, \dots, n$; $\nu=1, 2, \dots, \sigma+1$) mennyiségek az adott A_1, \dots, A_σ substitutiókkal összhangban legyenek. Képzeljük az $r_k^{(\nu)}$ -kat egy-szersmindenkorra ilyképen rögzítve. Akkor az $A_{ik}^{(\nu)}$ -k meg bizonyos b_1, \dots, b_N parametertől fognak függni, a hol

$$N = n^2\sigma - n(\sigma+1) + 1,$$

és a kérdés az, vajjon lehetséges-e ezeknek a parametereknek oly módon való meghatározása, hogy az (A) rendszer (D) integrálmatrixának megfelelő fundamentalsubstitúciók épen az adott A_1, \dots, A_σ legyenek. Az $A_{ik}^{(\nu)}$ -knak azt az algebrai sokaságát, mely az $n^2\sigma$ korlátlanul változó complex mennyiségek sokaságából az által válik ki, hogy az (E) és (E_1) egyenletek gyökeit rögzítjük, jelöljük M -mel; a b_1, \dots, b_N -ek akkor nem egyebek, mint az M valamely pontjának coordinátái. Az M minden pontjának megfelel egy (A) differenciárendszer, melyre nézve a (D) integrálmatrix fundamentalsubstitúciói

$$(A_{ik}^{(1)}), \dots, (A_{ik}^{(\sigma)}) \quad (1)$$

olyanok, hogy fundamentálegyenletüknek gyökei az adott A_1, \dots, A_σ fundamentálegyenleteinek gyökeivel, és hogy

$$(A_{ik}^{(\sigma+1)}) = (A_{ik}^{(1)})^{-1} \dots (A_{ik}^{(\sigma)})^{-1}$$

fundamentálegyenletének gyökei az $A_{\sigma+1}$ fundamentálegyenletének gyökeivel egyeznek. Az A_1, \dots, A_σ -k a fundamentálegyenletek gyökeinek rögzítésével még bizonyos β_1, \dots, β_N tetszőleges parameterektől függenek, azaz egy M sokaságot alkotnak, mely az $n^2\sigma$ korlátlan változó mennyiségek sokaságából az által válik ki, hogy a

$$|A_\nu - \delta_{ik}\omega| = 0 \\ (\nu=1, 2, \dots, \sigma+1)$$

egyenletek gyökei

$$e^{2\pi \sqrt{-1} r_1^{(v)}}, \dots, e^{2\pi \sqrt{-1} r_n^{(v)}}.$$

($v=1, 2, \dots, \sigma+1$)

Minden (A) differenciálrendszernek megfelel egy jól meghatározott (1) substitutiórendszer, azaz az M sokaság minden pontjának az M sokaságnak egy jól meghatározott pontja. Két eset lehetséges. Azoknak az M pontoknak az összessége, a melyek ily módon az M pontjainak megfelelnek, vagy *a*) az M -nek csak egy részletsokaságát alkotja vagy *b*) az M -et kitölti egészen. Azt akarjuk kimutatni, hogy az *a*) eset lehetetlen.

Ezen czélból vizsgáljuk közelebbről, hogy mikép függnek az (1) substitutiók az $A_{ik}^{(v)}$ -ktől. POINCARÉnek egyik tétele szerint¹ az $A_{ik}^{(v)}$ -k egész transcendens függvényei az $A_{ik}^{(v)}$ -knek, e függvényeknek singuláris pontjai tehát csak azon helyei az M sokaságnak, hol legalább egyike az $A_{ik}^{(v)}$ -knek végtelenné válik. Jelöljük e singuláris helyeknek az összességét S -sel. Mivel az $A_{ik}^{(v)} = \infty$ két valós egyenletnek felel meg, nyilvánvaló, hogy az M lévén $2N$ méretű valós sokaság, az S legfőlebb $2N-2$ méretű lehet. RIEMANNnak egyik tétele szerint² egy $2N$ méretű sokaság csak $(2N-1)$ méretű határokkal bírhat, de nem alacsonyabb méretűekkel. Az M sokaság tehát *zárt sokaság*. Ha a *b*) eset bekövetkeznék, akkor az M -nek az az M részlet sokasága, mely az M pontjainak megfelelő pontokból áll, *határolt* sokaság volna, határa tehát egy $(2N-1)$ méretű sokaság, mely elválasztja az M azon pontjait, melyeknek megfelel egy M pont, azoktól az M pontoktól, a melyeknek nem felel meg M pont. Ha meg-

¹ Acta Mathematica IV, p. 212; e tétel bebizonyítására elég arra hivatkozni, hogy az (y_{ik}) integrálmatrix elemei a partiális differenciálegyenletek integrálexistenciájának tétele szerint az $A_{ik}^{(v)}$ -knak monogen függvényei, a miből tüstént az következik, hogy az (y_{ik}) -k egész transcendens függvényei az $A_{ik}^{(v)}$ -knek. Ha azután s , egy x_0 -ból a , körül fektett hurkot jelent, akkor

$$(A_{ik}^{(v)}) = \int_{s_1}^{\bar{s}} \left(\sum_{r=1}^n \frac{A_{ik}^{(v)}}{x - a_r} dx + \delta_{ik} \right),$$

a miből a mondott tétel közvetlenül folyik.

² Werke (1892), p. 481, v. ö. POINCARÉ az i. h. p. 277.

gondoljuk, hogy mikép juthat el az $A_{ik}^{(v)}$ -k változása által egy pont az \bar{M} belsejéből kiindulva az \bar{M} supponált határához, akkor azt látjuk, hogy ez csak két módon lehetséges: vagy 1. az által, hogy az M pont oly helyre kerül, hol a b_1, \dots, b_N függvénydeterminánsa a β_1, \dots, β_N -ek szerint eltűnik, vagy 2. az által, hogy az M pont az S sokaság valamely helyébe jut.

Foglalkozunk mindenekelőtt az első lehetőséggel.

Legyenek

$$A_{ik}^{(v)} = E_{ik}^{(v)}(A_{11}^{(1)}, \dots, A_{nn}^{(\sigma)}) \quad (2)$$

($i, k=1, 2, \dots, n$; $v=1, 2, \dots, \sigma$)

azok az egész transcendens függvények, a melyekről fönt szóltunk. Akkor ezeknek invers függvényei általánosan szólva végtelen sok értékűek lesznek. Az $A_{ik}^{(v)}$ -kre kirovott föltételek azonban e végtelen sok értékű függvényeknek egy *egyértékű ágrendszerét* különítik el, a mennyiben a VII. fejezetben bebizonyított *alaptétel* szerint nem lehetséges több mint egy (A) -féle differenciálrendszer a főosztályban, melynek determináló fundamentalegyenletei rögzített gyökökkel bírnak. Az M pontjainak megfelelő $A_{ik}^{(v)}$ -k tehát a (2) függvényekre nézve úgyszólván egy *periodus csíkot* alkotnak; ¹ nem lehetséges tehát, hogy az M -en belül az 1. eset bekövetkezzék.

A mi a második lehetőséget illeti, ez is könnyen elutasítható, ha az $A_{ik}^{(v)}$ -knak viselkedését követjük, ha az M valamelyik pontja az S felé közeledik.

Vegyük ugyanis az (y_{ik}) integrálmatrixnak azt az elő-

¹ A (2) függvények invers függvényei különben is föltűnő analógiát mutatnak a *logarithmussal*, mely utóbbi, a mint természetes, e függvényeknek specziális eseteként kiadódik, ha t. i. $n=1$. Mint ilyen analógiát fölemlítem, hogy az

$$(A_{ik}^{(\sigma+1)})^{-1} = (A_{ik}^{(\sigma)}) \dots (A_{ik}^{(1)})$$

nek megfelel az

$$-(A_{ik}^{(\sigma+1)}) = \sum_{v=1}^{\sigma} (A_{ik}^{(v)})$$

relatio, továbbá, hogy az (A) differenciálrendszerének *adjungált* rendszerére nézve a fundamentalsubstitutiók az $(A_{ik}^{(v)})^{-1}$ transponált matrixai, míg az $(A_{ik}^{(v)})$ helyébe a $(-A_{ik}^{(v)})$ transponált matrixai lépnek (v. ö. Értesítő XX, p. 496).

állítását, mely a VII. fejezet (11) egyenletében adva van. Akkor lévén

$$\left(\sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(v)}}{x-a_v} \right) = D_x(y_{ik}) = (y_{ik})^{-1} \left(\frac{dy_{ik}}{dx} \right),$$

lesz az idézett egyenlet szerint

$$\left(\sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(v)}}{x-a_v} \right) = (\varphi_{ik}^{(v)})^{-1} ((x-a_v)^{-r_i^{(v)}} \delta_{ik}) (c_{ik}^{(v)})^{-1} \cdot (c_{ik}^{(v)}) \left[(r_i^{(v)} (x-a_v)^{r_i^{(v)}-1} \delta_{ik}) (\varphi_{ik}^{(v)}) + ((x-a_v)^{r_i^{(v)}} \delta_{ik}) \left(\frac{d\varphi_{ik}}{dx} \right) \right],$$

tehát $(x-a_v)$ -vel szorozva és $x=a_v$ téve :

$$(A_{ik}^{(v)}) = (\varphi_{ik}^{(v)})_{a_v}^{-1} (r_i^{(v)} \delta_{ik}) (\varphi_{ik}^{(v)})_{a_v}. \quad (3)$$

Másrészt adódik a (11) egyenletből, ha $x=x_0$, tekintettel a (D) -re :

$$(\delta_{ik}) = (c_{ik}^{(v)}) ((x_0-a_v)^{r_i^{(v)}} \delta_{ik}) (\varphi_{ik}^{(v)})_{x_0},$$

azaz

$$(c_{ik}^{(v)}) = (\varphi_{ik}^{(v)})_{x_0}^{-1} ((x_0-a_v)^{-r_i^{(v)}} \delta_{ik}). \quad (4)$$

Ha most x oly zárt utat tesz, mely az l_v metszetet egyszer positiv értelemben átlépi, lesz

$$(A_{ik}^{(v)})(y_{ik}) = (c_{ik}^{(v)}) (e^{2\pi \sqrt{-1} r_i^{(v)}} (x-a_v)^{r_i^{(v)}} \delta_{ik}) (\varphi_{ik}^{(v)}),$$

tehát $x=x_0$ téve és tekintettel a (4)-re :

$$(A_{ik}^{(v)}) = (\varphi_{ik}^{(v)})_{x_0}^{-1} (e^{2\pi \sqrt{-1} r_i^{(v)}} \delta_{ik}) (\varphi_{ik}^{(v)})_{x_0}. \quad (5)$$

Ha a $(\varphi_{ik}^{(v)})$ invers matrixát egy pillanatra $(\psi_{ik}^{(v)})$ -vel jelöljük

$$(\psi_{ik}^{(v)}) = (\varphi_{ik}^{(v)})^{-1},$$

akkor a (3) és (5) egyenletek így írhatók :

$$A_{ik}^{(v)} = \sum_{\lambda=1}^n \psi_{i\lambda}^{(v)} (a_v) r_{\lambda}^{(v)} \varphi_{\lambda k}^{(v)} (a_v), \quad (3a)$$

$$A_{ik}^{(v)} = \sum_{\lambda=1}^n \psi_{i\lambda}^{(v)} (x_0) e^{2\pi \sqrt{-1} r_{\lambda}^{(v)}} \varphi_{\lambda k}^{(v)} (x_0). \quad (5a)$$

Legyen a $\phi_{i\lambda}^{(v)} \cdot \varphi_{\lambda k}^{(v)}$ függvénynek sorbontása $x = a_v$ környezetében

$$\phi_{i\lambda}^{(v)} \varphi_{\lambda k}^{(v)} = \phi_{i\lambda}^{(v)}(a_v) \varphi_{\lambda k}^{(v)}(a_v) + c_{i\lambda k v}^{(1)}(x - a_v) + \dots \text{ in inf.} \quad (6)$$

és $x = x_0$ környezetében:

$$\phi_{i\lambda}^{(v)} \varphi_{\lambda k}^{(v)} = \phi_{i\lambda}^{(v)}(x_0) \varphi_{\lambda k}^{(v)}(x_0) + c_{i\lambda k v}^{(1)}(x - x_0) + \dots \text{ in inf.} \quad (7)$$

Ha az M -nek pontja az S felé tart, akkor kell, hogy valamelyik $A_{ik}^{(v)}$ végtelen nagygyá váljék, de úgy, hogy az $\lambda^{(v)}$ -k rögzítve maradnak; ez csak úgy lehetséges, hogy a megfelelő $\phi_{i\lambda}^{(v)}(a_v) \varphi_{\lambda k}^{(v)}(a_v)$ szorzatok valamelyike végtelen nagygyá válik. De mivel a (7) sor a (6) sornak analitikai folytatása, mindig vehető a $\phi_{i\lambda}^{(v)}(a_v) \varphi_{\lambda k}^{(v)}(a_v)$ oly nagynak, hogy a $\phi_{i\lambda}^{(v)}(x_0) \varphi_{\lambda k}^{(v)}(x_0)$ nagyobb legyen, mint egy tetszőleges nagy mennyiség, és ebből az következik, hogy, ha $\phi_{i\lambda}^{(v)}(a_v) \varphi_{\lambda k}^{(v)}(a_v)$ végtelenné válik, akkor $\phi_{i\lambda}^{(v)}(x_0) \varphi_{\lambda k}^{(v)}(x_0)$ szintén a végtelenbe nő.¹ Ha tehát $A_{ik}^{(v)}$ a leírt módon végtelenné válik, akkor a megfelelő $A_{ik}^{(v)}$ is nő a végtelenbe, azaz ha az M -nek pontja az S felé tart, akkor az M -nek megfelelő pontja azon Σ sokaság valamelyik pontja felé közeledik, mely sokaság azon pontok összességéből áll, melyekben az A_1, \dots, A_σ matrixoknak legalább egyik eleme végtelen. De a Σ sokaság nem lehet több mint $2N - 2$ méretű, tehát nem lehet határa az M azon részletsokaságnak, melyet \bar{M} -sal jelöltünk, az M tehát M -mel azonos, azaz az M minden pontjának megfelel egy M pont.

*Tehát mindig létezik oly (A) alakú differenciárendszer, melyre a (D) integrálmatrix fundamentalssubstitúciói a tetszés szerint adott A_1, \dots, A_σ matrixok.*²

¹ E következtetés tüzetesebb igazolására egy későbbi dolgozatban fogok visszatérni.

² A RIEMANN-féle probléma történetére v. ö. Értesítő XXII, p. 328—340. foglalt dolgozatomat. Újabban HILBERT az $n=2$ esetben az integrálegyenletek elmélete alapján bizonyította a RIEMANN-féle problémának eleget tevő függvények existenciáját (Göttinger Nachrichten 1905, 4. füzet); v. ö. O. D. KELLOGNak a Mathem. Annalen 60. kötetében foglalt dolgozatát.

IX.

A RIEMANN-féle problémára vonatkozó vizsgálataimnak kezdetén csak bizonyos az A_1, \dots, A_σ substitutiókra kirovott megszorító föltételek mellett tudtam a szóban forgó függvények existenciáját bebizonyítani; több dolgozatban e megszorító föltételek tekintetbe vételével levontam azokat a következtetéseket, melyek a mondott probléma megoldásából a lineár differenciálegyenletek elméletére nézve kiadódnak. E következtetések most általánosan érvényeseknek bizonyultak. A következőben lehetőleg röviden akarom azoknak némelyikét összefoglalni, és pedig mindjárt abban az alakban mutatom be azokat, a melyben a lineár differenciálegyenleteknek tölem adott új elméletébe beilleszthetők.

I. Legyen

$$\frac{du_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda k} u_\lambda \quad (1)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

egy racionális coefficiensű differenciálrendszer; legyenek a_1, \dots, a_σ az

$$(u_{ik}) = T \int_{x_0}^x (a_{ik} dx + \delta_{ik}) \quad (2)$$

integrálmatrix elágazó pontjai, b_1, \dots, b_r a többi singuláris pont, tehát lényegesen singuláris pontok,¹ polusok, vagy lényegtelen singuláris pontok; természetes, hogy a (2) integrálmatrix integrációs útját úgy kell választanunk, hogy a lényegesen singuláris pontokat és polusokat kikerülje. Jelöljük A_1, \dots, A_σ -val azokat a substitutiókat, melyeket (u_{ik}) szenved, ha x az l_1, \dots, l_σ metszeteket átlépi, és legyen

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda k}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \quad (3)$$

oly rendszer, melynek

¹ Azaz határozatlansági helyek, melyeknek környezetében azonban az u_{ik} -k egyértékűek.

$$(y_{ik}) = T \int_{x_0}^x \left(\sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(v)}}{x - a_v} dx + \delta_{ik} \right) \quad (4)$$

integrálmatrixa az (u_{ik}) matrixszal *cogrediens*.¹ Ilyen (3)-féle differenciálrendszer még végtelen sok létezik, a mennyiben a determináló fundamentalegyenletek gyökeinek választásánál még $n(\sigma+1)-1$ egész szám fölött rendelkezhetünk. Nyilvánvaló, hogy

$$(u_{ik}) = (y_{ik})(r_{ik}), \quad (5)$$

hol az r_{ik} -k az x -nek *egyértékű függvényei*. Ezekre a függvényekre nézve áll, hogy

$$D_x(u_{ik}) = (r_{ik})^{-1} D_x(y_{ik})(r_{ik}) + D_x(r_{ik}),$$

azaz

$$(r_{ik})(a_{ik}) = \left(\sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(v)}}{x - a_v} \right) (r_{ik}) + \left(\frac{dr_{ik}}{dx} \right). \quad (6)$$

e függvények tehát egy racionális coefficiensű homogen lineár differenciálrendszernek tesznek eleget. E tétel csak elméletileg érdekes, addig míg nem sikerül adott racionális a_{ik} -k mellett, a $A_{ik}^{(v)}$ -kat akkép meghatározni, hogy a (6) differenciálrendszernek legyen egy particularis egyértékű integrálrendszere. A priori csak azt tudjuk, hogy e meghatározás még végtelen sokféle módon lehetséges; de még arra nézve sem rendelkezünk módszerrel, hogy eldöntsünk, vajjon az a_{ik} -k polusai közül melyek az elágazó pontok s melyek a lényegesen singuláris pontok.

II. Ha az a_1, \dots, a_{σ} elágazó pontok tetszésszerű (határozatlan) mennyiségek, az A_1, \dots, A_{σ} fundamentalsubstitutiók elemei pedig az a_1, \dots, a_{σ} -tól független (állandó) mennyiségek, akkor az a (3) alakú differenciálrendszer, mely az

$$\begin{pmatrix} a_1, & \dots, & a_{\sigma} \\ A_1, & \dots, & A_{\sigma} \end{pmatrix}$$

val adott RIEMANN-féle problémát megoldja, olyan, hogy az (y_{ik}) integrálmatrixhoz tartozó monodromia csoportja a singuláris

¹ V. ö. Mathematikai és Fizikai Lapok X, p. 261–273.

pontoktól független. FUCHS¹ általánosan oly lineár differentiálegyenletekkel foglalkozott, a melyeknek csoportja egy a coefficientsekben szereplő t parametertől független. Ezek azonban semmivel sem általánosabbak a tőlünk épen jellemzett rendszereknél.² Ha t. i. az (1) rendszer coefficientseiben szerepel a t parameter, és egyrészt t független az a_1, \dots, a_σ elágazó pontoktól, másrészt az A_1, \dots, A_σ -k függetlenek a t -től, akkor a (3) rendszer (y_{ik}) integrálmatrixa nyilvánvalóan nem függhet a t -től, és így a t csak az r_{ik} -kban szerepel. Az (5) egyenlet ebben az esetben tehát teljes evidenciába helyezi az u_{ik} -knak t -től való függését. Ha ellenben az (1)-ben t az a_1, \dots, a_σ -tól függ, akkor az y_{ik} -k függési viszonya az a_1, \dots, a_σ -któl ismét kimeríti az u_{ik} -k t -től való függésének a lényegét.

Vizsgáljuk tehát az (y_{ik}) integrálmatrixot mint az a_1, \dots, a_σ -k-nak függvényeit azon föltevés mellett, hogy az

$$A_\nu = (A_{ik}^{(\nu)}) \\ (\nu=1, 2, \dots, \sigma)$$

substitutiók e singuláris pontoktól függetlenek. Ismét arra az egyszerű esetre szorítkozva, a mikor az $A_1, \dots, A_\sigma, A_{\sigma+1}$ fundamentalegyenleteinek gyökei nem többszörösek, lesz a_ν környezetében³

$$(y_{ik}) = (c_{ik}^{(\nu)}) ((x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \delta_{ik}) (\varphi_{ik}^{(\nu)}), \quad (7)$$

a hol $a_{\sigma+1} = \infty$ esetében $x - a_\nu$ helyébe $\frac{1}{x}$ teendő. Az $r_k^{(\nu)}$ -k nyilvánvalóan az a_1, \dots, a_σ -któl függetlenek. Ha x az l_ν metsetet egyszer pozitív értelemben átlépi, lesz

$$(A_{ik}^{(\nu)})(y_{ik}) = (c_{ik}^{(\nu)}) (e^{2\pi\sqrt{-1} r_i^{(\nu)}} (x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \delta_{ik}) (\varphi_{ik}^{(\nu)}),$$

azaz tekintettel a (7)-re

$$(A_{ik}^{(\nu)}) = (c_{ik}^{(\nu)}) (e^{2\pi\sqrt{-1} r_i^{(\nu)}}) (c_{ik}^{(\nu)})^{-1}, \quad (8)$$

¹ Berliini Akadémia Sitzungsberichtjei 1888. s. köv.

² Lásd CRELLE Journal 123. k., p. 171, 172.

³ V. ö. VII. fejezet (11) egyenletét.

azaz a $c_{ik}^{(v)}$ -ket szintén az a_1, \dots, a_σ -któl függetleneknek választ-hatjuk.¹ Fordítva, ha a $c_{ik}^{(v)}$ -k és az $r_i^{(v)}$ -k függetlenek az a_1, \dots, a_σ -tól, akkor az (y_{ik}) -hoz tartozó monodromia-csoport is független ezektől a singuláris pontoktól. Képezzük most az (y_{ik}) -nak a_λ szerint derivált matrixát

$$D_{a_\lambda}(y_{ik}) = (y_{ik})^{-1} \left(\frac{\partial y_{ik}}{\partial a_\lambda} \right) = (b_{ik}^{(\lambda)}). \quad (9)$$

Akkor $x=a_\lambda$ környezetében

$$\begin{aligned} (b_{ik}^{(\lambda)}) &= (\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1} ((x-a_\lambda)^{-r_i^{(\lambda)}} \delta_{ik}) (c_{ik}^{(\lambda)})^{-1} \\ &\cdot (c_{ik}^{(\lambda)}) \left[(-r_i^{(\lambda)} (x-a_\lambda)^{r_i^{(\lambda)}-1} \delta_{ik}) (\varphi_{ik}^{(\lambda)}) + ((x-a_\lambda)^{r_i^{(\lambda)}} \delta_{ik}) \left(\frac{\partial \varphi_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda} \right) \right] = \\ &= (\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1} \left(\frac{-r_i^{(\lambda)} \delta_{ik}}{x-a_\lambda} \right) (\varphi_{ik}^{(\lambda)}) + (\varphi_{ik}^{(\lambda)})^{-1} \left(\frac{\partial \varphi_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda} \right), \end{aligned}$$

a $b_{ik}^{(\lambda)}$ -nak tehát $x=a_\lambda$ -ban *elsőrendű polusa* van, és tekintet-tel a VIII. fejezet (3) egyenletére adódik

$$\text{Res}_{a_\lambda}(b_{ik}^{(\lambda)}) = -A_{ik}^{(\lambda)}.$$

Az $x=a_\nu$ pont környezetében, hol $\nu \neq \lambda$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (b_{ik}^{(\lambda)}) &= (\varphi_{ik}^{(\nu)})^{-1} ((x-a_\nu)^{-r_i^{(\nu)}} \delta_{ik}) (c_{ik}^{(\nu)})^{-1} (c_{ik}^{(\nu)}) ((x-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \delta_{ik}) \left(\frac{\partial \varphi_{ik}^{(\nu)}}{\partial a_\lambda} \right) = \\ &= (\varphi_{ik}^{(\nu)})^{-1} \left(\frac{\partial \varphi_{ik}^{(\nu)}}{\partial a_\lambda} \right), \end{aligned}$$

a $b_{ik}^{(\lambda)}$ -k tehát $x=a_\nu$ környezetében *holomorphok*. Végre $x=\infty$ környezetében lesz:

$$(b_{ik}^{(\lambda)}) = (\varphi_{ik}^{(\sigma+1)})^{-1} \left(\frac{\partial \varphi_{ik}^{(\sigma+1)}}{\partial a_\lambda} \right),$$

azaz, hogy a $b_{ik}^{(\lambda)}$ -k a végtelen távoli pont környezetében is *holomorphok*. Adódik tehát, hogy

$$b_{ik}^{(\lambda)} = -\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{x-a_\lambda} + B_{ik}^{(\lambda)}, \quad (10)$$

a hol a $B_{ik}^{(\lambda)}$ -k x -től *független mennyiségek*. A (9)-re való tekintettel kapjuk, hogy

¹ V. ö. FUCHS az i. h. 1892, p. 163.

$$\left(\frac{\partial y_{ik}}{\partial a_\lambda}\right) = (y_{ik}) \left(-\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{x-a_\lambda} + B_{ik}^{(\lambda)}\right). \quad (11)$$

az y_{ik} -k a_λ -szerinti deriváltjainak matrixa tehát mint az x -nek függvénymatrixa (y_{ik}) -val ugyanabba az osztályba tartozik, a mi nem egyéb mint FUCHS-nak az a tétele,¹ mely az ilyen vizsgálatoknak az alapját képezi.

Az egyszerű számítás azonban még mélyebb betekintést fog szolgáltatni a $B_{ik}^{(\lambda)}$ -knak mint az a_1^1, \dots, a_σ függvényeinek a szerkezetébe.

Tekintettel arra, hogy egyrészt

$$D_x(y_{ik}) = (a_{ik}), \quad a_{ik} = \sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(v)}}{x-a_v},$$

másrészt

$$D_{a_\lambda}(y_{ik}) = (b_{ik}^{(\lambda)}),$$

kell, hogy az (a_{ik}) és a $(b_{ik}^{(\lambda)})$ matrixok az integrabilitás feltételeit kielégítsék.² Lesz tehát:

$$\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial a_\lambda}\right) + (b_{ik}^{(\lambda)})(a_{ik}) = \left(\frac{\partial b_{ik}^{(\lambda)}}{\partial x}\right) + (a_{ik})(b_{ik}^{(\lambda)}),$$

azaz

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{v=1}^{\sigma} \frac{\partial A_{ik}^{(v)}}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{1}{x-a_v} + \frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{(x-a_\lambda)^2}\right) + \left(-\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{x-a_\lambda} + B_{ik}^{(\lambda)}\right) \left(\sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(v)}}{x-a_v}\right) = \\ & = \left(\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{(x-a_\lambda)^2}\right) + \left(\sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(v)}}{x-a_v}\right) \left(-\frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{x-a_\lambda} + B_{ik}^{(\lambda)}\right), \end{aligned}$$

vagy kifejtve

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{\sigma} \frac{\partial A_{ik}^{(v)}}{\partial a_\lambda} \cdot \frac{1}{x-a_v} + \frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{(x-a_\lambda)^2} + \sum_{\alpha=1}^n \left(-\frac{A_{i\alpha}^{(\lambda)}}{x-a_\lambda} + B_{i\alpha}^{(\lambda)}\right) \sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{\alpha k}^{(v)}}{x-a_v} = \\ & = \frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{(x-a_\lambda)^2} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{v=1}^{\sigma} \frac{A_{i\alpha}^{(v)}}{x-a_v} \cdot \left(-\frac{A_{\alpha k}^{(\lambda)}}{x-a_\lambda} + B_{\alpha k}^{(\lambda)}\right). \end{aligned}$$

¹ Berlini Akadémia Sitzungsberichtjei 1888, p. 1279.

² FUCHS az i. h. 1898, p. 226.

³ Értesítő XXIII, p. 104.

Itt azok a tagok, melyeknek nevezőiben $(x-a_\lambda)^2$ szerepel, kiesnek; ha még az $(x-a_\lambda)(x-a_\nu)$ nevezőjű tagokat partiális törtekre bontjuk, akkor ily alakú kifejezés adódik:

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{M_\nu}{x-a_\lambda} = 0,$$

a miből azután az következik, hogy az összes M_ν -k eltűnnek. Ezek az egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ik}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda} &= \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{A_{i\alpha}^{(\lambda)} A_{\alpha k}^{(\nu)} - A_{i\alpha}^{(\nu)} A_{\alpha k}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu} + B_{i\alpha}^{(\lambda)} A_{\alpha k}^{(\lambda)} - A_{i\alpha}^{(\lambda)} B_{\alpha k}^{(\lambda)} \right), \\ \frac{\partial A_{ik}^{(\nu)}}{\partial a_\lambda} &= \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{A_{i\alpha}^{(\lambda)} A_{\alpha k}^{(\nu)} - A_{i\alpha}^{(\nu)} A_{\alpha k}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu} + B_{i\alpha}^{(\lambda)} A_{\alpha k}^{(\nu)} - A_{i\alpha}^{(\nu)} B_{\alpha k}^{(\lambda)} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

($i, k=1, 2, \dots, n$; $\lambda, \nu=1, 2, \dots, \sigma$)

Ezekből az egyenletekből azt látjuk, hogy a $B_{ik}^{(\lambda)}$ -k *rationálisan* kifejezhetők az $A_{ik}^{(\nu)}$ -k, azoknak a_λ szerinti deriváltjai és az a_1, \dots, a_σ által. Másrészt tüstént kilálglik, ha a meg-ejtett számítást visszafelé követjük, hogy a (12) egyenletek *szükséges és elegendő feltételei* annak, hogy a

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ik}^{(\nu)}}{x-a_\nu},$$

($k=1, 2, \dots, n$)

differentiálrendszer egy integrálmatrixához tartozó monodromia csoport az a_1, \dots, a_σ singuláris pontoktól független legyen.

Az y_{ik} -nak mint az a_1, \dots, a_σ függvényeinek analitikai vizsgálatára egy más értekezésben szándékozom visszatérni. A lineár differentiálrendszerek elméletéről szóló ezen négy dolgozatomban csak az elméletre vonatkozó új módszereimet kívántam kifejteni, nevezetesen oly célból, hogy e módszerek segítségével a RIEMANN-féle problémával postulált függvények existenciáját teljes általánosságban bizonyíthassam. Alább össze-állítom az ezen problémára vonatkozólag eddig közzétett dolgozataimnak a lajstromát.

Irodalmi áttekintetés.

1. Sur un problème de Riemann; Comptes Rendus 1898, t. 126, p. 723—725.
2. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II, 2 (1896), p. 108—124, 365—394; Bd. II, 2 (1898), p. 382—388.
3. Sur les équations linéaires à points d'indétermination; Comptes Rendus 1901, t. 132, p. 27—28.
4. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemann'sche Problem (Erste Abhandlung); Crelle Journal, Bd. 123 (1901), p. 138—173.
5. Ueber einen allgemeinen Satz aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen; *ibid.* Bd. 124 (1902), p. 47—58.
- 5a. A lineár differenciálegyenletek elméletének egy általános tételéről; Mathem. és Fizikai Lapok X. k. (1901), p. 261—273.
6. Ueber das Riemann'sche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen; Sitzungsberichte der kgl. preuss. Akademie, 1902, p. 283—290.
7. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemann'sche Problem (Zweite Abhandlung); Crelle Journal, Bd. 124 (1902), p. 292—319.
8. Az egy complex változó algebrai függvényeinek elméletéhez (székközlő értékezés); Math. és Term.-tud. Értesítő, XX. k. (1902), p. 658—667.
9. Sur la théorie des fonctions algébriques; Comptes Rendus 1902, t. 135.
10. Bemerkungen zum Riemann'schen Problem (von L. Schlesinger und T. Brodén); Crelle Journal, Bd. 125 (1903), p. 28—33.
11. Sur la détermination des fonctions algébriques uniformes sur une surface de Riemann donnée; Annales sc. de l'École Normale, (3), t. 20 (1903), p. 331—347. (A 8. dolgozat átdolgozása.)
12. Sur la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires; Comptes Rendus 1904, t. 138.
13. Riemannak a lineár differenciálegyenletek elméletére vonatkozó töredékéről s az ahhoz csatlakozó újabb vizsgálatokról; Math. és Term.-tud. Értesítő, XXII. k. (1904), p. 328—340.
14. A lineár differenciárendszer elméletéhez (első közlemény); *ibid.* p. 486—498.
15. Beiträge zur Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen; Crelle Journal, Bd. 128 (1905), p. 263—297.
16. A lineár differenciárendszer elméletéhez (második közlemény); Math. és Term.-tud. Értesítő, XXIII. k. (1905), p. 102—120.
17. Ueber das Riemann'sche Fragment zur Theorie der linearen Differentialgleichungen und daran anschliessende neuere Arbeiten; Verhandlungen d. III. intern. Mathem. Kongresses, Lipcse 1905, p. 219—228.

18. A lineár differentiórendszernek elmulatéhez (harmadik közlemény); Math. és Term.-tud. Értesítő, XXIII. k. (1905), p. 139—154.

19. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemann'sche Problem (Dritte Abhandlung); Crelle Journal, Bd. 130 (1905), p. 26—46.

20. Zur Theorie der homogenen linearen Differentialsysteme; Crelle Journal (sajtó alatt).

21. Bemerkung zu dem Kontinuitätsbeweise der Lösbarkeit des Riemann'schen Problems (Aus einem Briefe an Herrn D. Hilbert); Math. Annalen (sajtó alatt).

22. Ueber die Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen als Funktionen der singulären Punkte; Crelle Journal, Bd. 129 (Dirichlet-Band, 1905), p. 287—294.

23. A jelen dolgozat.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1905 decz. 18.-án tartott üléséből.)

A KENDERREL VÉGZETT TENYÉSZTÉSI KISÉRLETEK.

MÁGOCSY-DIETZ SÁNDOR 1. tagtól.

A kender tudvalevőleg kétlakú növény, melynek him- és nő-egyedei (virágos és magvas kender) nem csak a virág szerkezetében, hanem a termetben is feltűnő különbséget mutatnak. Ebben a tekintetben a termesztett kender éppen úgy viselkedik, mint a vadon élő.

Az 1901. év augusztus havában a bukin-palánkai m. kir. csikótelep intézősége nevében Buzás Lajos olyan kendert küldött be, a mely sem a virágos, sem a magvas kender termetével nem birt és a melyen úgy a him-, mint a nővirágok egyaránt kifejlődtek. Ez az egyed tehát a kender normalis viszonyaitól eltérőleg nem kétlakú, de egylakú növény módjára fejlődött ki.

A növényeknek ilyenmő eltérő alakulása más kétlakú növények sorában sem ritka, sőt a kendert illetőleg erre nézve már számos adatra akadunk, melyek közül csak néhányra mutatok rá. Így már SPALLANZANI¹ és BERNHARDI² megfigyelték, hogy a női egyedek néha himvirágokat is fejlesztettek, hasonló megfigyelést tett AUTENRIETH³ is, de megfigyelte azt is, hogy

¹ A. LAZARO SPALLANZANI: Expériences pour servir à l'histoire de la génération des animaux et des plantes. Genève, 1786.

² J. J. BERNHARDI: Über den Begriff der Pflanzenart und seine Anwendung. Erfurt, 1834.

³ H. F. AUTENRIETH: Disquisito quæstionis acad. de discrimine sexuali iam in seminibus plantarum dioicarum apparente. Tuebingæ, 1821. Erre a három munkára mutat rá dr. Müller N. J. C. Handbuch d. allg. Botanik. II. Theil. Heidelberg, 1880.

a himegyedeken nővirágok jelentek meg, s ezzel teljesen meg-
egyezik HILDEBRAND ¹ közlése is. BRAUN A. ² az egyalakú kenderen
a him- és nővirágok elhelyezését is megállapította, hasonlóan
járt el érdemes botanikusunk, HOLUBY J. L., ³ a kinek közlése
szerint az egyalakú kender a bossáci kenderföldeken annyira
gyakori, hogy a kender nyüvő asszonyok megkülönböztetik
vad kender vagy bolond kender névvel. Közlése szerint azon-
ban a him- és nővirágok elhelyezése nem felel meg a BRAUN
megállapításának. A kender egyalakúságáról emlékszik meg
MASTERS ⁴ is, sőt kétivarú virágokat is említ, ellenben PENZIG ⁵
elég különösen hasonló tartalmú munkájában a BRAUN és
HOLUBY közlésén kívül semminemű más irodalmi adatot nem
idézik. Ez időtől kezdve már gyakrabban találkozunk a kérdés
tárgyalásával, nevezetesen MOLLIARD mesterségesen nevelt ken-
deren egyalakúságot és kétivarú virágokat figyelt meg. ⁶ Hasonlót
figyelt meg a szabadban tenyésztett kenderen PRAIN is Kelet-
Indiában. ⁷

Ezekhez az esetekhez csatolhatom még a budapesti egye-
temi növénykert herbariumában találtat, mely HABERLE jelzése
szerint 1821-ben az egyetemi növénykertben termett, végül a
bevezetőben említett bukin-palánkai egyalakú kender.

Ha ezeket az eseteket mind számba vesszük, akkor két kér-
dés merül fel: nevezetesen vajjon az egyalakúsággal és a virágok
kétivarúságával vele jár-e az egész növény természetének módo-

¹ F. HILDEBRAND: Die Geschlechtervertheilung bei den Pflanzen.
Leipzig, 1867. p. 10.

² Botanische Zeitung 1873. 267. l.

³ Cannabis sativa monoica. Österr. bot. Zeitschrift XXVIII. évf.
1878. 367—9. lap.

⁴ MAXWELL T. MASTERS: Pflanzenteratologie. Leipzig, 1886. 224. és
227. lap.

⁵ Dr. O. PENZIG: Pflanzenteratologie. II. Bd. Genua, 1894. 293. l.

⁶ M. M. MOLLIARD: De l'hermaphrodisme chez la mercuriale et
le chanvre. Revue générale de botanique. T. X. Paris, 1898. 321—334. l.

⁷ MAJOR D. PRAIN: On the morphology, teratology and diclinism
of the flowers of Cannabis. Scientific Memoires by officers of the me-
dical and sanitary departments of the government of India. Calcutta,
1904. Nr. 12. 28—31. l.

sulása, és vajjon a kender neme milyen körülmények közt határozódik meg?

Az első kérdésre könnyű feleletet találni, mert erre az irodalom már is többé-kevésbé határozott feleletet adott, különösen BRAUN, HOLUBY és PRAIN idézett közléseiben, de ugyanezt igazolja a HABERLE-féle és a bukin-palánkai növény is. Ezek szerint az egylakú kender termete vagy a him- vagy a nővirágú termetéhez közeledik, vagy pedig a kettő között áll. Ezzel a termettel kapcsolatban áll azután a him- és nővirágoknak az eloszlása és elhelyezkedése a virágzatban. Ennek a szabályszerűségét is megkíséreltek már megállapítani, különösen PRAIN; az esetek aránylag csekély száma azonban még nem engedte meg, hogy végleges eredmény éressék el, a minthogy a rendelkezésemre álló két példányon magam sem tudtam határozott törvényszerűséget felismerni. Az, a mi mint állandó tulajdonság szembe tűnik, mindössze annyi, hogy a nővirágokat hordó virágzati tengelyek rövidebbek maradnak, mint a himvirágokat hordók, továbbá, hogy a másnemű virágok megjelenésével a részletes virágzat is még másnemű módosulást szenved, miről PRAIN¹ közöl bő megfigyelést.

A másik kérdésre a feleletet már egy egész irodalom keresi, felölelve nemcsak a kendert, hanem más hasonló eseteket is, a melyekben kétlakú növények egylakúvá, vagy különivarú lények kétivarúakká, illetőleg himnősökké lettek. A bukin-palánkai kender ösztönzött arra, hogy a kérdéssel magam is foglalkozzam, előbb megkezdett kísérleteimet folytatva, és bár csak mindig a kendert tartottam szem előtt, mégis a helyes felelet megadhatása végett kénytelen voltam a kérdést általánosságban felölelő irodalommal is foglalkozni. Ennek felsorolásától felment az a körülmény, hogy egyik jeles kutatónk a kérdéssel foglalkozva, részletesen is rámutatott a jelentékenyebb közlésekre.²

A kérdést, mint azt LENHOSSÉK nagyon helyes megjelölés-

¹ i. m. 13—22. l.

² LENHOSSÉK MIHÁLY: A nem képződéséről az állatországbán. Természettudományi Közöny XXXIV. k. 1902. 97—136.

Dr. M. v. LENHOSSÉK: Das Problem der geschlechtsbestimmenden Ursachen. Jena, 1903.

sel kiemeli, biológiai és statisztikai módszer segélyével iparkodtak megoldani. A biológiai módszer követői, és pedig első-sorban LENHOSSÉK, általában azt tartják, «hogy az ivadék neme sem a termékenyítés közben, sem utána nem állapíttatik meg, hanem már a termékenyítés előtt a petesejtnak megállapított tulajdonsága».¹

Hasonló álláspontot foglalnak el, különösen szem előtt tartva a kendert, mások is. Nevezetesen HEYER,² a ki már jó-részt a statisztikai módszer segélyével arra az eredményre jut, hogy a kender nemeinek számbeli viszonya állandó és «a két nem létrehozatala egy a növényfaj belső tulajdonságaival kapcsolatos törvény szerint megy végbe. A faj mindig ennek megfelelőleg fog szaporodni és a kedvező vagy kedvezőtlen viszonyok, melyek közt a növény tenyészik, nem képesek ezt a viszonyt megváltoztatni.» Ehhez csatlakozik FISCH³ is, a ki számos tenyészési kísérlet alapján arra az eredményre jut, hogy «a kender nemeinek számbeli viszonya állandó és pedig olyképen, hogy 100 nőre 64·84 him esik; külső, a mag csírázására vagy a növény fejlődésére gyakorolt legkülönbözőbb befolyások ezt a viszonyt nem zavarják meg; a magvak már némileg differenciálódtak». STRASSBURGER⁴ a *Melandrium album* és *rubrum* nemi viszonyaival foglalkozva, kimondja, hogy külső befolyások a számbeli viszonyt a nemek közt nem változtatják meg és hogy ez a szám «öröklés útján megszilárdult nagysággal bír, mely már a csírában kell, hogy meg legyen határozva». Végül még csak SCHULTZE-ra⁵ hivatkozom, a ki áttekintve a kérdésre vonatkozó irodalmat és saját kísérleteinek ered-

¹ i. m. 121. l.

² F. HEYER: Das Zahlenverhältniss der Geschlechter. Deutsche Landwirthschaftliche Presse XIII. 1886. Nr. 25. p. 163. — Bot. Centralblatt. XXVII. k. 96—99. l.

³ C. FISCH: Über die Zahlenverhältnisse der Geschlechter beim Hanf. Berichte d. deutsch. bot. Gesellschaft. Bd. V. 1887. 136—146. lap.

⁴ E. STRASSBURGER: Versuche mit dioecischen Pflanzen in Rücksicht auf Geschlechtsvertheilung. Biolog. Centralblatt 1901. 20. köt. 657., 689., 721., 753. l.

⁵ O. SCHULTZE: Zur Frage der geschlechtsbestimmenden Ursachen. Arch. f. mikr. Anatomie. 1903. LXIII. k. 197—254. l.

ményeit, tényként megállapítja, hogy «a nem meghatározása már a petében megy végbe» és hogy «a nem alakulásának problémáját az ontogenesishen kell keresni».

Ezekkel az eredményekkel szemben a kísérletezésen alapuló, nagybárra statisztikai módszer hívei már régebben is, de újabban is azt állítják, hogy a nem alakulására a növény tenyésztése folyamán ható tényezők befolyással vannak.

HOFFMANN H.¹ a megporzás idejének tulajdonít befolyást a nem alakulására. HABERLANDT FR.² kísérlete alapján azt véli, hogy beárnyékolás és bővebb trágyázás a kender fejlődését befolyásolja és hogy az ily módon kezelt csemeték valamennyien nőkké fejlődtek, de már a nagyobb mértékben keresztül vitt kísérletei ezt az eredményét megdöntötték.³ SACCARDO⁴ szerint a kisebb magvakból inkább nőgyének fejlődnek, valamint a homoktalajon is a nőgyének száma nagyobb. KARSTEN H. szerint a nagy dűsféherjéjű magvakból nőgyének fejlődnek.⁵

DÜSING⁶ is foglalkozik a kenderrel munkájában, és áttekintve a rá vonatkozó irodalmat, arra az eredményre jut, hogy a kender neme már igen korán meg van határozva, és legfeljebb az anya táplálkozásának tulajdonít befolyást az ivadékok nemére.

Jóval ezután MOLLARD⁷ a kender nemével foglalkozva, az uralkodó nézet ellenére arra az eredményre jut, hogy a közeg képes a kender nemét befolyásolni, és különösen a vegetatív szervek fejlődésére kedvezőtlen feltételek közt a himvirágok nővirágokká alakulnak.

¹ Zur Geschlechtsbestimmung. Bot. Zeitung. 29. Jhrg. p. 82—89., 97—109.

² Welche Einflüsse bedingen des Geschlecht der Hanfpflanzen? Botanischer Jahresbericht herausg. v. Dr. L. Just. II. Jhrg. I. Abt. (1874.) Berlin, 1876. 928. l.

³ U. o. V. Jhrg. (1877.) Berlin, 1879. 765. l.

⁴ P. A. SACCARDO: Sulle cause determinanti la sessualità nelle Cannape. Bull. d. Soc. Veneto-Trentina di Scienze. Nat. in Padova, 1879.

⁵ Congrès botan. Amsterdam 1865.

⁶ Die Regulierung des Geschlechtstverhältnisses bei der Vermehrung der Menschen, Tiere u. Pflanzen. Jena, 1884. 329. l.

⁷ Sur la détermination du sexe chez le chanvre. Comptes rendus de l'acad. d. sc. CXXV. jul.—dec. 1897. 792. l.

Ezeknek a kísérleteknek folytatásával MOLLIARD¹ megállapítja, hogy a kender virága eredetileg egyivarú; hogy a kender neme a magban még nincs biztosan meghatározva és anormalis viszonyok azt módosíthatják; hogy a vegetatív szervek fejlődésére igen kedvezőtlen viszonyok közt a himvirágok kezdetei nővirágokká fejlődtek és hogy ez az átváltozás egybefügg a fény gyengébb intenzitásával.

Hasonló eredményre jutott MOLLIARD² abban a kísérletében is, a melyben a hőmérséknek a nem alakulására való hatását tanulmányozta nem ugyan a kenderen, hanem a *Mercurialis annua*-n. Ennek az eredményéhez képest arra a következtetésre jut, hogy a nagyobb hőmérsék nem annyira a már a magban meghatározott nemű kender csirázására hat kedvezően, mint inkább a kész magnak nemét utólag határozza meg.

UEKKÜLL-GYLLENBAND,³ rámutatva a különböző vizsgálók, de különösen DÜSING eredményeire, kiemeli, hogy KLEBS, PRANTL, PFEFFER és mások az alsóbb rangú növényeken végzett megfigyelései szerint is a himneműek különösen a kedvezőtlen viszonyok, a nőneműek ellenben a kedvező viszonyok közt fejlődnek. Az eddigiek alapján azonban vélekedése szerint a nemek fejlődését befolyásoló hatások okairól semmi bizonyosat sem tudunk.

LAURENT⁴ legutóbb végzett kísérletei alapján arra az eredményre jut, hogy eltekintve a *Spinaciától*, a kender és a *Mercurialis annua* magjaiból kelt növényekre, a tápláléknak a nemek fejlődését és számát illetőleg semminemű befolyása nincsen.

¹ MARIN MOLLIARD: De l'hermaphrodisme chez la mercuriale et le chanvre. Revue générale de Botanique. T. X. Paris, 1898. 321—34. l.

² De l'influence de la température sur la détermination du sexe. Comptes rendus hebdomad. de l'acad. d. sciences de Paris. T. CXXVII. p. 669.

³ M. von UEKKÜLL-GYLLENBAND: Phylogenie der Blütenformen und der Geschlechtervertheilung bei den Compositen. Bibliotheca botanica. Heft 51. Stuttgart, 1901. 69., 71. l.

⁴ EMIL LAURENT: De l'influence de l'alimentation minerale sur la production des sexes chez les plantes dioïques. C. R. de l'Acad. des sc. de Paris 1903. novemb. 689. l.

A kérdésnek ilyen előzményei után a nem meghatározódásának kérdését nem óhajtom általánosan tárgyalni, miért is az irodalomból különlegesen azokat az adatokat és eredményeket állítottam össze, a melyek különösen épen a kenderre vonatkoznak.

Ezeket áttekintve a kérdés úgy áll, hogy a szerzők egy része a magban illetőleg a petében már meghatározottnak tartja a nemet, a másik része azt tartja, hogy a magban a növény neme nincs meghatározva és hogy erre a fejlődő növényre ható külső körülmények birnak befolyással. Az előbbit állítják LENHOSSEK, SCHULTZE, STRASSBURGER, ellenben az utóbbit hangoztatja többek közt különösen MOLLIARD.

A kenderrel végzett tenyésztési kísérleteim sorában különösen két olyan kísérleti sorozatot végeztem, a mely a két véleménynek megfelelő okokból kiindulva volt hivatva bizonyos eredményt adni.

Nevezetesen a végzett kísérletek szerint tény az, hogy a him- és nőkender száma közt bizonyos határozott viszony van, mely kisebb határok közt való ingadozástól eltekintve állandó és a melyet önkényes beavatkozásnak eddigelé nem sikerült megingatni. Maga STRASSBURGER is ennek a viszonynak a megváltoztatását egyedül a mesterséges kiválasztás útján tartja lehetőnek. HEYER is kimondja a viszony állandóságát és a nemek viszonyának alakulását az illető növényfajban rejlő törvényben látja.

Elismerve tehát azt, hogy ezek alapján a nem már a magban meg van állapítva, a kender fajára jellemző ezt a viszonyt az eddigi kísérletek eredményeiben megállapítottak tekinthetjük.

HEYER¹ szerint 100 nőre esik 85·7—89·7 him vagyis 100 himre 111·49—116·67 nő; HOFFMANN² szerint 100 nőre esik 66—87 him vagyis 100 himre esik 114·93—152·51 nő; HEYER³ későbbi közlése szerint 100 himre esik 109·81 vagy 114·30, sőt 115·21 nő; FISCH C⁴ szerint 100 nőre esik 64·84 him vagy

¹ DÜSING i. m. 317. l.

² Über Sexualität. Bot. Zeitung 1885. p. 145.

³ Bot. Cblatt. XXVII. k. 1886. 96—99. l.

⁴ Über Zahlenverhältnisse der Geschlechter beim Hanf. Ber. der deutsch. bot. Gesell. V. k. 1887. 136 146. l.

100 himre 154·23 nő; végül MOLLIARD¹ közlése szerint 100 himre esik 112 nő; második közlése² szerint 100 himre esik 112, 115 vagy 117 nő.

Ezeket az adatokat áttekintve, megállapított tényként kell tekintenünk, hogy a him egyének száma mindig kisebb, mint a nőké; sőt nagy általánosságban mondhatjuk, hogy 100 himre körülbelül 120·43 nőegyen esik. Az esetleges eltérések, mint ezt több kutató állítja,³ különböző fajták sajátosságai lehetnek.

Ennek tulajdonítható a FISCH által talált legnagyobb különbség a hímek és nők közt (100 him 154·23 nő), melyet csak HOFFMANN egyik adata közelít meg (152·51). FISCH tapasztalata alapján csak 5·5% eltérést enged meg ugyanazon fajtánál.

Ennek a számbeli viszonynak ismerete mellett tenyésztési kísérletem tervezetében az a feltevés vezetett, vajjon a magban rejlő nemi különbség nem ismerhető-e fel valamely tulajdonságából a magnak?

HEYERNEK⁴ abból az állításából kiindulva, hogy a nőegyenek állandóan nagyobb súlyúak, mint a hímek, azt tételeztem fel, hogy a nőmagvaknak nagyobb súlyúaknak kell lenni, mint a himmagvaknak, mert többek közt FRIEDRICH⁵ is hangsúlyozza, hogy a nehezebb vagy nagyobb magvak nehezebb vagy nagyobb növényanyag-mennyiséget hoznak létre. Rámutatott erre a körülményre az ugorkánál maga DÜSING⁶ is, midőn a mag súlyának a nem keletkezésére való befolyását eldöntetlennek állítja. Igaz ugyan, hogy erre vonatkozólag végzett már előbb kísérletet HABERLANDT Fr.⁷, de az elért eredményben a nemek viszonya csak nagyon csekély eltérést mutatott a rendestől.

¹ Rev. general. bot. X. k. 1898. 321. l.

² Bull. d. la soc. bot. de France L. k. 1903. 212. l.

³ FISCH i. m. 146. l.

⁴ DÜSING i. m. 328. l.

⁵ JOSEF FRIEDRICH: Über den Einfluss der Fichtenzapfen und des Fichtensamens auf des Volumen der Pflanzen. Zentralbl. f. d. gesamte Forstwesen. 1903. 19. l.

⁶ i. m. 332. l.

⁷ Welche Einflüsse bedingen das Geschlecht der Hanfpflanzen? Centralblatt für Agrikulturchemie. VII. Bd. Jan.—Juni 1875. 399. l.

Tekintettel ezekre a kételyekre, pontos kísérleteket végeztem, hogy a való tényállást megállapítsam.

Ebből a célból első sorban a kender magvának, helyesebben mondva a termésének súlyát állapítottam meg. Az irodalom tanúsága szerint a kender termése átlagosan 10—20 mg.¹ Az én pontos méréseim szerint azonban a kender termésének a súlya 5—35 mg. közt változik, miért is a tenyésztési kísérletre felhasznált terméseket súly szerint hat csoportba osztottam.² Tekintettel pedig SACCARDO³ ama tapasztalatára, hogy a homoktalajon több nőgyén fejlődik, a tenyésztési kísérletek talajául az egyetemi növénykertnek legsivárabb homoktalaját választottam, a melyen a kender termései egymástól 10 cm.-nyi távolságra lettek elvetve; a sorok közti távolság 25 cm. volt. A kísérletet az 1900. évben 1000 pontosan megmért kenderterméssel végeztem, az 1901. évben 2000 termést vetettem el, melyeknek eredménye a mellékelt táblázatban van feltüntetve. Az 1903. és 1904. évi ellenőrző kísérletek eredményeit nem közlöm, mert az anormális időjárás miatt nem sikerültek a kívánatos mértékben. A táblákba foglalt adatokból a következő eredményeket állapíthatjuk meg. Az 1900. évi kísérletben 100 termés közül 71·5, az 1901. évi kísérletben 100 termés közül 72·7 csirázott, a mely eredmény a megszokott minimumnál jobb, de az átlagon alul marad.⁴

¹ Dr. C. HARZ: Landwirthschaftliche Samenkunde. I. Bd. Berlin, 1885. 267. l. 50.000—100.000 magnak a súlya 1 kg.

² Az 1900. évi kísérletre használt 1000 termés súlya volt 20070 mg, vagyis 1 termés átlagosan 20 mg. volt; az 1901. évi kísérletre használt 2000 termés 33970 mg. volt, vagyis 1 termés 16·98 mg. volt. Az 5 mg.-nál könnyebb terméseket nem használtam fel, mert a vizsgálatnál kiderült, hogy az 5 mg.-nál könnyebb termések léhák voltak.

³ Bull. soc. venet. sc. nat. 1879. I. p. 19.

⁴ HARZ i. munkája 33. l. szerint a kenderterméstől átlag 85 csirázik; a budapesti magvizsgáló állomás jelentései adatainak összefoglalásából átlagos számul 72·42 számot kapunk, a mely szám az én tenyésztesem eredményével megegyező.

Az 1900. évi kísérlet 1000 drb. kenderterméssel.

Csoport száma	Elvetett termések száma	Egyes termés súlya		Ki nem kelt termések		Virágzott				Nem virágzottak		Kikelt termések		Jegyzet
		határ-értékben	közép-értékben	száma	%	hím		nő		száma	%	száma	%	
						szám	%	szám	%					
I.	5	5-10 mg	7.5 mg	5	100	—	—	—	—	—	—	—	—	
II.	86	11-15 mg	12.5 mg	29	33.7	33	57.9	24	42.1	—	—	57	66.2	
III.	402	16-20 mg	17.5 mg	148	36.8	123	48.9	130	52.1	1	0.4	254	63.1	Legerősebben fejlődtek, különösen vastagságban.
IV.	404	21-25 mg	22.5 mg	80	19.8	152	46.9	171	53.1	1	0.3	324	80.1	Előbbinél vékonyabbak s kevésbé alcsonyabbak.
V.	97	26-30 mg	27.5 mg	21	21.6	39	51.4	37	48.6	—	—	76	78.3	Magasság kisebb az előbbinél, de jóval vékonyabbak.
VI.	6	31-35 mg	32.5 mg	2	33.3	1	25.0	3	75.0	—	—	4	66.6	Vastagság mint az előbbi, de alacsonyabb.
Összesen	1000			285	28.5	348	48.6	365	51.4	2	0.2	715	71.5	

Az 1901. évi kísérlet 2000 drb kenderterméssel.

Csoport- szám	Elvetett ter- mések száma	Egyes termések súlya		Ki nem kelt termések száma	Virágzott				Nem virágzott		Kikelt termések		A virágzott				
		határ- értékben	közép- értékben		hím		nő		szám	0 ₀	szám	0 ₀	szám	0 ₀	hím	nagy kicsi	nő
					szám	0 ₀	szám	0 ₀									
I.	96	5—10 mg	7·5 mg	68	13	57·2	12	42·8	3	3·1	28*	29·1	—	—	—	—	
II.	495	11—15 mg	12·5 mg	107	194	50·0	194	50·0	—	—	—	388	78·4	131	63	127	
III.	963	16—20 mg	17·5 mg	240	350	48·4	367	51·6	6	0·6	723*	75·1	266	84	247	120	
IV.	413	21—25 mg	22·5 mg	117	153	51·4	143	48·6	—	—	—	296	71·7	109	44	93	
V.	31	26—30 mg	27·5 mg	12	13	68·4	6	31·5	—	—	—	19	61·3	10	3	6	
VI.	2	31—35 mg	32·5 mg	—	—	—	2	100	—	—	—	2	100	—	—	2	
Összesen	2000			546	723	49·6	724	49·8	9	0·6	1456	72·7	516	194	475	237	

* A 28 és a 723 közül 6 egyén elpusztult, miért is nem lehetett számba venni.

A tenyésztés folyamata alatt elveszettek, tehát nem virágoztak száma aránylag nagyon csekély volt. Úgy, hogy az 1900. évi kísérletben virágozott 713, az 1901. évben 1447 tő. Az 1900. évi, tehát I. kísérletben virágzó 713 egyén közül volt 348 hím, 365 nő, vagyis 100 hímre esett 104·88 nő; az 1901. évi, tehát a II. kísérletben virágozott 1447 egyén közül volt 723 hím és 724 nő, vagyis 100 hímre esett 100·13 nő. Ilyképen tehát ez az eredmény nem közelítette meg azt az átlagot, melyet HEYER, FISCH és mások nyertek, bár az én kísérleteimben is a nők száma valamivel nagyobb volt, és ilyenképen beigazolódott a SACCARDO tapasztalatával szemben, hogy a homokon a nők száma nem emelkedik.

Ha azonban a termések súlyaik szerinti csoportjait veszem szemügyre, kitűnik, hogy a termés súlyából nem lehet a kicsirázott növény nemére következtetni. Mégis ha az egyes csoportokat vesszük közelebb szemügyre, akkor az tűnik ki, hogy a közép súlyú termésekből (10—25 mg., tehát II., III., IV. csoportban) a nőgyének többnyire nagyobb számmal fejlődtek; a nagyon súlyos (31—35) termésekből túlnyomóan nők fejlődtek. Egyes csoportokban, mint az I. kísérlet V. csoportjában és a II. kísérlet IV. és V. csoportjában, a hím egyének száma nagyobb. Úgy, hogy ezekből az adatokból némiképp arra is lehetne következtetni, hogy a rossz, táplálékban szűkölködő talajon a nők száma csökken.

Tekintettel voltam a virágzó egyének fejlettségére is; igaz ugyan, hogy az első kísérletben mind a két nemű egyéneket összefoglaltam, mégis kitűnik az I. kísérletből, hogy az átlagos súlyú magvakból fejlődött egyének legerősebbek, a súlyosabbakból fejlődöttek szára bár rövidebb, de vastagabb és így erőteljesebb alkotásúak. A II. kísérlet szerint a 20 mg.-nál nehezebb termésekből általában több erőteljesebb egyén fejlődött, és pedig a hímek sorában nagyobb volt az erőteljes egyének száma, mint a nők sorában, vagyis ha áll az a tapasztalat, hogy a nőgyének általában erőteljesebbek a hímeknél, úgy a homoktalajon mégis a nőgyénekkel szemben a hímek jobb gyarapodást mutatnak.

Mindent összevéve tehát nem sikerült a termések súlya

és neme közt valaminő összefüggést kideríteni. Hasonló eredményt ért el MOLLIARD¹ is, a midőn a termések különböző súlya és neme között keresett összefüggést.

Ez a sikertelen eredmény arra készítetett, hogy magát a kendertermést is vizsgálat tárgyává tegyem, keresve különösen azt, hogy a termés, illetőleg a makk súlyának a gyarapodásával tulajdonképen a makk melyik része gyarapodik súlyban, hogy ily módon felvilágosítást nyerjek a felől, vajjon előbbi kísérletemnek sikertelensége nem talál-e esetleg magyarázatot a termés részeinek súlyviszonyában?

A termések illetőleg magvak súlyáról, de különösen ezek részeinek súlyáról az irodalomban nem sok adat van közölve, ezek is nagyjából a mezőgazdasági magvakra vonatkoznak. A kender makkjának súlyára vonatkozó adatokról már előbb megemlékeztem. A kender-makk egyes részeire vonatkozólag az adatok hiányoznak, csak HARZ² emlékszik meg arról, hogy a maghéj, a testa az egész magnak csak 0·7 százalékát teszi ki. Ezt az adatot azonban a súlyviszonyok megítélésére nem használhattam, mert hiszen az én céljaimra nemcsak a maghéj, de a terméshéj súlyát kell szembe állítanom a magfehérje és a csira súlyával, hogy kideríthessem, vajjon a termés nagyobb súlya nem jár-e együtt a csira és magfehérje súlyának gyarapodásával, a mely tényből azután egyrészt a csira erőteljesebb fejlődésére, másrészt a csira fejlődésének legelső szakában nagyobb mértékű táplálkozására következtethettem volna.

Hogy tehát meghatározhassam egyrészt a csira és magfehérje, másrészt a termés és maghéj súlyát, először az ép termés súlyát határoztam meg, azután óvatosan eltávolítottam a terméshéját és a maghéját, a mi meg lehetős nehézséget okozott a csira illetőleg a magfehérje (endospermium) görbülése miatt, és azután külön-külön megmértem a két részt. Erre vonatkozó mérési adataimat a mellékelt táblázat tünteti fel, melyen 35 termésnek 1. a súlya, 2. a magfehérje és a csira súlya, 3. a termésnek és maghéjának a súlya, végül 4. a két utóbbi súly közötti viszonyszám van feltüntetve.

¹ Bull. d. l. soc. bot. d. France. T. 50. Paris, 1903. 212. l.

² Landwirtschaftl. Samenkunde. I. Bd. 333. l.

A kender terméshéja és maghéja, továbbá a magfehérje és a csíra súlya.

Sorszám	Termés súlya g-okban	Magfehérje és csíra súlya	Termés- és mag- héj súlya	Viszonyszám
1	0·0167	0·0098	0·0069	1·4203
2	0·0167	0·0098	0·0069	1·4203
3	0·0265	0·0173	0·0092	1·8804
4	0·0258	0·0142	0·0116	1·2241
5	0·0306	0·0182	0·0124	1·4677
6	0·0237	0·0142	0·0095	1·4947
7	0·0195	0·0127	0·0068	1·8677
8	0·0263	0·0177	0·0086	2·0581
9	0·0195	0·0136	0·0059	2·3050
10	0·0214	0·0150	0·0064	2·3437
11	0·0217	0·0139	0·0078	1·6539
12	0·0185	0·0120	0·0065	1·8461
13	0·0249	0·0169	0·0080	2·1125
14	0·0314	0·0219	0·0105	2·0857
15	0·0104	0·0068	0·0036	1·8889
16	0·0295	0·0186	0·0109	1·7064
17	0·0288	0·0176	0·0112	1·5714
18	0·0162	0·0099	0·0063	1·5714
19	0·0111	0·0075	0·0036	2·0833
20	0·0154	0·0080	0·0074	1·0810
21	0·0289	0·0176	0·0113	1·5575
22	0·0180	0·0115	0·0065	1·7692
23	0·0147	0·0090	0·0057	1·7544
24	0·0329	0·0216	0·0113	1·9115
25	0·0160	0·0105	0·0055	1·9090
26	0·0288	0·0193	0·0095	2·0316
27	0·0127	0·0077	0·0050	1·5400
28	0·0211	0·0132	0·0079	1·6709
29	0·0286	0·0184	0·0102	1·8039
30	0·0137	0·0095	0·0042	2·2619
31	0·0265	0·0178	0·0087	2·0459
32	0·0132	0·0083	0·0040	1·6939
33	0·0261	0·0178	0·0083	2·1446
34	0·0297	0·0192	0·0105	1·8286
35	0·0142	0·0096	0·0046	2·0869
Összeg	0·7597	0·4866	0·2731	63·0924
Átlag	0·0217	0·0139	0·0078	1·8026

Ha végig tekintek az egész sorozaton, kitűnik, hogy a két rész közötti viszonyszám átlagosan 1·8026 vagyis a termés belső részei ennyiszor nagyobb súlyuak, mint a külsők. A két rész közötti legnagyobb eltérés 2·3437, a legkisebb pedig 1·0810, a mely két szám között az eltérés 1·2627, tehát az átlagos viszonyszámot megközelíti.

Kitűnik továbbá a táblázatból, hogy a termés nagyobb súlyával nem áll mindig arányban a magfehérje és a csira súlyának a gyarapodása, hanem sokszor a termés és maghéj súlya aránylagosan nagyobb. Pl. az 5. és 20. számú termésben a két rész közt nagyon csekély az eltérés, ellenben a 10. számúnál a belső részek majd háromszor súlyosabbak a külsőknél. Ezekről a jelentős eltérésektől eltekintve a két rész jóformán egyenletes gyarapodást mutat.

Ennek a két résznek a viszonyát az egész mag súlyához is megállapíthatjuk. Ilyképen azt találjuk, hogy pl. a 6. számú termésen, mely 0·0237 g, tehát a súlyosabbakhoz tartozik, a csira és a magfehérje 59·91%, a héj pedig 40%-ot tesz ki; a 10. számún, mely 0·0214 g nehéz, a belső rész 70·09 a héj pedig 29·91%; a 20. számú termésen, mely 0·0154 g, a csira 51·94%, a héj pedig 48·05%. És ha a 35 mérés adatainak átlagát keresem, úgy azt találom, hogy a 0·0217 g súlyú termésen a csira 64·05%-át, a héj pedig 35·94%-át teszi ki az az összes súlynak. Vagyis ugyanazt az eredményt találom, mint fentebb, hogy a csira és a magfehérje körülbelül kétszeres súlyosabb a mag és termés héjánál.

Úgy, hogy ezekből a számadatokból biztosan megállapítható az a tény, hogy a termés súlyosbodásával nem csupán a csirának és a magfehérjének a súlyosbodása jár együtt, hanem egyuttal a termés és maghéj súlyosbodása is. Továbbá, hogy a különböző magvak belső részeinek összehasonlításából az tűnik ki, hogy a legnagyobb súly legfeljebb 2·9 szer nagyobb a legkisebbnél ($\frac{219}{75}$). Végül, hogy átlagosan 0·0139 g súlya van a belső részeknek.

Ezek az adatok azonban eléggé eltérők arra nézve, hogy a magból csirázó fiatal növényke jobb és rosszabb táplálkozására és így az irodalomban itt-ott feltűnő adatnak megfelelőleg a him és nő egyének fejlődésére lehessen következtetni, és

pedig olyképen, hogy a súlyosabb termésekből csakugyan a jobb táplálkozás folytán a nő-egyének fejlődjenek. Minthogy pedig ezt az én fentebb ismertetett kísérleteim is megczáfolják, ebből önként következik, hogy a nemek meghatározására sem a mag súlyából, sem pedig a magfehérje és csíra súlyából nem lehet következtetést vonni.

Minthogy azonban az én kísérletem eredményei a hímek és nők átlagos arányától némi eltérést mutatnak, arra is lehetett következtetnem, hogy a nemek kialakulására mégis csak bizonyos külső tényezők is befolyanak.

Erre nézve is megpróbálkoztam feleletet nyerni következő kísérletemben. Nevezetesen több forrás szerint a növények megsérülése fokozottabb tevékenységre ingerli a szervezetet, a minek egyik eredménye volna a nőszervek fejlődése, illetőleg a nőegyének alakulása. Megegyeznék ezzel MOLLIARDnak¹ az a tapasztalata, hogy a tenyészteti szervekre kedvezőtlen tényezők hatása alatt is nővirágok fejlődnek nagyobb számmal.

Erre vonatkozólag érdekes SCHWEINFURTH² közlése, mely szerint Algir déli oázisainak lakói azt hiszik, hogy az ember képes közbeavatkozásával a datolyapálmát nemének megváltoztatására kényszeríteni. Ugyanis a datolyapálma-magvakból kikelt növények közül tapasztalás szerint mintegy 80% hím. Hogy ez arányon változtassanak, a fiatal (2—3 éves) növények leveleit, levélkéit a főér mentén kétfelé hasítják. Az eredményről azonban nem számol be.

MÜLLER N. J. C.³ szerint hasonlóképen nyilatkozik már SPALLANZANI (1786) és BERNHARDI (1804), továbbá AUTENRIETH (1821) a kenderre nézve; ezek szerint a nőegyének néha hím-virágokat is fejlesztenek, ha megcsönkítettak.

Újabban GALLARDO⁴ közlése szerint BLAVET a *Thladiantha*

¹ Sur la détermination du sexe chez le chanvre. Comptes rendus de l'acad. d. sc. 125. k. 1897 jul.—dec. 792. l.

² Dr. GEORG SCHWEINFURTH: Über die Kultur der Dattelpalme. Gartenflora. 50. évf. 1901. 546. l.

³ Handbuch d. allg. Bot. II. Theil. Heidelberg, 1880. 450. l.

⁴ ANGEL GALLARDO: Sobre los cambios de sexualidad en las plantas. Comunicaciones del Museo nacional de Bueonos Aires. To I. 1901. 279. lap.

dubia BUNGE egyedeit tenyésztve mindig csak nővirág egyedeket kapott, a mennyiben egyedei mind egy gumóból származtak. A midőn azután a gumókat szétvagdosta; az ily módon megsérült gumókból himvirágú egyének fejlődtek. Ezen az alapon magam is megpróbálkoztam bevezető kísérletképen a *Thladiantha*-gumókkal, de az eredmény nem igazolta teljesen BLAVET tapasztalatát. Ugyanis a budapesti egyetemi növénykertben hosszú évek során át nem fejlődött csak himvirág a *Thladiantha* egyéneken, a mióta (1902) azonban a gumókat szétvágva ültettem el, azóta termést is érlelnek, mert van úgy nő, mint himvirág a különböző egyedeken.

A kender termésével végzett ilyennemű kísérletemben abból a feltevésből indultam ki, hogy a fejlettebb növényeken a nem már sokkal határozottabban van kialakulva, hogysem azon változtatni lehetne a fentebb említett szerzők ellenkező állításainak daczára. sőt azt is feltételeztem, hogy a termésben, illetőleg a magban is meg van már szabva a növény neme. Kérdésesnek tekintettem azonban azt, vajjon a fiatal, csírázásnak még nem indult csíra megsebzése folytán nem fog-e megváltozni a nemek aránya?

A kísérlet keresztülvitele sok nehézséggel járt, mert a termésbe és a maghéjba zárt csírárt kellett úgy megsértenem, hogy csírázása vagyis kifejlődése mégis lehetővé váljék, továbbá a sérülés folytán keletkezett sebet kívülről úgy kellett elzárnom, hogy ezen át káros organismusok ne juthassanak egykönnyen a növénykéhez.

Ebből a célból számos előleges kísérletet végeztem, melyeknek eredménye az volt, hogy azok a magvak csíráztak ki legnagyobb mennyiségben, a melyeknek sebet collodiummal vontam be. A magvak sebzésére igen vékony tűt használtam. Először megpróbálkoztam a csíra gyököcskéjének a megsértésével, de ez nem vezetett eredményre, mert 500 ily módon megsértett csírából csak 17 növény fejlődött ki, a mi természetes is, mert a termésen és maghéjon át, tehát úgyszólván látatlanul kellett a sérülést megejteni. Másodsorban a sziklevelek megsebzésével próbálkoztam meg és némikép kielégítő eredményt, bár kétségtelen, hogy a csíra sajátságos helyzeténél fogva

bizony sokszor a plumula is megsérült, miért is a kifejlődött növények száma aránylag csekély volt. Ezen ismételve végzett újabb kísérleteim eredményeinek a bevárása okozta, hogy eredményeimet csak most tehetem közzé.

A kísérleteket ugyancsak a budapesti egyetemi növénykertben végeztem rozsz, sivár homoktalajon és pedig sziklevelét megsebzett és a sebet külsőleg collodiummal elzárt makkokkal. A kísérlet eredményét a következő táblázat mutatja be:

Csoport- szám	Termések súlya mg-okban	Elvetett termések száma	Kikelt, illetőleg virított	Hím	Nő
I.	5—10	7	0	0	0
II.	11—15	73	18	7	11
III.	16—20	203	15	5	10
IV.	21—25	178	4	0	4
V.	16—30	32	1	1	0
VI.	31—35	7	0	0	0
összesen		500	38	13	25

E szerint az 500 magból csak nagyon kevés csirázott ki, mintegy 7·6 százalék, a mi a fentebb feltüntetett csirázási százalékkal szemben elenyésző csekélység, csak mintegy tizedrésze. Legtöbb csirázott ki a II. és III. csoportban, a hol már a nők száma túlsúlyban van a hímekkel szemben, a mint hogy az egész kísérlet eredményéből kitűnik, hogy a nők száma általában nagyobb mint a hímeké. És a míg előző kísérletemben a nők száma (100 hímre 100·13, illetőleg 104·88 nő) alul maradt az átlagon (100 hímre 120·43 nő), úgy ebben a kísérletemben, minthogy a 38 egyénből 13 hím és 25 nő fejlődött, 100 hímre 192·30 nő esik. Ez az eredmény némiképp megközelíti MOLLIARD-nak¹ a kedvezőtlen viszonyok közt növekedett kenderen nyert eredményét (100 hímre 290 nő).

Ezt az eredményt nem szabad ugyan döntőnek tekintenem, mert aránylag csekély számokkal végeztem a kísérletet, mégis bizonyos mértékű figyelmeztetésnek kell vennem arra nézve, hogy a magban, legalább a kender magjában, még nincs a nem teljes határozottsággal megállapítva, hanem hogy a nem mégis képes bizonyos külső hatásokra megváltozni.

¹ Comptes rendus 125. k. 1897. 793. l.

Ezt az utóbbi körülményt erősíti meg GOEBEL-nek¹ az a tapasztalata, »hogy a chlorophyll-tartalmú növények alaki viszonyai nincsenek előzetesen a csírasejtben megállapítva, hanem a fejlődés folyamán határozódnak meg». Nemcsak meg erősíti a tényállást, de egyenesen bizonyítja KLEBS-nek² kísérlet útján elért az az eredménye, hogy egy növény virágzó részeinek vegetatív részekké való átalakulása függ a határozott külső tényezők kellő időben való behatásától. Különben erre vonatkozó elég kedvező eredményekkel biztató kísérleteket kezdett meg HEDWIG³ is, kimutatva, hogy a külső körülményeknek van befolyásuk a nemek alakulására.

Bizonyságul szolgál különben erre még a többek megfigyelte fűzfa, mely évek hosszú során át csak himvirágokat fejlesztett és azután bizonyos idő multán a himvirágokon kívül még nővirágokat is, és androgyn virágzatú lett.⁴ Hasonlót figyeltem meg a szelid gesztenyén Szerednyén, a hol egy fiatalabb fa évek hosszú során át csak himvirágokat fejlesztett, ily módon meddő maradva, úgy hogy a tulajdonos ki akarta vágatni, míg azután egyszerre, állítólag a nagyobb mélységű vagy másnemű trágyázás folytán, nővirágokat is kezdett fejleszteni, s továbbra azután normalis gesztenyefa módjára viselkedett.

Hasonló esetet figyelt meg BRUNOTTE⁴ a kenderrel egy családba tartozó komlón, a melyre vonatkozó vizsgálatait azzal a következtetéssel fejezi be, hogy a komló rendesen kétlakú, de képes változni is és egylakú egyénné fejlődni.

Mindezek az esetek és kísérleti eredmények arra engednek következtetni, hogy ha áll is az a tétel, miszerint a nem

¹ GOEBEL K.: Archegoniatenstudien. Flora. 80. Bd. 1895. 115. l.

GOEBEL K.: Die Grundprobleme der heutigen Pflanzen-morphologie. Biolog. Centralblatt. XXV. k. 1905. 79. l.

² GEORG KLEBS: Über Variationen der Blüten. Jarb. f. wiss. Bot. 42. k. 155. l.

³ RICH. HERTWIG: Über Problem d. sexuellen Differenzierung. Verh. d. deutsch. zool. Gesellsch. Breslau. 1905. 1961.

⁴ PENZIG i. m. — BORBÁS VINCZE: Természettudományi Közlöny XXXI. k. 485. l.

⁴ CAMILLE BRUNOTTE: Sur une liane de Houblon. Rev. gen. de Bot. 17. k. 1905. 109. l.

már a magban van megszabva, illetőleg már a petesejtben van meghatározódva, mégis lehetnek esetek, a melyekben a nemnek ez a megszabása még nem öltött teljes határozottságot, vagyis legalább hajlandósággal bír a megváltozásra.

Ezt a feltevést igazolják fentebb közölt kísérleteim eredményei is. De ugyanezt igazolják a többi kísérlettől eltekintve különösen MOLLIARDnak¹ üvegházban végzett kísérletei is, a melyek nemcsak a nemek változására szolgáltatnak adatokat, a mennyiben a kendernél a him- és nőgyének számát ingadozónak találta, hanem még arról is bizonyosságot tesznek, hogy az egyivarú virágok képesek kétivaruakká alakulni.

MOLLIARD a változás okozóját a tenyészteti szervek fejlődésére ható kedvezőtlen tényezőkben keresi és különösen a gyengébb fény hatásában véli megtalálni. És ha bizonyos kétséggel fogadjuk is a kísérletek eredményeit, különösen kételkedve a kísérletek pontos keresztülvitelében vagy a ható tényezők meghatározásában, mégis a természetben megfigyelt jelenségek bizonyos mértékben gondolkodóvá tehetnek. E tekintetben különösen fontosak azok a megfigyelések, melyeket PRAIN² végzett a kenderen Kelet-Indiában, s a melyeknek eredménye, egybehangzóan DELFINO, MACCHIATI, MOLLIARD nézetével, megállapítja, hogy a Cannabis lényegében véve egyivarú, de bizonyos körülmények közt képes bisexualissá alakulni. Nem merem állítani, de a kísérleti eredmények és a természetben való megfigyelések alapján nincs egészen kizárva az a lehetőség, hogy különösen a bisexualitásra való hajlandóságot illetőleg különösen a nagyobb hőmérséknek van befolyása, legalább erre engednek következtetni MOLLIARD üvegházban végzett kísérletei és PRAIN megfigyelései a melegebb klímájú Indiában. Ez utóbbi a meleg éghajlatú Indiában figyelt meg nagyobb számú eltérést, míg előbbi az üvegház mindenestre melegebb levegőjében nyert a rendestől nagy mértékben eltérő eredményt, hiszen 100 him

¹ Revue generale de Bot. X. k. 1898. 323—334. Comptes rendus 125. k. 1897. p. 793.

² D. PRAIN: On the morphology, teratology and dielinism of the flowers of Cannabis. Scientific memoirs of the government of India. Nro 12. Calcutta, 1904.

egyénre kísérletében 425 nő egyén esett.¹ De ha erre az átalakulásra meg van adva a lehetőség, legalább a kenderben, úgy meg kell lenni a nem később jelentkező elhatározódására való képességnek is. Ilyképen azután az eddigi kísérleteknek és ezek sorában az én kísérleteimnek eredményeit is számba kell venni, bármennyire elismerjük is a tisztán biológiai irányú kutatások eredményeinek jogosultságát, a mely eredmények azonban nem mindig bizonyítják azt, hogy a nem elhatározódása már a petesejtben vagy az embryóban van megszabva.²

Mindezeket figyelembe véve, kísérleteimnek eredményeként megállapíthatom, hogy a kender nemének elhatározódására vonatkozó ismereteink még nem teljesek, habár valószínű, hogy a kender nemének kialakulására, mint azt kísérleteim is ha nem is igazolják, de legalább gyanítatják, a kellő időben ható külső körülmények elhatározólag hatnak.

Nem hallgathatom még el végezetül azt a lehetőséget sem, hogy a kenderen megfigyelt eme ingadozásai a nemeknek esetleg a kendernek még nem teljesen rögzítődött nemi tulajdonságával állnak összefüggésben, a mennyiben nem zárkozhatunk el attól a gondolattól, hogy esetleg a kender hajlandósággal bír a diclinismusból monoclinicus növényynyé való átalakulásra, vagy hogy filogeniai fejlődésében egyalakúságából még nem rögzítődött teljesen a kétalakúság. A mely tulajdonságokból, ha a további kutatások igazolnák a feltevést, a nemnek ingadozásai is magyarázatot nyernének.

¹ MOLLIARD: De l'influence de la temperature sur la determination du sexe. Comp. Rend. 1898, p. 669—671.

² HERTWIG i. m.

A SZÍNES FÉNYINGEREK HATÁSÁNAK GYÖNGÍTÉSE FEHÉR FÉNYNYEL.¹

REVÉSZ GÉZÁ-tól.

I. Kísérletek a színküszöb meghatározásával.

Ha objektíve ugyanazon szürke felületet egyszer fehér, más-szor fekete alapra helyezzük, akkor azt vesszük észre, hogy a fehér alapon nyugvó szürke felület az egyidejű kontraszt hatása folytán jóval sötétebb, mint a fekete alapon levő. Ha már most azt akarjuk, hogy a két objektíve egyenlő szürke felület egyforma világosnak lássék, a fehér alapon levő szürkének fehérségét meg kell nagyobbítanunk.

Vizsgálatunk tárgyát elsősorban azon kérdés képezi, vajjon két subjektív egyenlő világosságú szürke felületen a színérzet egyenlő intenzitású színínger mellett lép-e fel, vagy különböző mellett, illetve vajjon egyenlő erejű színínger szükséges-e mindkét felületen a színérzet küszöbének eléréséhez?

A kísérlet berendezése igen egyszerű. Állványra két forgatható korongot erősítünk. A korongok elektromotor által oly gyors forgásba hozhatók, hogy az eleinte fellépő intermittálás végkép megszűnik és a felület egyöntetű érzetet kelt. A két forgó korong mögé indifferens háttér gyanánt közepes fehérségű szürke posztófalat alkalmaztam. A laboratórium fala, melyben a kísérletek végrehajtottak, világos szürkére volt befestve. A kísérleteket nappal, és a mennyre csak lehetett, tiszta kék ég mellett végeztem. Az ablakok északra nyíltak, tehát a nap sugarai közvetlen nem hatoltak be a szobába, minek folytán a

¹ A göttingeni egyetem pszichológiai intézetében készült dolgozat. Intézeti igazgató Dr. MÜLLER G. E. tanár, titkos tanácsos.

világosság körülbelül állandó erős maradt. Rendszerint dél-előtti 10 és 1 óra között dolgoztam. Hogy azonban lehetőleg pontosan járjak el, a külső világítást az általában használt egyszerű meteorológiai módszer szerint minden kísérlet előtt és után meghatároztam és feljegyeztem.¹

A kísérleti személy a készüléktől 1 m. távolságra ült a két korong előtt. Mögötte fejtámaszt állítottam fel, mely megakadályozta, hogy a kísérleti személy a kísérletezés folyamán fejének helyzetét változtassa. A kísérletezés a világossághoz alkalmazkodott (helladaptiert) szemmel történt. Minden egyes megfigyelés után a kísérleti személy, hogy fény- és színérzeti semleges hangulatát fentartsa, szemét az előtte felállított sötét posztófalon pihentette.

Mindkét korong egyenlően volt megvilágítva. Fontosnak tartottam még ezeken kívül a korongok helyzetét a kísérletezés folyamán bizonyos előre meghatározott séma szerint és a psychophysikai módszertan kívánalma szerint egymással felváltani. A tér- és időbeli helyzet változása, Wechsel der Zeit- und Raumlage.)²

A korongok szerkezete következő volt: Az I. korong három concentrikus, különböző átméretű korongból állott. A legnagyobb és a legkisebb *fekete* posztópapírból volt kivágva, míg a középső (valójában korongesoport) három egyforma átmérőjű, egy

¹ Az ég felhőzetének öt fokát állapítottam meg, melyeknél megint, az első kivételével, két-két árnyalatot különböztettem meg a következő módon:

I. fok az égboltozat egész világos			
II.a	«	$\frac{1}{4}$	része gyengén beborulva
II.b	«	$\frac{1}{4}$	« sötétén «
III.a	«	$\frac{1}{2}$	« gyengén «
III.b	«	$\frac{1}{2}$	« sötétén «
IV.a	«	$\frac{3}{4}$	« gyengén «
IV.b	«	$\frac{3}{4}$	« sötétén «
V.a	«	$\frac{4}{4}$	« gyengén «
V.b	«	$\frac{4}{4}$	« sötétén «

Különben megjegyzem, hogy az itt tárgyalt kísérleteknél az eredmény egészen *független volt a nappali világosság abszolút nagyságától.*

² A térbeli helyzet változtatása a nyert értékeknél szembeötlőbb és a kiszámított főértékekre befolyással bíró változást nem idézett elő.

fekete, egy fehér és egy színes papirkorongból készült. Ezen három korong a MAXWELL-féle korongok mintájára félátmérőjében át volt szelve, úgy, hogy egymásba illesztve, egymást részben elfedték. Ha valamelyik korong kisebb vagy nagyobb részét el akartuk fedni, akkor a másik két korongot csak elhúztuk rajta. Minthogy a legnagyobb korong legalul, a három közép nagyságú e fölött, a legkisebb pedig legfelül feküdt, forgás alkalmával gyűrű képződött fekete alapon, mely a fehér, fekete és színes körszeletek egymáshoz való viszonya szerint különböző világosságban és színességben jelent meg.

A II. korong épen úgy volt szerkesztve, mint az I. korong, csupán az alap (a legfelsőbb és legsalsóbb korongok), melyen a középső 3 összetelható korongból alakult gyűrű mutatkozott, volt *fehér*.¹ A két korong a mennyre csak lehetett közel feküdt egymáshoz, azért, hogy a két gyűrű successiv megfigyelésénél ne kelljen a szemmel nagyobb mozgást végezni és hogy egyidejűleg is lehessen a két gyűrűt összehasonlítani. Ezen simultan megfigyelés megkönnyítése végett a két korong között az állványon egy piros papírfolt mint figyeléspont volt alkalmazva.

Minthogy a fentemlített kérdés szerint azt kell meghatározunk, hogy az objektív színínger minő intenzitásánál lép fel mindkét gyűrűn a színérzet küszöbe, ha ugyanis a két gyűrű subjektive egyenlő világosságú: első dolgunk lesz a két gyűrű között egy optikai világossági egyenletet (Helligkeitsgleichung) előállítani. Minthogy azonban világossági egyenlet előállítása alkalmával az összehasonlítandó gyűrűk successiv fixírozásával nagyobb hibák keletkezhetnek, azért mindkét gyűrű subjektív

¹ A középső gyűrű átmérője mindkét korongcsoportnál 1 cm. volt. Ezen szélesség mellett a gyűrű egész szélességében minden kísérleti személynél egyenlő világosnak tűnt fel, ámbár elvileg tekintve a dolgot, különösen a fehér alapról (II. korong) indukált kontraszthatás a gyűrű széleitől számítva különböző távolságban változó. 2 cm. átmérőjű gyűrűnél ezen jelenség már szembeötlő, míg 1 cm.-nél kisebb szélesség mellett optikai kísérletek véghezvitele nehézségbe ütközik.

Hogy ne komplikáljam a körülményeket, a két gyűrű szélességét *objektive* egyenlőnek vettem, bár az irradiatio következtében az egyik gyűrű valamivel szélesebbnek látszott, mint a másik.

egyenlő világosságát akkép határoztuk meg, hogy a kísérleti személy a fent említett piros jelet megfigyelve, a két gyűrűnek ezen jelhez legközelebb eső részeit (félgyűrűk) egyidejűleg hasonlító össze egymással. A kísérletek folyamán többek között kitűnt, hogy az ily módon előállított világossági egyenletek akkor is érvényesek, ha a két gyűrűrész successiv fixirozás mellett hasonlítottatik össze.

Az *S*-mező¹ 354° fekete és 6° fehér körszeletből állott. Ha a korong forgott, a sötét alapon (*S*-alap) egy középvilágosságú szürke gyűrű (*S*-mező) mutatkozott. A körszeletek ezen aránya az összes kísérleteknél állandóan fentartatott. Az összes kísérleteknél az *S*-mező szolgált összehasonlító mezőként (*Vergleichsfeld*), melyhez a *V*-alapon egy subjektive ugyanazon világosságú gyűrű (*V*-mező)² állítottatott elő. Minden kísérletsorozatot megelőzőleg a kísérleti személy a világossági egyenletet háromszor állította elő és a nyert értékek középértékének kiszámítása után ezen középérték lőn a *V*-mezőn *beállítva*. Hogy minden kétséget kizárjunk, hogy a színérzet küszöbének meghatározása valóban változatlan viszonyok mellett történik-e, minden kísérletsorozat után ellenőriztük, vajjon a kísérletsorozat előtt előállított világossági egyenlet még érvényben van-e. Már a rendszeres kísérletek megkezdése előtt kitűnt, hogy a világossági egyenlet a tekintetbe veendő határok között független a diffúz világitástól, úgy hogy az egyszer előállított és meghatározott világossági egyenlet nemcsak az egyes kísérleti napokon, hanem több héten keresztül is érvényben maradt.

Ha tehát ezen módon a világossági egyenlet meg lőn állapítva, a színérzet küszöbének meghatározására tértünk át. Eleinte négy színnel, és pedig piros, sárga, zöld és kék színnel kísérleteztünk.³ Ezen kísérleteknél úgy jártunk el, hogy a határmód-

¹ Egyszerűsítés kedvéért a sötét alapon fekvő gyűrűt *S*-mezőnek, a világos alapon levőt pedig *V*-mezőnek fogom nevezni.

² Kitűnt, hogy *V*-mezőnek 76° fehér körszelettel kellett birnia, hogy az *S*-mezőn levő 6° fehér körszelet világosságával egyenlőnek lássék.

³ Vegyületszíneknek, pl. orange-nak felhasználása már azért sem ajánlatos, mert ezek színei a *V*-mezőhöz szükséges objektív fehér-többség folytán nagyon elváltoznak.

szer (Methode der Minimaländerungen vagy Grenzmethode) alkalmazásba vételével először az *S*-mezőn pl. a pirosnak színérzet-küszöbét, azután ugyanazon színnek a *V*-mezőn felfalálható színküszöbét határoztuk meg. A növelés eljárását (aufsteigendes Verfahren) az objektív színes fény azon intenzitásával kezdtük meg, a mely a színesség érzetét még nem kelti bennünk. A színes körszelet egyszeri változtatása nem volt több, mint 0.3° — 0.4° . Azon színes körszelet nagysága, melynél a színességet először vettük észre, feljegyeztetett. Midőn pedig a csökkentés eljárását (absteigendes Verfahren) alkalmaztuk, egy olyan nagyságú színes körszelettel kezdtük a kísérletet, melynél a színességet *mindig* helyesen ismertük fel. A körszelet változtatása ezen eljárásnál sem haladta meg a 0.3° — 0.4° -ot; a körszelet azon nagyságát jegyeztük fel, melynél a színesség *épen* eltűnt. Ily módon mindkét mezőnél ötször határoztuk meg a színérzet küszöbét; a nyert értékek számtani középértéke képezi a színérzet küszöbének főértékét. Ha a kísérleti személy mind a négy szín küszöbét meghatározta (minden nap más színét), akkor azt még néhányszor megismételte és az egyes színeknek az egyes napokon nyert főértékének átlagát számítottuk ki. Végre mind a négy színnél kiszámítottuk azon arányt, mely a *V*- és *S*-mező érzetküszöbe között fennáll; ezen arányszámot — később említendő oknál fogva — *gyöngítési együtthatónak*, ϵ -nek nevezem. Ezen arányszám felel meg fent felvetett kérdésünkre. Ha ϵ kisebb vagy nagyobb mint 1, akkor a fent leírt constellatio mellett előállított két subjektive egyenlő világosságú szürke felületen a színérzet küszöbe *különböző nagy*.

Az alább közlött tabellában az egyes kísérleti személyeknél meghatározott gyöngítési együtthatót ϵ -t közlöm. A *K* jelzéssel ellátott függőleges rovat a színes körszeletnek fokokban kifejezett azon nagyságát nyújtja, mely az *S*-mező színérzetküszöbét reprezentálja; k. h. rovat a töle balra eső küszöbérték középhibáját (mittlere Variation) jelenti; a *V* jelzéssel ellátott függőleges rovat a színes körszeletnek fokokban kifejezett nagysága, a *V*-mezőnek megfelelő színérzetküszöb értékét képviseli; végül az ϵ -nal jelzett rovat a *gyöngítési együtthatót* mutatja.

1-ső táblázat.

 $(n = 30)^1$

Szín	Jacobs					Hofmann				
	S		V		ϵ	S		V		ϵ
	K	k. h.	K	k. h.		K	k. h.	K	k. h.	
Sárga — — — —	1,5	0,3	3,48	0,5	2,32	2,0	0,33	4,0	0,4	2,0
Piros — — — —	1,2	0,3	4,9	0,7	4,1	1,2	0,35	4,6	0,5	3,85
Zöld — — — —	1,3	0,15	5,6	0,3	4,3	1,3	0,2	5,85	0,3	4,5
Kék — — — —	1,3	0,7	11,3	0,9	8,7	1,4	0,14	12,18	1,32	8,7

Szín	Dearborn					Révész				
	S		V		ϵ	S		V		ϵ
	K	k. h.	K	k. h.		K	k. h.	K	k. h.	
Sárga — — — —	1,8	0,4	4,5	0,4	2,5	1,5	0,5	3,6	0,7	2,4
Piros — — — —	1,3	0,2	5,85	0,4	4,5	1,1	0,3	3,96	0,6	2,6
Zöld — — — —	1,6	0,2	6,9	0,4	4,3	1,7	0,3	6,63	1,0	3,9
Kék — — — —	1,9	0,2	13,8	0,9	7,3	1,4	0,2	10,64	0,7	7,6

Ha már most az első tabellában közlött eredményeket szemügyre vesszük, azonnal feltűnik, hogy a különböző színek gyöngítési együtthatói egymástól ellérnek. A kéknél lépett fel a legnagyobb gyöngülés, a sárgánál a legkisebb, ezen két szín között foglal helyet a piros és a zöld egymástól kevésbé különböző ϵ -nal. Azonkívül még figyelemre méltó az a tény, hogy a különböző kísérleti személyeknek ugyanazon színnél nyert ϵ -értékei megközelítőleg ugyanazok.

Experimentális technikai szempontból kiemelendő, hogy az itt tárgyalt kísérletek a kísérleti személyek figyelmét igen lefoglalták. Gyakorlatlan kísérletezőknél már az egyszerű világossági egyenlet előállítás is nehézségbe ütközik, még inkább az itteni komplikált körülmények között, midőn a világossági egyenletet két különböző világosságú alapon kellett elő-

¹ n -nel jelöljük a közlött középértékek alapját képező kísérleti számokat.

állítani. Eleinte a kísérleti személyek ki is jelentették nekem, hogy ily körülmények között nem lehet optikai egyenletet felállítani és hogy ők nem képesek subjektív biztonsággal ítéletüket kifejezni. Csak később, nagyobb gyakorlat után tudtak a kísérleti személyek biztos ítéleteket mondani a V - és S -mező között fennálló világosság különbözőségéről, de ekkor már oly pontossággal, hogy a változó V -mezőn nyert küszöbértékek középhibája valamennyi kísérleti személyre nézve átlag csak 0.6° volt.

Fel kell hívnunk a figyelmet még arra az érdekes jelenségre, hogy a két mező a világossági egyenlet legjobb előállítása után sem tetszett *minden tekintetben* egyenlőnek. Az S -mező fénylőbb, csillogóbb volt, mintha fémfénynyel lett volna besugározva, azonkívül sokkal behatóbbnak tetszett és kellemesebb érzést keltett, mint az ugyanoly világosságú V -mező. Általában a szürke felület sötét alapon jobban felhívja a figyelmet és kellemesebb érzést kelt, mint a sötét felület világos alapon. A V -mező úgy tűnt fel, mintha finom fátyollal lett volna leborítva, bizonytalannak tetsző nuance-ban, áttetszően.

A világossági egyenlet előállítása után keresztülvitt színküszöbmeghatározással szemben azon kétely merülhet fel, vajjon a gyöngítési együttható abszolút értékének kicsisége miatt már jelentéktelenebb kísérleti hiba folytán is nem változhatik-e nagyon. Mert hisz figyelmetlenség, rossz leolvasás és a kísérleteknél előfordulható egyéb hibák annyira befolyásolhatják az ügyis kis értékkel bíró ε -t, hogy teljesen hamis képet nyerünk a kérdéses jelenségekről.

Bár ezen kételyt eloszlatja az a tény, hogy a különböző kísérleti személyeknél kapott ε -értékek nagyjában egymással megegyeznek, mindazonáltal tekintetbe véve azon jelenségek fontosságát, melyek az ε -nak az egyes színektől függő különböző értékeiben nyilvánulnak: célszerűnek tartottam a kísérletet az érzetküszöbnél jóval erősebb színingerekkel megismételni. Mert abban az esetben, ha az ε abszolút értéke nagy, ellenőrizhetlen kis hibák értékét tetemesen nem befolyásolhatják.

2. Kísérletek erősebb színingerekkel.

A kísérleteket a következő módon végeztük: miután az S - és V -mező között a világossági egyenlet felállítatott, az S -mezőnek fekete körszeletére egy 8° -ú színes, pl. piros körszeletet alkalmaztunk. A 8° körszeletet az egész kísérletezés folyamán megtartottuk: így tehát az S -mező 346° fekete, 6° fehér és 8° színes körszeletből állott. Az S -mező a konstans összehasonlító területet képezte. A V -mezőn most ugyanazon színű sektor azon nagyságát kerestük fel, melynél ezen mező ugyanolyan színességűnek látszott, mint az állandó S -mező. Itt is a határeljárást alkalmaztuk. A színesség összehasonlítása úgy történt, hogy a gyűrűalakú mezőknek a már említett figyelőponthoz legközelebb eső körrészeit successive megfigyeltük. A kísérleti személy annyiszor hasonlította össze a két mezőt, a hány-szor ezt szükségesnek találta, csak hogy minden összehasonlítás után egy kis ideig a szürke posztófalra kellett néznie, hogy szemét állandó hangulatban tarthassa. Ezen kísérleteknél is a piros, sárga, zöld és kék színt használtuk.

A következő táblázatok (II—VI.) ezen módon történt kísérletek eredményét tüntetik fel. Az S -sel jelzett függőleges rovat az S -mezőnek állandó, a V -vel jelzett pedig a V -mezőnek előállított színes körszeletei nagyságát jelzi. A k. h. jelzésű függőleges rovat az esetlegesen változó V -érték középhibáját tünteti fel, az utolsó rovat pedig az S - és V -értékből kiszámított gyöngítési együtthatót, ε -t.

2-ik táblázat. $(n = 10).$

Szín	Jacobs				Hofmann				Révész			
	S	V	k. h.	ε	S	V	k. h.	ε	S	V	k. h.	ε
Sárga ---	8,0	27	2,1	3,4	8,0	33	1,8	3,1	8,0	20,8	0,3	2,6
Piros ---	8,5	32	1,4	3,7	8,0	28,4	1,6	3,4	8,5	30,0	0,4	3,5
Zöld ---	9,0	40	2,6	4,4	8,5	41	1,5	4,8	8,0	33,5	0,2	4,2
Kék ---	8,0	50,1	0,15	6,3	8,0	51	0,1	6,1	8,2	51,2	0,3	6,2

Szín	Dearborn				Küchler			
	S	V	k. h.	ε	S	V	k. h.	ε
Sárga ---	8,2	24,6	0,5	3,0	8,0	21,2	0,25	2,7
Piros ---	8,0	28,8	0,6	3,6	8,5	32	0,14	3,7
Zöld ---	8,5	39,2	0,1	4,6	8,2	34,5	0,3	4,2
Kék ---	8,5	53,4	0,3	6,2	8,0	50	0,2	6,2

3-ik táblázat. $(n = 10).$

Szín	Jacobs				Hofmann				Dearborn			
	S	V	k. h.	ε	S	V	k. h.	ε	S	V	k. h.	ε
Sárga ---	16	45	1,8	2,8	16	41	0,5	2,5	16	47	0,6	2,9
Piros ---	16	60	0,6	3,7	16	65,5	0,2	4,1	16	64	0,3	4,0
Zöld ---	16	71,5	1,2	4,46	16	68	0,7	4,2	16	73,5	0,4	4,6
Kék ---	16	10,4	0,2	6,4	16	103	0,25	6,4	16	105	0,15	6,6

4-ik táblázat. $(n = 10).$

Szín	Jacobs				Hofmann				Dearborn			
	S	V	k. h.	ε	S	V	k. h.	ε	S	V	k. h.	ε
Sárga ---	17	43	0,4	2,5	15,5	43	0,5	2,7	18,0	43	0,4	2,4
Piros ---	11,9	43	1,0	3,6	12,2	43	0,2	3,5	12,2	43	0,2	3,5
Zöld ---	11,0	43	0,25	3,9	10,2	43	0,7	4,2	10,7	43	0,3	4,0
Kék ---	6,8	43	0,4	6,3	7,2	43	0,3	5,9	7,2	43	0,35	6,1

5-ik táblázat.

(n = 10).

Szín	Jacobs				Hofmann				Dearborn			
	S	V	k. h.	ε	S	V	k. h.	ε	S	V	k. h.	ε
Sárga	24,5	64	0,3	2,6	26,5	64	0,6	2,4	28	64	0,5	2,5
Piros	19,0	65	0,25	3,4	19,0	64	0,3	3,3	18,8	64	0,12	3,4
Zöld	17,0	65	0,45	3,8	16,0	64	1,1	4,0	18	64	0,4	3,5
Kék	11,0	65	0,2	5,9	10,4	64	0,25	6,1	11	64	0,3	5,8

6-ik táblázat.

(n = 10).

Szín	S	V	ε	S	V	ε
Piros	14	45	3,2	20	64	3,2
Orange	18	41	2,27	25	64	2,5
Sárga	18	44	2,4	25	64	2,5
Sárgászöld	18	46	2,5	21	64	3,0
Zöldessárga	14	46	3,2	18	66	3,6
Zöld	12	44	3,6	16	64	4,0
Zöldeskék	10	44	4,4	15	66	4,4
Kék	7,5	44	5,8	11	64	5,9
Violet	8,5	44	5,6	12	64	5,3

A második táblázatban megjelölt ε -értékek teljes bizonyossággal kimutatták, hogy a különböző színek ε -ai egyébként azonos körülmények mellett különböző nagyságúak. Az itt feltalált eredmények megegyeznek az első táblázatban közöltekkel. Itt is, miként a küszöbmeghatározásnál, a gyöngítési koefficiens legkisebb a sárgánál, ez után következik a piros, kevésbé utána a zöld és utoljára a kék, mely utóbbinak ε -ja a sárgáét körülbelül kétszer meghaladja.

Azon kérdés eldöntésére pedig, vajjon a szín objektív intenzitása, a színínger amplitudójának fokozása a gyöngítési együttthatót befolyásolja-e, a kísérletet megismételtük oly módon, hogy az S konstans mezőnek színes körszeletét 8°-kal

megnagyobbítottuk és ahhoz a V -mezőn a színegyenletet felkerestük. A harmadik táblázat nyújtja ezen kísérletek eredményét. Ebből kitűnik, hogy *a gyöngítési együtthatóra a színes fény intenzitásának fokozása nem bír semminemű befolyással*. A IV. és V. tabella ugyanerre vonatkozó kísérletek eredményeit sorolja fel, csak hogy ezen kísérleteknél a V -mező használtatott fel az S -mező helyett változatlan összehasonlító ingerként.

A VI. tabella oly kísérletsorozat értékeit képviseli, a melynél saját magam kilencz különböző szint használtam. Az ε menete megfelel annak, mit az előbbi kísérletek eredményei valószínűvé tettek.

3. Kísérletek abszolút színegyenletekkel.

A színegyenleteknél, melyekről az előbbi §-ban beszámoltunk, a V -mező ép oly színesnek látszik, mint az S -mező, de világosságuk nem egyezik meg egymással: színegyenlet, de nem egyszersmind világossági egyenlet is. Ennek oka abban rejlik, hogy a V -mező a színegyenlet előállítása folytán nagyobb színes körszelettel bír, és ezen nagyobb színintenzitással nagyobb világosság jár. Mert azáltal, hogy a V -mezőbe nagyobb színes sektort alkalmazunk, a V -mező világosságát (a kontraszt-hatástól eltekintve) annyival emeljük, a mennyi fehérnek megfelel azon színes körszelet nagysága, melyet a V - és S -mező színes körszeleteinek különbözete nyújt; levonva ebből a különbözetből azonban a V -mezőn levő fekete körszeletnek azon fehér értékét, melyet akkor nyerünk, ha a V -mezőn alkalmazott színes sektor többlet által eltakart fekete körszelet fehér értékét kiszámítjuk. A V -mező fehér értéke (világossága) tehát nagyobb lesz, mint az S -mezőé és ennél fogva a színegyenlet előállítása előtt felállított világossági egyenlet a V -mező előnyére megsemmisül.¹ A kísérleti személyek tehát kedvezőtlen

¹ Az a tény, hogy az előbbi §-ban említett módon előállított színegyenletnél a V -mező világosabb lesz, mint az S -mező, azt látszik bizonyítani, hogy a V -mezőn fennálló gyöngítés a fehéret kevésbé érinti, mint a színeket. Tekintetbe veendő mindenestre, hogy a fehérenél annyi-

körülmények között hasonlították össze a két mező színességét, t. i. akkor, midőn a két mező különböző világossággal bírt. Ezért jónak láttuk a kísérleti személyeket felkérni, hogy abszolút színegyenleteket állítsanak elő, t. i. olyanokat, melyeknél a V -mező az S mezővel úgy színességben, mint világosságban, a mennyire csak lehet, megegyezik.¹

Abszolút színegyenletek előállítása akép történt, hogy miután egy világossági egyenletet az S -mező és a V -mező között előállítottunk, mindkét mezőbe egyenlő nagyságú színes sektort helyeztünk.

Ezen beállítás után a két mező világossága már nem volt egyenlő, hanem a V -mező fehér körszeletét meg kellett nagyobbítanunk, hogy a világossági egyenletet helyreállíthassuk. Ha a V -mező fehér sektorának nagyobbításával ily módon helyreállítottuk a két mező világosságának subjektív egyenlőségét, azt vettük észre, hogy a V -mező színessége csökkent. Azért ezen mezőn a színes körszelet nagyságát addig fokoztuk, míg mindkét mező az egyenlő színesség érzetét keltette, miközben párhuzamosan a V -mező fehér körszeletét oly módon kisebbitettük, hogy a színes sektor nagyobbodásával járó fehér érték emelkedését a fehér sektor kisebbitése épen kompenzálja.² Analog jár-

ban áll fenn complicatio, a mennyiben a V - és S -mezőhöz hozzáadott bizonyos mennyiségű fehér fényt mindkét mezőn a V - és S -alap indukálásából származott világossági kontrasztot megváltoztatja. Hogy a kérdésben forgó gyöngítés a fehérre nézve fennáll, már HERING egy kísérletéből kitűnik, melyet HESS és PRETORI az Archiv. f. Ophtalm. 40. (4.) 22. lapján közölt.

¹ Abszolút színegyenletek előállítása már azért is nehézségekbe ütközik, mert a nagymennyiségű fehér fény, melyet a V -mező világossági egyenlet előállítása esetén megkíván, maga után vonja, hogy a színqualitás ezen mezőn az S -mezőhöz hasonlítva, kissé elváltozva jelenik meg.

² Hogy a fehér körszelet ezen kiegyenlítő változását keresztülvigyük, a használt színes papírok fehér értékét (a mint azok a világossághoz alkalmazkodott szemre hatnak) a HESS által leírt és HERING szerkesztette készülékkel meghatároztuk. A színek relatív világosságának (fehér értékének) ezen módszer szerint való meghatározásának helyességére vall azon körülmény, hogy a fehér értékek összege, melylyel az előállított abszolút színegyenleteknél a V -mező bírt, minden itt használt színnel egyenlő volt.

tunk el a csökkentés eljárásánál, melynél a V -mező egy tisztán észlelhető túlnagy színes körszeletéből indultunk ki.

Most pedig táblázatokban közlöm az ezen eljárás alkalmazásával elért eredményeket és pedig a V - és S -mező tartalmazta színes körszeletek nagysága mellett (V - és S -rovatok) még ezen sektorok arányát, a gyöngítési koefficiensét, ε -t is nyújtom.

7-ik táblázat.

(n = 30).

Szín	Jacobs			Hofmann			Katz			Révész		
	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε
Sárga	30	36	1,2	30	35	1,17	30	36	1,2	30	35	1,17
Piros	30	39	1,3	30	38	1,27	30	39	1,3	30	39	1,3
Zöld	30	41	1,36	30	40	1,33	30	40	1,33	30	41	1,37
Kék	30	64	2,1	30	62	2,07	30	60	2,0	30	64	2,1

8-ik táblázat.

(n = 30).

Szín	Jacobs			Hofmann			Katz			Révész		
	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε
Sárga	60	72	1,2	60	72	1,2	60	73	1,21	60	72,6	1,21
Piros	60	79	1,31	60	77	1,27	60	78	1,3	60	77,4	1,29
Zöld	60	82	1,36	60	80	1,33	60	81	1,35	60	81,0	1,35
Kék	60	126	2,1	60	120	2,0	60	121	2,01	60	122	2,03

9-ik táblázat.

(n = 30).

Szín	Jacobs			Hofmann			Katz			Révész		
	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε
Sárga	90	111,5	1,24	90	110	1,22	90	110	1,22	90	110	1,22
Piros	90	121,4	1,35	90	120	1,33	90	123	1,36	90	121,5	1,35
Zöld	90	125,5	1,39	90	127	1,41	90	126	1,40	90	128	1,42
Kék	90	189,0	2,1	90	185	2,05	90	182	2,02	90	185	2,05

10-ik táblázat.

(n = 30).

Szín	Steckel (Deutanop)			Steckel			Steckel		
	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε
Sárga	30	37	1,23	60	73	1,21	90	112	1,23
Piros	30	40	1,33	60	80	1,33	90	121	1,34
Zöld	30	42	1,4	60	83	1,38	90	127	1,41
Kék	30	58	1,9	60	132	2,2	90	190	2,11

11-ik táblázat.¹

(n = 40).

Szín	Cheym (Protanop)			Dr. Levy (Anomal)			Révész			Andersen (Deutanop)		
	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε
Sárga	60	75	1,25	60	69	1,15	60	69	1,15	60	67	1,11
Piros	60	78	1,3	60	84	1,4	60	85	1,41	60	81	1,35
Zöld	60	81,5	1,35	60	78	1,3	60	80	1,33	60	80	1,33
Kék	60	110	1,83	60	103	1,7	60	109	1,8	60	105	1,7

12-ik táblázat.

(n = 20).

Szín	Cheym (Protanop)			Dr. Levy (Anomal)			Révész			Andersen (Deutanop)		
	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε	S	V	ε
Sárga	90	108	1,2	90	105	1,16	90	109	1,21	90	108	1,2
Piros	90	127	1,41	90	121	1,34	90	125	1,38	90	126	1,4
Zöld	90	126	1,4	90	120	1,33	90	121,5	1,35	90	125	1,38
Kék	90	163	1,8	90	148	1,64	90	154	1,71	90	153	1,7

¹ A 11. és 12-ik táblázatban közölt kísérletek a berlini tudományos egyetem pszichológiai intézetében végeztek 1905. év nyarán. Az intézet használatásáért köszönetet mondok Stumpf tanár, titkos tanácsos úrnak, az intézet igazgatójának.

Ezen tabellák a következőket mutatják ki. *A gyöngítési együttható ε ismét a sárgánál a legkisebb, utána következik a piros, ezután egy kis közszel a zöld és legutoljára a kék, melynek a sárgáéhoz viszonyított ε -ja úgy aránylik, mint 2:1,2.* Hogy a színek ε értékei az itt felsorolt egymásutánban következnek, az számos kísérlet alapján most már *egész biztossággal* kimondható.¹

Ha már most azt kutatjuk, hogy mily befolyással bír ε értékeire, ha a konstans összehasonlító mező (S-mező) színes szektorát nagyobbítjuk, akkor kitűnik, hogy *ε független a körszelet nagyságától.* Ha ε értékeit a VII. és IX. táblázatban egymással összehasonlítjuk, úgy ε -nak csak igen csekély változását vesszük észre.

A különböző kísérleti személyek megegyeznek egymással nemcsak azon sorozatban, a melyben a színek a nekik megfelelő ε értékekkel csoportosíthatók, hanem még az ε értékeinek abszolút nagyságában is.

Ezen megegyezés annál figyelemreméltóbb, mert a kísérleti személyek között egy protanop (egyik típusa a piros-zöld színvak-ságnak): CHEYM, két deuteranop (másik típusa a piros-zöld színvak-ságnak): ANDERSEN és STECKEL, és egy anomális tetrachromat: LEVY volt.² A színvakoknál csupán abszolút szín-

¹ Hogy ε -nak a II—VI. táblázatban közölt értékei abszolút véve sokkal nagyobbak, mint a fenti VII—XII. tabellákban foglalt értékei, az természetesen abban leli magyarázatát, hogy az előbbi kísérleteknél a V-mező nagyobb világossággal (fehérséggel) bírt, mint az S-mező.

² *Protanop* (HELMHOLTZ terminológiája szerint «Rotblind»); HERING szerint «Rot-Grünblind») a színvak-ság azon típusa, melynek különös ismertető jele, hogy a spektrum nagy hullámhosszakkal bíró részét (piros) rövidítve látja, a színek relatív világossága anomális és egy bizonyos zöldes-kéket (ca. 476—480 $\mu\mu$) szürkének lát. — *Deuteranop* (HELMHOLTZ szerint «Grünblind», HERING szerint «Rot-Grünblind mit starker macularen Absorption») azon színvak, ki pirosat és zöldet ugyan épúgy össze-
tévész, mint a protanop, de a színek nagysága nála normális, a színek relatív világossága szintén rendes, de a tiszta zöldet (ca 496—500 $\mu\mu$) szürkének látja. — LEVY pedig az anomálok azon típusához tartozik, kik ugyan teljes színérzékeléssel bírnak, csak hogy a spektrum piros végét rövidebbnek látják, kikre az objektív piros fény kevés ingererővel bír és kik-

egyenletekkel lehetett biztos eredményeket elérni. Náluk természetesen csak az egyenlet előállítására fektettük a súlyt, a színek megnevezését negligáltuk. A színvakokkal keresztülvitt kísérletek nagy nehézségbe és hosszú időbe kerültek, mert anomális színeképességük mellett még fényérzetök inferioritásában is szenvednek. Úgy szín-, mint fényérzetök küszöbe jóval magasabb, mint a normális színeképességű emberé.

★

Színes fényingerek hatásának a *V*-mezőn történt gyöngítését a következő módon foghatjuk fel:

A fehérfény az ideghártyán oly photochemiai folyamatot hoz létre, melynek ereje a fény *objektív* intenzitásától függ. Ezzel szemben a photochemiai folyamat intenzitására teljesen közömbös, hogy miként módosul a fény ható ereje a világossági kontraszt következtében. A fehér folyamatnak az a következménye, hogy a vele egyidejűleg ható színes fényingerek ingerlő képessége gyöngül. Minthogy a *V*-mezőből objektíve erősebb fehér fény indul ki, mint az *S*-mezőből, a fehér folyamat az ideghártya azon részében, mely a *V*-mezőnek felel meg, erősebben fejlődik ki, mint az *S*-mezőnek megfelelő retinárészben, úgy hogy ezen folyamat következtében a színes fényingerek a *V*-mezőnek megfelelő ideghártya-részben nagyobb gyöngülést szenvednek, mint az *S*-mezőnek megfelelő részben. A színes sektort a *V*-mezőn tehát nagyobbnak kell venni, mint az *S*-mezőn, ha egy absolut színegyenletet óhajtunk előállítani.

Az itt leírt jelenségek magyarázatánál rá lehetne mutatni egy az alsóbbrendű organizmusok élettanában előforduló jelenségre. Több gyökeretverő és szabadon mozgó organizmusnál (gombák, sok faj a bakteriumoknak stb.) azt vették észre, hogy

nél a színek relativ fehérsége ugyanolyan, mint a protanopoknál. LEVY ezen typusnak KRIES által megfigyelt első esete. (L. Dr. LEVY, Über einen zweiten Typus der anomalen Trichromaten. Diss. Freib. i/Br. 1903).

Nem akarom elmulasztani végül még megemlíteni, hogy Prof. Fr. SCHUMANN, Zürich, ki bizonyos tekintetben az anomálok másik typusához (RALEIGH-féle typus) tartozik, a tölem és más kísérleti személyektől felállított színegyenleteket a maga részére *mindig* érvényesnek találta.

fényhatásra bizonyos mozgással reagálnak, másszóval phototropikus érzékenységgel bírnak. Többek között még megfigyelték, hogy különösen a spektrum erősebben tört sugarai hozzák létre ezen phototaxist úgy, hogy az eddig megfigyelt organizmusok közül csak igen kevesen reagálnak piros és ultrapiros sugarakra (bakterium photometricum ENGELMANN) és még kevesebben a spektrum valamennyi sugarára (*Oscillaria* — *Verworn*). WIESNER (*Die heliotropische Erscheinungen*. Ber. d. Akad. d. Wiss. Wien, 1880) kutatásai szerint a spektrum phototropikus hatásának görbéjén a heliotropikus hatás maximuma az ultraviolett és violet között esik. Innen leszállo fokozatosan a zöldön keresztül a sárgáig, melynél eléri minimumát, míg azután az orangénál ismét emelkedni kezd az ultrapirosig. Ha a különböző színek gyöngítési koefficienseit grafikailag ábrázoljuk, úgy hogy egy derékszögű koordináta rendszerben a színeket mint abscissa-értékeket és az ezeknek megfelelő gyöngítési együtthatókat mint ordinátát rójuk fel, akkor az így nyert görbe a WIESNER-féle görbével feltűnő hasonlatosságot mutat.

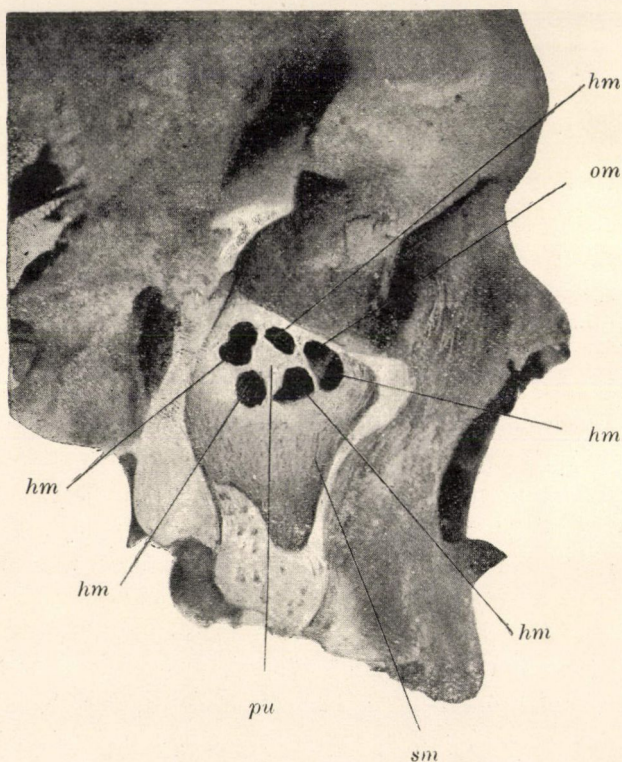
Az itt futólag jelzett jelenségen kívül az ezen kísérleteknél működő retinális folyamatok mineműségére, a feltalált és itt leírt új jelenségek theoretikus kiépítésére nem térek rá, mert nem tartom helyesnek, hogy egy oly jelenségkörben, melynek csak legelső tényeit ismerjük és melynek kikutatására még nagyon sok kísérletet kellene megtennünk, már eleve hypothesis állítsunk fel, melynek értékét úgyis csak a még végzendő kísérletek döntenék el végleg. Meg vagyok győződve, hogy ezen és az ezzel rokon jelenségek nagy fontosságuknál fogva a színes látás psychophysikai theoriáját lényegesen fogják módosítani.

AZ ORRÜREG KÖZÉPSŐ JÁRATÁNAK HÁRTYÁS RÉSZEIRŐL.

ÓNODI ADOLF lev. tagtól.

Ismeretes, hogy a csontvázon egy vagy több kisebb-nagyobb rés köti össze a Highmorüregt az orrüreggel, ezen részek részben fenmaradnak, részben a nyálkahártya által befedtetnek és alkotják a középső orrjárat hártvás részeit. A Highmorüreg medialis nasalis falának alkotásában részt vesznek a felső állcsont, az alsó kagyló, az ínycsont és a rostacsont, valamint a fenmaradt réseket befedő nyálkahártya. Ha a csontos felső állcsontot külön tekintjük meg, akkor a Highmorüreg medialis falán egy nagy nyílást (hiatus maxillaris) találunk, ezzel a nagyobb réssel találkozunk az egész csontos koponyán is. Bemutatunk egy csontos koponyán (1. ábra) egy kívülről megnyitott Highmorüregt (*sm*); a Highmorüreg medialis vagy nasalis falán az említett csontrészek között a rendes nyíláson (*om*) kívül még öt csontrés (*hm*) látható. Ezen csontrészek, a szerint, a mint állandóan nyitva maradnak, a Highmorüreg járulékos nyílásait képezhetik, vagy a nyálkahártya által befödve, a középső orrjárat hártvás részeit alkothatják, melyeket ZUCKERKANDL fontanelláknak nevezett el. A Highmorüreg nasalis falának alkotásában legnagyobb szerep jut a rostacsont horognyújtványának, processus uncinatus oss. ethm. Ezen nyújtvány kardszerűen homorú felső és domború alsó széllel van elhelyezve a középső orrjáratban, rendszeren kisebb nyújtványai felelkező nyújtványokkal érintkeznek, így felfelé a processus maxillaris a felső állcsont orbitalis lemezével, lefelé a processus turbinális az alsó kagylóval és többször hátrafelé a processus palatinalis az iny-

esonttal függ össze. A processus uncinatus nyújtványai és a felső állsont, az alsó kagyló és az ínycsont között még fennmaradó réseket a nyálkahártya vagy teljesen befödi vagy egyes réseket nyitva hagy. Maga a processus uncinatus nagyon külön-



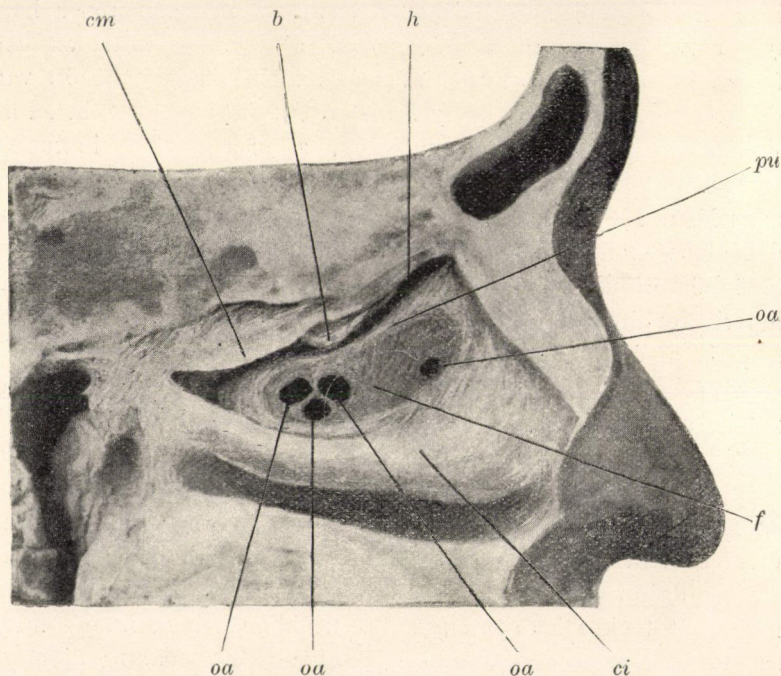
1. ábra. Természetes nagyság. A Highmorüreg kívülről megnyitva; *sm* Highmorüreg; *om* ostium maxillare; *hm* hiatus maxillaris; *pu* processus uncinatus.

bőző alakulásokat mutathat fel, kisebb nyújtványai száma és nagyságra változók lehetnek, a felelkező nyújtványok a felső állsont, az alsó kagyló és az ínycsont részéről érintkezhetnek, de másrészt nem érik el egymást, vagy az egyik és másik részen hiányozhatnak is. Ez utóbbi esetekben a nyálkahártyában végződnek az említett kis nyújtványok. A nyálkahártyának

fontos szerep jut úgy a fontanellák, mint a Highmorüreg járulékos és rendes nyílásainak képzésében. Ezen nyílások, mint látni fogjuk, egészben csontos szélek által határoltak is lehetnek. Mint ismeretes, a processus uncinatus és a bulla ethmoidalis között levő hiatus semilunarisban van elhelyezve a Highmorüreg rendes nyílása (ostium maxillare), erről, valamint a járulékos nyílásokról még bővebben lesz szó. ZUCKERKANDL a hártvás részeket alsó (mellső) és hátsó részekre osztotta, az alsó fontanella a processus uncinatus és az alsó kagyló között van elhelyezve és az alsó kagyló rostanyújtványáig terjedhet, míg a hátsó fontanella ezen nyújtvány, a processus uncinatus és az inycsont függőleges lemeze közt foglal helyet. Vizsgálataink, mint látni fogjuk, azt mutatták, hogy ezen beosztás nem minden alakviszonyra vonatkozhatik, azért leleteink szerint megkülönböztetünk egy alsó és egy felső fontanellát a hiatus semilunaris területében (a processus uncinatus alatt fekvő fontanella mellső, alsó fontanellának is jelezhető) a hiatus semilunaris és a processus uncinatus hátsó vége mögött egy hátsó fontanellát, a processus uncinatus hátsó vége felett és alatt pedig egy felső és egy alsó hátsó fontanellát. Vizsgálatainknál úgy jártunk el, hogy alkoholban keményített vagy friss készítményeken egyeseknél mindkét fedő nyálkahártyát a Highmorüreg és az orrüreg felől eltávolítottuk, másoknál a nyálkahártyát csak az egyik oldalon választottuk le és vagy alkoholba helyeztük, vagy megszárítottuk a készítményt. Ez utóbbi esetben, ha jól megszáradt a készítmény és lakkal bevontuk ZUCKERKANDL ajánlata szerint, a hártvás részek szépen áttűntek és az egyes csontlemezek és nyújtványok jól voltak kivehetők. Ezen eljárásnál a nyálkahártyát mindig csak az orrüreg felől választottuk le, s ilyenkor sikerült a fontanellákban elhelyezett járulékos nyílásokat is megtartani. Mielőtt összefoglalnók vizsgálati eredményeinket, egyes készítményeinket természetes nagyságban bemutatjuk.

A 2. ábrán érzékitett készítmény alkoholban volt tartva és nyálkahártyája sértetlen, a processus uncinatus (*pu*), a bulla ethmoidealis (*b*) és a hiatus semilunaris (*h*) rendes képet mutatnak; a processus uncinatus hátsó vége összefügg

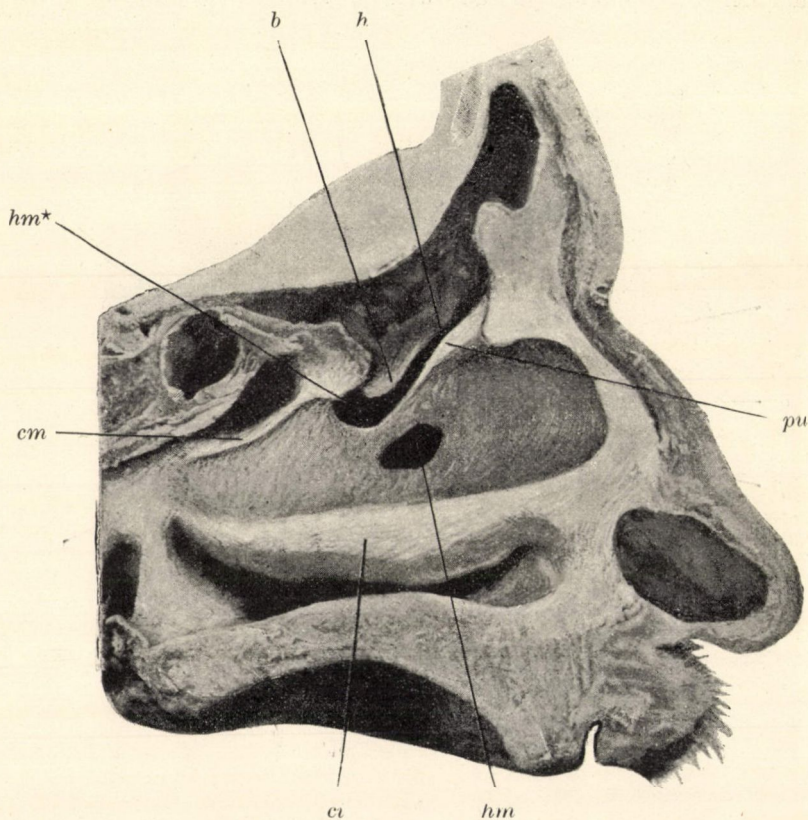
az ínyesont függőleges lemezével, a hiatus semilunaris legmellsőbb pontján nyílik a homloküreg, mögötte a Highmor-üreg rendes nyílásával. A hiatus semilunaris (*h*) és a processus uncinatus (*pu*) alatt az egész terület 31 mm. hosszúságban és 10 mm. magasságban hártvás (*f*). Ezen területen a processus



2. ábra. Természetes nagyság. A középső kagyló el lett távolítva, a nyálkahártya sértetlen; *ci* alsó kagyló; *f* fontanella; *oa* járulékos nyílása a Highmorüregnek; *pu* processus uncinatus; *h* hiatus semilunaris; *b* bulla ethmoidalis; *cm* a lemetezett középső kagyló széle.

uncinatus hátsó vége és az alsó kagyló közt van három nyílás (*oa*), egymástól egy 2 mm-nyi és két 1 mm-nyi köteg által elválasztva. A Highmorüreg ezen járulékos nyílásai 3—5 mm-nyi tágak. A mellső nyílástól mintegy 12 mm-nyire mellfelé egy 3 mm-nyi tág járulékos nyílás (*oa*) van jelen a fontanellában.

A 3. ábra egy olyan készítményt érzékít, melynél a nyálkahártya úgy az orrüreg, mint a Highmorüreg felől lett eltávolítva; a hiatus semilunaris (*h*) és a processus uncinatus (*pu*)

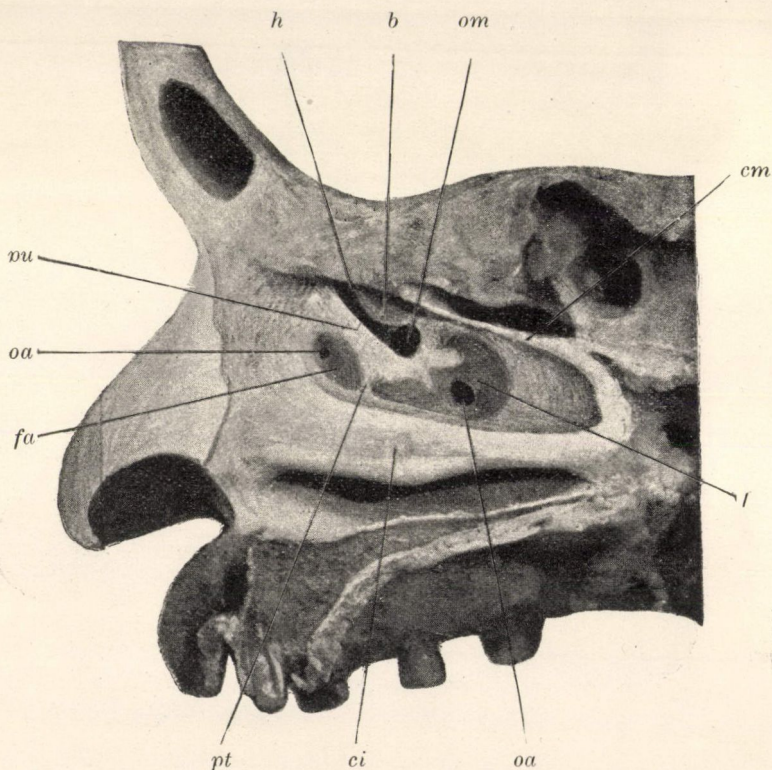


3. ábra. Természetes nagyság. A nyálkahártya úgy az orrüreg felől mint a Highmorüreg felől el lett távolítva; *ci* alsó kagyló; *hm* alsó hiatus maxillaris; *pu* processus uncinatus; *h* hiatus semilunaris; *b* bulla ethmoidalis; *hm** hátsó felső hiatus maxillaris; *cm* a lemetezett középső kagyló széle.

alatt egy majdnem 10 mm. hosszátmérőjű rés, hiatus maxillaris látható, melyet egy hártvás fontanella nem teljesen fed, a mennyiben benne egy 2 mm-nyi tág járulékos nyílás van jelen. A processus uncinatus hátsó része mögött és fölött egy

kisebb hiatus maxillaris fordul elő, melyet szintén egy fontanella borított, még pedig teljesen.

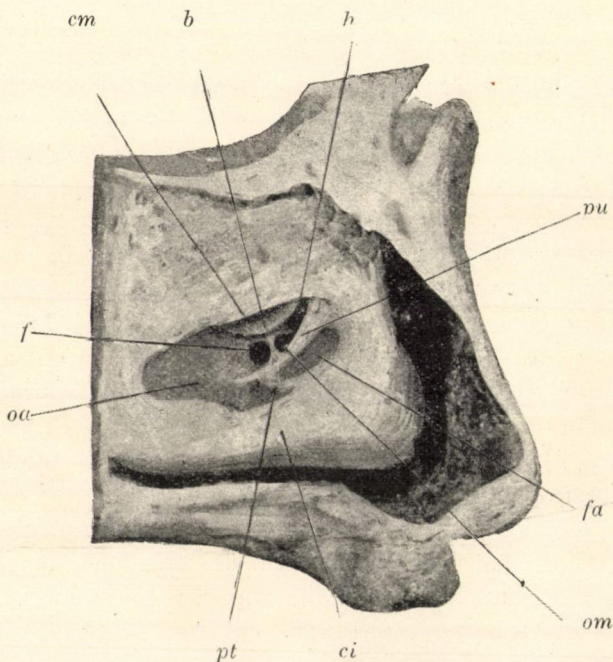
A 4. ábra egy alkoholban eltartott készítményt érkeztet, melynél a nyálkahártya az orrüreg felől lett leválasztva, a



4. ábra. Természetes nagyság. Alkoholos készítmény, a nyálkahártyalemez az orrüreg felől eltávolítva; *ci* alsó kagyló; *pt* processus turbinatus; *oa* a Highmore-üreg járulékos nyílásai, mindkettő fontanellában; *pu* processus uncinatus; *h* hiatus semilunaris; *b* bulla ethmoidealis; *om* ostium maxillare; *cm* a lemetezett középső kagyló széle.

látható hártás részek a Highmore-üreg nyálkahártyáját képezik. A processus uncinatusnak négy nyújtványa látható: felfelé a processus maxillaris, mely a Highmore-üreg rendes nyílását (*om*)

hátulról övezi, lefelé a processus turbinalis (*pt*), mely a mellső alsó fontanellát (*fa*) a hátsó alsó fontanellától választja el, a processus uncinatus hátsó vége egyenlőtlenül villaszerűen oszlik két nyújtványra, mindkettő a hátsó fontanellában (*f*) végződik, a felső nyújtványt 2 mm. választja el az ínycsonttól.



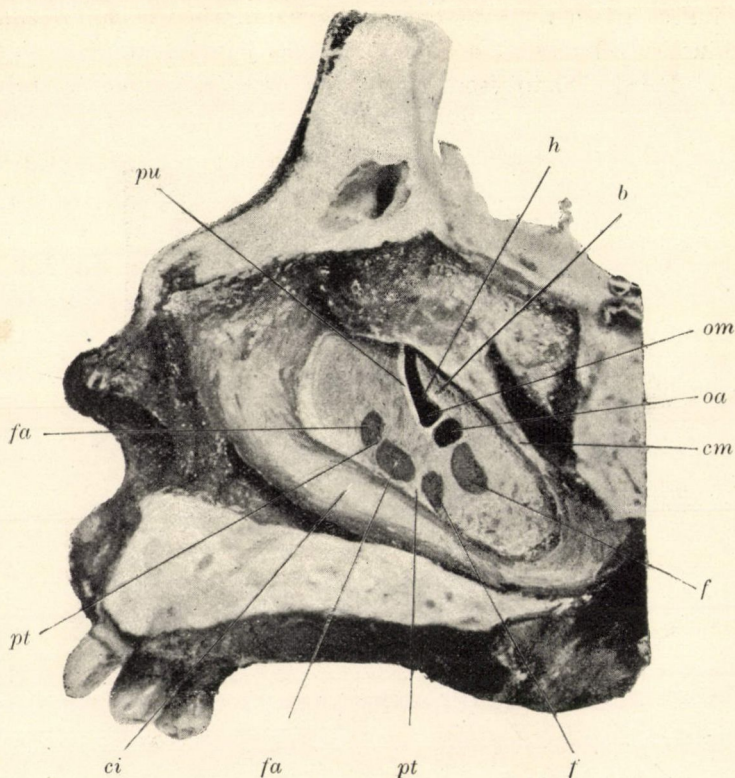
5. ábra. Természetes nagyság. A nyálkahártyalemez az orrüreg felől eltávolítva, a készítmény szárítva és lakkal bevonva. *ci* alsó kagyló, *pu* processus uncinatus, *pt* processus turbinalis proc. unc., *fa* mellső alsó fontanella, *f* hátsó fontanella, *h* hiatus semilunaris, *b* bulla ethmoidalis, *om* ostium maxillare, *oa* ostium accessorium, *cm* a lemetezett középső kagyló széle.

Ezen nyújtvány felett a hátsó fontanella folytatódik 7 mm.-nyire a hiatus semilunarisba a Highmorüreg rendes nyílását (*om*) övező és már említett nyújtványig, ezen nyújtvány alatt a 7 mm. magas hátsó fontanella (*f*) 15 mm.-nyi hosszúságban mellfelé terjed a processus uncinatus turbinalis nyújt-

ványáig. A hátsó fontanellát élesen övezi az inyesont függőleges lemeze és benne egy 4 mm.-nyi tág járulékos nyílás (*oa*) foglaltatik. A hátsó alsó fontanella és a processus turbinalis (*pt*) előtt látható a 8 mm. hosszú és 3 mm. magas mellső alsó fontanella (*fa*), a hiatus semilunaris (*h*), a processus uncinatus (*pu*) és az alsó kagyló (*ci*) között, legmellsőbb pontjain egy $1\frac{1}{2}$ mm.-nyi kerek járulékos nyílással (*oa*).

Az 5. ábra egy száraz készítményen mutatja a processus uncinatus három nyújtványát, a processus uncinatus hátsó végét, mely nyújtvány alakjában a hátsó fontanellában (*b*) végződik, felfelé a Highmorüreg rendes nyílását (*om*) övező processus maxillaris, lefelé a processus turbinalist (*pt*). A processus uncinatus hátsó végétől hátrafelé az inyesontig 13 mm. hosszú és 10 mm. magas hátsó fontanella terjed, mely alul a processus turbinalisig (*pt*) ér, fent pedig a Highmorüreg rendes nyílását (*om*) övező processus maxillarisig terjed, ez utóbbi mögött közvetlenül a hátsó fontanellában van egy 4 mm.-nyi kerek járulékos nyílás (*oa*) jelen. A hiatus semilunaris (*h*) és a processus uncinatus (*pu*) alatt, a processus turbinalis (*pt*) előtt terül el a 7 mm. hosszú és 3 mm. magas mellső alsó fontanella (*fa*).

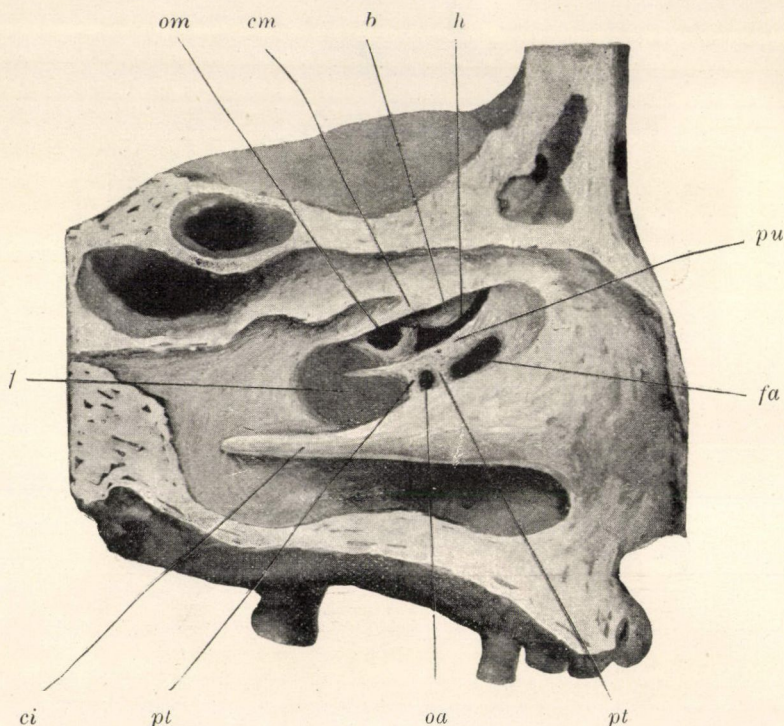
A 6. ábrán érzékitett száraz készítményen a processus uncinatus (*pu*) hátsó vége szélesen összefügg az inyesonttal, felette egy 7 mm. hosszú és $3\frac{1}{2}$ mm. magas hátsó fontanella (*f*) van jelen, a hiatus semilunaris (*h*) hátsó vége és ezen hátsó felső fontanella között látható egy $3\frac{1}{2}$ mm. tág járulékos nyílás (*oa*). Ezen járulékos nyílást és a Highmorüreg rendes nyílását (*om*) elválasztja a processus maxillaris proc. unc., az ostium maxillare 2 mm. tág. A processus uncinatus hátsó vége alatt és turbinalis nyújtványa (*tb*) mögött, az alsó kagyló felett egy 4 mm. hosszú és 3 mm. magas hátsó alsó fontanella (*f*) van jelen. A hiatus semilunaris mellső felében van még egy 5 mm. tág ostium maxillare. A hiatus semilunaris és a processus uncinatus alatt és az alsó kagyló (*ci*) felett egy processus turbinalis proc. unc. által elválasztva elől egy 3 mm. és mögötte egy 6 mm. hosszú és 3 mm. magas mellső alsó fontanella van elhelyezve (*fa*).



6. ábra Természetes nagyság. A nyálkahártya-lemez az orrüreg felől eltávolítva, a készítmény szárítva és lakkal bevonva. *ci* alsó kagyló, *pu* processus uncinatus, *pt* processus turbinalis, *f* hátsó fontanella, *fa* mellső alsó fontanella, *h* hiatus semilunaris, *b* bulla ethmoidalis, *om* ostium maxillare, *oa* ostium accessorium, *cm* a lemetezett középső kagyló széle.

A 7. ábrán érzékített száraz készítmény jól mutatja a processus uncinatus turbinalis maxillaris nyújtványait és hátsó végét, mely a hátsó fontanellában (*f*) végződik. A hiatus semilunaris (*h*) és a processus uncinatus (*pu*) alatt egy 9 mm. hosszú és 3 mm. magas mellső alsó fontanella látható (*fa*), mögötte a processus uncinatus két turbinalis nyújtványa (*pt*) között egy 3 mm. fontanella, egy 2 mm. tág járulékos nyílással (*oa*). A processus uncinatus két maxillaris nyújtványa között látható az 5 mm. tág ostium maxillare. A processus

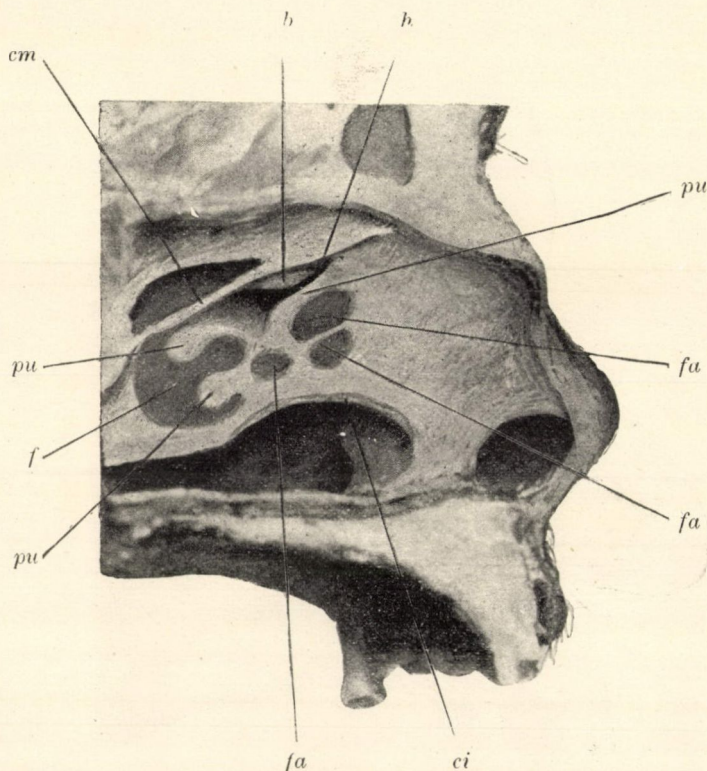
uncinatus hátsó vége, a processus maxillaris és a processus turbinalis (*pt*) mögött a 10 mm. magas hátsó fontanella (*f*) terül el, hátulról az inycsont függőleges lemezétől élesen határolva.



7. ábra. Természetes nagyság. A nyálkahártya-lemez az orrüreg felől leválasztva, a készítmény szárítva és lakkal bevenva. *ci* alsó kagyló, *pu* processus uncinatus, *pt* processus turbinalis, *h* hiatus semilunaris, *b* bulla ethmoidalis, *om* ostium maxillare, *oa* ostium accessorium, *fa* mellő alsó fontanella, *f* hátsó fontanella, *cm* a lemetezett középső kagyló széle.

A 8. ábrán bemutatott száraz készítményen a processus uncinatus nyújtványaival sajátyszerűen jelentkezik. A processus uncinatus (*pu*) hátsó vége két széles lemezbe megy át (*pu*), ezen két lemez és az inycsont függőleges lemeze között terül el a 15 mm. hosszú és 12 mm. magas hátsó fontanella (*f*). A processus uncinatus hátsó felső vége felett a hátsó fontanella

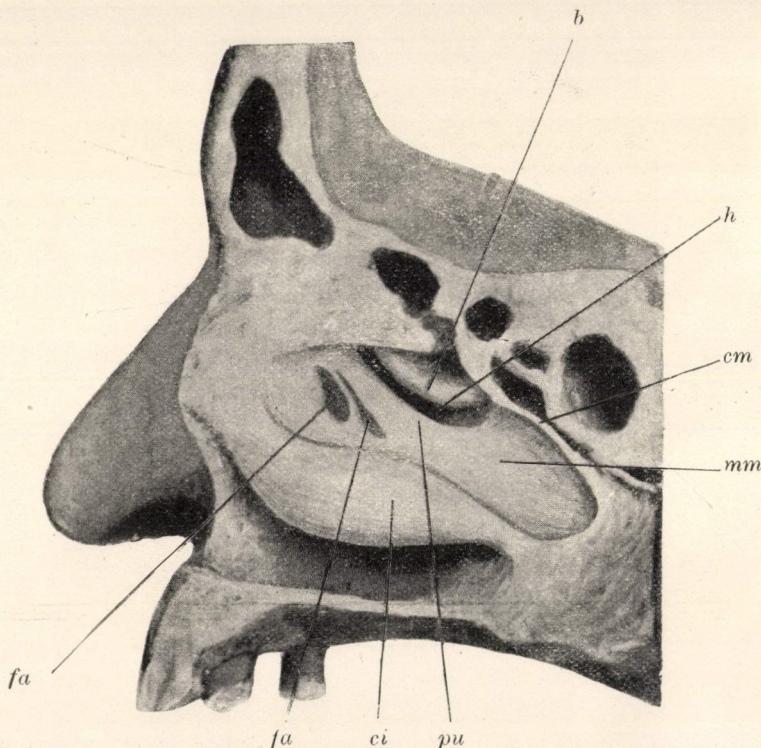
(f) folytatódik a hiatus semilunarisban az ostium maxillare határoló maxillaris nyújtványig, mely nyílás 7 mm. hosszú és $4\frac{1}{2}$ mm. magas.



8. ábra. Természetes nagyság. A nyálkahártya-lemez az orr felől van leválasztva, a készítmény szárítva és lakkal bevonva. *ci* a lemetezett alsó kagyló széle, *pu* processus uncinatus, *pu* a processus uncinatus hátsó végei, *fa* mellső alsó fontanella, *f* hátsó fontanella, *h* hiatus semilunaris, *b* bulla ethmoidalis, *cm* a lemetzett középső kagyló széle.

A hiatus semilunaris (*h*) és a processus uncinatus (*pu*) alatt három mellső alsó fontanella (*fa*) látható, a processus uncinatus két turbinalis nyújtványa és az alsó kagyló közt egy 5 mm. hosszú és 3 mm. magas fontanella (*fa*), a hiatus semilunaris alatt egy 9 mm. hosszú és 5 mm. magas fontanella (*fa*),

közvetlenül alatta egy vékony csonthid által elválasztva még egy 5 mm. hosszú és $3\frac{1}{2}$ mm. magas mellső alsó fontanella (*fa*). A 9. ábrán érzékített száraz készítményen az egész hiatus semilunaris (*h*) belenyílik 12 mm. hosszúságban a Highmor-

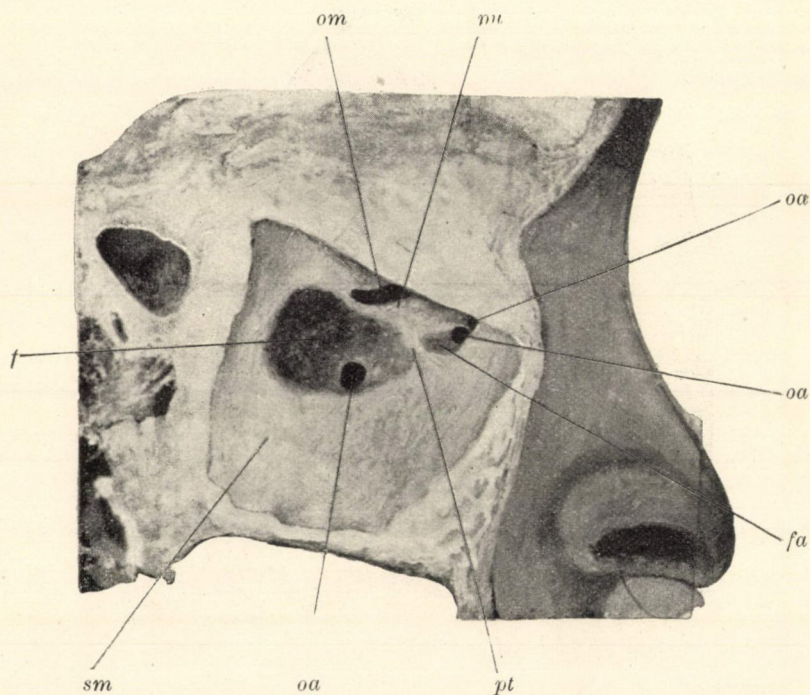


9. ábra. Természetes nagyság, a nyálkahártyalemez az orr felől eltávolítva, a készítmény szárítva és lakkal bevonva. *ci* alsó kagyló, *mm* középső orrjárat, *fa* mellső alsó fontanella, *h* hiatus semilunaris, *b* bulla ethmoidalis, *cm* a lemetezett középső kagyló széle.

üregbe a processus uncinatus (*pu*) és a bulla ethmoidealis (*b*) között. Az egész középső orrjárat (*mm*) csontos, csupán elől van két keskeny mellső alsó fontanella (*fa*) jelen.

A 10. ábrán érzékített száraz készítményen a processus uncinatus (*pu*) és az ínycsont között 20 mm hosszú és 13

mm magas hátsó fontanella (*f*) kerül el, benne közvetlenül az alsó kagyló felett egy 3 mm hosszú és 4 mm magas járulékos nyílás (*oa*) foglaltatik. A processus uncinatus turbinalis nyújtványa (*pt*) előtt van egy 9 mm hosszú és 3 mm magas mellső alsó fontanella (*fa*), benne egy 2 mm. és egy 1½ mm. tág



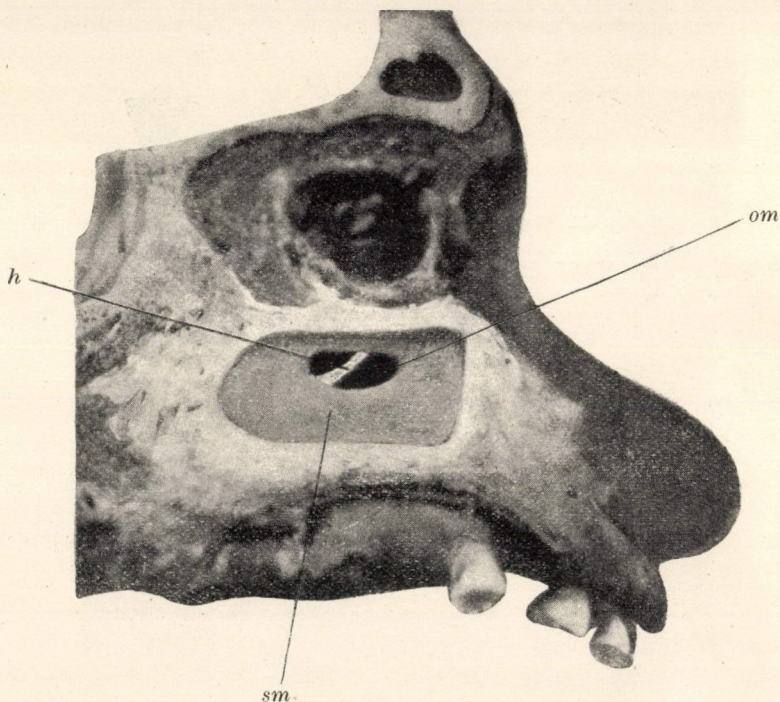
10. ábra. Természetes nagyság. A nyálkahártyalemez a Highmorüreg felől leválasztva, a készítmény szárítva és lakkal bevonva. *sm* Highmor-üreg, *oa* ostium accessorium, *f* hátsó fontanella, *om*, ostium maxillare, *pu* processus uncinatus, *pt* processus turbinalis, *fa* mellső alsó fontanella.

járulékos nyílással (*oa*). A hiatus semilunaris (*om*) 11 mm. hosszúságban nyílik a Highmor-üregbe (*sm*).

A 11. ábrán érzékített száraz készítmény a Highmor-üreg (*sm*) felől mutatja a 12 mm hosszú és 5 mm magas ostium maxillaret (*om*).

Még egynehány adatot kívánunk a következőkben felsorolni.

Egy készítmény a bal oldalon rendes viszonyokat tüntet fel, a jobb oldalon azonban hiányzik a processus uncinatus, a hiatus semilunaris és a bulla ethmoidalis. A középső orrjáratot ismert configurációja helyett az alsó és a középső kagyló között egy sima fal képezi. A középső orrjárat közepén nyílik a Highmor-üreg



11. ábra. Természetes nagyság. Készítmény szárítva, a Highmor-üreg kívülről megnyitva. *sm* Highmor-üreg, *om* ostium maxillare, *h* hiatus semilunaris.

egy 2 mm. tág nyílással, ostium maxillare, melyet csontos szélek határolnak. Tőle hátrafelé egy 7 mm hosszú és 5 mm magas fontanella található. Egy készítményen a középső orrjárat fala csontos, a hiatus semilunaris hátsó része alatt egy csontos szélekkel határolt 2 mm. tág járulékos nyílás, ostium accessorium van jelen, a hiatus semilunaris mögött látható egy $1\frac{1}{2}$ mm-es és két 1 mm-es hártvás részlet.

Egy készítményen a processus uncinatus és az inyesont között egy 10 mm hosszú és 12 mm magas hátsó fontanella, mely a processus uncinatus felett 17 mm. hosszúságban a hiatus semilunarisba terjed a maxillaris nyujtvány által határolt 7 mm. tág ostium maxillareig; a processus uncinatus alatt három turbinális nyujtvány, ezekről mellette két $2\frac{1}{2}$ mm-es és elől egy 9 mm hosszú és 3 mm magas mellső alsó fontanella látható.

Egy készítményen a 38 mm hosszú és 35 mm magas Highmor-üreg rendes nyílásával egy 28 mm hosszú, 23 mm széles és 46 mm magas alveolaris cysta által el van szorítva és szűkítve. A processus uncinatus alatt egy 10 mm hosszú és 2 mm magas mellső alsó fontanella, a processus uncinatus felett egy 8 mm hosszú keskeny hátsó felső fontanella van jelen, mely az ostium maxillaret határoló maxillaris nyujtványig terjed.

Vizsgálataink a Highmor-üreg rendes nyílásának, az ostium maxillarenek különböző nagyságát tüntették fel, mely 2 és 12 mm köztváltakozott, két esetben az egész hiatus semilunaris 11 és 12 mm hosszúságban nyílt a Highmor-üregbe. A Highmor-üreg rendes nyílása a hiatus semilunaris mellső és hátsó felében különböző nagyságú külön nyílással lehet jelen, a nyílás nyálkahártyaköteg vagy csontos lécz által is kettéválasztott lehet, a hosszúsági és magassági átmérők is nagyon ingadozhatnak. Az ostium maxillare szélei egészben csontosak lehetnek, többnyire egyik részét a nyálkahártya képezi. Az észlelt fontanellák között a hátsó fontanella hossza 1 és 15 mm, magassága 1 és 12 mm között, a hátsó felső fontanella hossza 5 és 17 mm, magassága 2 és 5 mm között, a hátsó alsó fontanella hossza 3 és 2 mm, magassága 3 és 15 mm között, a mellső alsó fontanella hossza 1 és 16 mm, magassága 1 és 6 mm között ingadozott. Egy-egy hátsó és mellső fontanella mellett egyes esetekben a mellső alsó fontanellák kettesével, hármasával voltak jelen, így egy esetben egy hátsó fontanella mellett két mellső alsó fontanella, egy második esetben egy hátsó és egy hátsó felső fontanella mellett három mellső alsó fontanella, egy harmadik esetben egy hátsó és egy hátsó felső fontanella mellett három

mellső alsó fontanella és egy negyedik esetben egy hátsó felső és egy hátsó alsó fontanella mellett két mellső alsó fontanella volt jelen. Három esetben észleltünk csontos falú középső orrjáratot, egy esetben csupán hátul volt 1—1½ mm-nyi hártvás rész, két esetben pedig csupán mellül. Ezen leletek megdöntik HAJEK azon állítását, hogy minden esetben van egy hátsó fontanella. A járulékos nyílások száma kettő, három, sőt négy is lehet. A fontanellában hártvás szélekkel 1½ egész 6 mm-nyi nagyságban, csontos szélekkel 1½ egész 5 mm-nyi nagyságban, és részben csontos, részben hártvás széllel 4 mm-nyi nagyságban találtuk. Három esetben hártvás szélű járulékos nyílás a hátsó fontanellában fordult elő, egy esetben a mellső fontanellában; egyszer az utóbbiban kettő, egyszer egy alsó fontanellában négy volt jelen. A csontos szélű járulékos nyílást egy esetben a hiatus semilunaris hátsó vége felett, egy esetben a hiatus semilunaris hátsó vége alatt, egy esetben pedig mindkettőt egy készítményen észleltük. Vizsgálataink eredményei idevonatkozó ismereteinket kiegészítik és a Highmor-üreg megbetegedéseinek tanában és a gyógykezelésnél is értékesíthetők, a miről más alkalommal lesz szó.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 nov. 20.-án tartott üléséből.)

REZGÉSEK MIKROSZKOPI MEGFIGYELÉSÉRŐL AZ ELEKTROMOS ELLENTÁLLÁS MEGHATÁROZÁSÁNÁL.

SCHULLER ALAJOS r. tagtól.

I. A módszer leírása. Az elektrolytok ellentállásának váltó-árammal történő meghatározására újabban a hangzó telefon helyett optikai telefont¹ vagy rezgési galvanometert² alkalmaztak, miáltal nemcsak pontosabb eredményhez jutottak, hanem egyszersmind a zavaró külső zörejektől is függetlenné tették magukat. Ugyanezt szolgálja a következő készülék is, melynél könnyű, lehetőleg kevésbé csillapodó test rezgéseit mikroszkoppal figyeljük meg.

A mikroszkop levehető asztalára egyik végén befogott finom aczéллеmezt (méreteit lásd a 204. lapon) és szabad vége közelébe két kis elektromágnezt erősítünk, a melyek közt a lemez középen rezeghet. Az asztallap mindenestől eltolható, úgy a lemez hosszirányában, mint rá merőleges irányban, s az elektromágnesek azonfelül még mikrometersrófokkal közelíthetők a lemezhez. A lemez szabad végére lehetőleg vékony drót van forrasztva, vagy más vékony szál van erősítve, mely mutatóul szolgál, a mennyiben a végére irányítjuk a mikroszkopot.

A kis elektromágnesek helyettesítik a telefon tekercsét, ennél fogva a Wheatstone-féle kombináció hídjába kapcsolandók, még pedig úgy, hogy ellenkező sarkok álljanak egymással szemben. Áramváltóval az elektromágnesek helyett esetleg telefont is kapcsolhatunk be, a mikor ezzel végezhetjük a közeli beállítást, melynél idegen zaj még nem zavar.

¹ M. Wien. Wied. Ann. 42., 599. és 44., 680. 1891.

² H. Rubens. Wied. Ann. 56., 27. 1895.

A váltó áramot kis induktor szolgáltatja, úgy mint Kohlrausch módjánál, csakhogy a primær áramkör megszakadásait különálló húros megszakító eszközli. Ugyanis itt lényeges, hogy a megszakadások száma lehetőleg megegyezzek a mutatós lemez rezgési számával. Felismerhetjük ezt a szokásos módon az együttzöngésen, melyet az indukált áram kis része, pl. a csak közelítőleg kiegyenlített Wheatstone-féle híd árama okoz, midőn az elektromágneseken átvezetjük. A mikroszkopba nézve módosítjuk a kezünk ügyébe eső húros megszakítón a feszültséget, s a mint a kellő rezgési számhoz közel jutunk, a mutatónak előbb éles szélei elmosódnak, helyesebben megkétszereződnek. Hogyha a rezgések tovább folytatott hangolás közben már jókorák lettek, az áramot a hídnek pontosabb beállításával gyöngítjük s a hangolást ismét folytatjuk, míg lehetőleg nagy érzékenységet el nem érünk.

A lemeznek mágnesezve kell lennie, de csak kis mértékben, mert erős mágnesség túlságos csillapodást okoz. A kellő mágnességet az által állítjuk elő, hogy mágnesrudat a lemez irányába helyezve és szükség esetén átfordítva, addig közelítünk a lemezhez, míg az érzékenység fokozódik. A mágnesrúd hatása alatt a lemez rezgési száma kissé módosulhat s ekkor az érzékenység a megszakító hangolása által még kissé fokozható. A mágnesrúd közeletartása természetesen felesleges, ha a lemez a kellő mágnességet megtartja.

A lemez akkor legérzékenyebb, a mikor a mutató rezgési száma legalább közelítőleg megegyezik a mutatóval ellátott lemez rezgési számával.¹ Változtatlan hosszúságú lemeznél az által érhetjük el ezt legalább közelítőleg, hogy a mutatót ollóval fokozatosan megrövidítjük. Pontosabb lesz az egyezés, ha utólag még a lemez hosszán is változtatunk. E végből a lemezt tartó satú rugalmassá van téve, úgy hogy a lemezt előbb csak könnyedén, csekély surlódással tartja s csak utóbb szorítjuk meg véglegesen. Ezen előleges hangolást kényelmes akként végezni, hogy a megszakító mechanikai rezgéseit visszük át a

¹ H. Sieveking és A. Behm hasonló módon fokozták a hangvilla rezgéseit. Ann. d. Phys. 15., 797. 1904.



lemezre. A satút a lemezzel és mutatóval együtt a megszakitó állványára fektetjük és a rezgéseket szabad szemmel vagy egyszerű nagyítóval figyeljük meg, mialatt a folyton rezgő megszakitót hangoljuk. A művelet befejezettnek tekinthető, a mikor a mutató vége erős rezgést végez, mialatt töve aránylag kevésbé rezeg és csomóhely nem mutatkozik.

Tökéletesebben kiegyenlíthetjük a mutató rezgési idejét a mutatóval felszerelt lemezével, hogyha a rezgéseket mikroszkoppal figyeljük meg, a mint ezen közlemény végén előadottakból kitűnik; ez azonban a mérés pontossága szempontjából nem látszik szükségesnek s csak hangtani tekintetben érdekes.

A mutató rezgései a mikroszkop tengelyére merőlegesek legyenek, azért a lemez oldallapjai ama tengelylyel párhuzamosan állítandók. Megtörténhetik azonban, hogy a mutató mind a mellett más irányban rezeg.

Ilyenkor a kívánt rezgési irányt a mutatónak sodrása által érhetjük el.

Az elérhető pontosság az imént tárgyalt hangoláson kívül főképen attól függ, hogy milyen kis mozgásokat sikerül a mikroszkopban felismerni. Ha tehát lehetőleg nagy érzékenységet akarunk elérni, tetemes nagyítást, pl. 600-szorost kell alkalmaznunk s oda kell törekednünk, hogy lehetőleg vékony jelre, határvonalra vagy csikra irányítsuk figyelmünket, s a mellett a fény is elég erős legyen. Az elérendő érzékenység fokához képest változik a megvilágítás módja is. Csekélyebb pontosságnál, mely azonban a hangzó telefontal elérhető már meghaladja, a mutatónak nevezett rezgő drótot vagy másnemű szálat, pl. emberi hajszálat a szokásos módon alulról világíthatjuk meg a mikroszkop tükrével vagy a közvetlenül a mutató alá helyezett, oldalról erősen megvilágított, ferdén álló fehér papírszelettel. A mutatónak sötét képe világos alapon tűnik elő s rezgés közben a mutató vékonyabbnak látszik és félárnyékkal van szegélyezve. Ez a jelenség azonban az itt tekintetbe jövő kis kitéréseknél nem nagyon feltűnő, mert a félárnyék a környező világos térnél csak kevésbé sötétebb, ellenben igen szembeszökő a szűk, világos résnek a megvastagodása. Ilyen rést készíthetünk úgy, hogy mutatóul drótot használva,

végét kilágyítás után élesen visszagörbítjük, míg egyes részei egymást érintik.

Mindezen jelenségek legfeljebb 200—300 szoros nagyítást engednek meg. Sokkal finomabb jelre teszünk szert, mely Auerfénnyel történő megvilágításnál 600-szoros nagyítást is megenged, ha a mutató szélén a difrakció következtében jelentkező interferenciális csíkokat lehetőleg élesen állítjuk elő. E végből a fény útjába a mutatóval párhuzamos rést teszünk, melyet czélszerű a mikroszkop tengelyén kívül alkalmazni, hogy a megvilágító fénynyaláb ferde legyen. A rés a mutatótól 1—2 centiméterre lehet s a világító harisnya képét lencsével vetjük rá. Ez esetben a sötét csíkok elmosódása jelzi a rezgéseket. Fényerő tekintetében még ennél is alkalmasabb tünetényt tapasztaltam, midőn mutatóul emberi hajszálat alkalmaztam, melyet résen átmenő fénnyel alulról világítottam meg. A középső világos csík körül kellő beállításnál sötét térben rövid világos csíkokat észleltem, melyek elmosódása rezgés közben feltűnőbb, mint a széleken fellépő sötét interferencia-csíkoké.

Az egyes készülékek elrendezése. A mutatóval felszerelt lemez, melynek rezgéseit a mikroszkopban figyeljük meg, természetesen igen érzékeny rázkódások és különösen a megszakító rezgése iránt, melylyel össze van hangolva. A *mechanikai rezgést* könnyen ártalmatlanná tehetjük az által, hogy a lemezzel ellátott mikroszkopot a dolgozó-asztal mellett álló, vele nem érintkező háromlábú székre állítjuk. Idegen rázkódások enyhítésére a széket parafa-darabokra vagy hasonló puha testekre állítjuk, rája pedig felváltva kendőket vagy kaucsuk-csőveket és deszkákat helyezünk s a felső puha rétegre állítjuk a mikroszkopot. Az áramot vékony, hajlékony zsinórokon át vezetjük a mikroszkophoz. Ilyenmű összeállításomnál a használt *húros torzió-megszakító* (lásd a 205. lapon) rezgései észrevehetetlenek és egyes idegen rázkódások sem okoznak lényeges zavart, minthogy csak futólagos hatást gyakorolnak.

Ugyanilyen tökéletesen háríthatjuk el a *mágneses rezgést* is, dacára annak, hogy a szükséges készülékek mind oly közel állanak, hogy a mikroszkopba néző megfigyelőnek kezeügyében vannak. Ezt az által érzük el, hogy a megszakító és az

induktor elektromágnesének tengelyét a lemez síkjában helyez-
zük el.

A módszer előnyei. Az ellentállásmérés ezen módjának egyik előnye abban rejlik, hogy idegen zörejek, melyek népesebb gyakorlatokban elkerülhetlenek, a mérés pontosságát nem befolyásolják. Némi előny az is, hogy a vezetők elektromos sűrítőképessége vagy kapacitása sokkal csekélyebb befolyást gyakorol, mint a hangzó telefontól, s rendszerint csak akkor érezhető, ha sokkal pontosabban dolgozunk, mint a hogyan a telefontól lehet.

Igaz, hogy ezen előnyökkel szemben áll az a hátrány, hogy a mutatóval ellátott lemez előállítása és hangolása némi fáradságot igényel, mely a hangzó telefontól elesik. Hogyha azonban a mutatóval felszerelt lemez a mikroszkop asztalára fel van erősítve és a két elektromágnes a lemez közelébe van állítva, a készülék változatlanul kész a használatra s lényeges nehézség már nem fordul elő, mert a megszakítót könnyű a lemezhez hangolni, még ha eredetileg teljesen el is volt hangolva.

A módszerrel elérhető pontosság meglepő, meghaladja a váltakozó árammal dolgozó összes eddig ismert módokét és eléri vagy legalább megközelíti az egyenárammal és a legérzékenyebb galvanometereinkkel elérhető pontosságot. A Kohlrausch-féle henger, melynek $16 \cdot 03$ ohm ellentállásu 314 centiméter hosszú drótja ezer részre van felosztva, az érzékenység kihasználására elégtelennek bizonyulván, két oldalára egyenlő ellentállásokat kapcsoltam, melyekkel az ellentállást a százszoros értékre egészítettem ki. Az eset most olyan, mintha százezer osztályrész hosszúságú dróttal dolgoznánk. A hídnek többi ágába két-kétszáz ohm volt kapcsolva. Ekkor az olyan lemezekkel, melyek a mutatóval csak felületesen voltak összehangolva, az egyes beállítások legfeljebb fél osztályrészszel különböztek.¹ Nem tekintve a középértéket, csak ezt a legnagyobb beállítási hibát véve alapul, a két ág viszonya egy helyett $\frac{50000 \pm 0.5}{50000 \pm 0.5} = 1.00002$, az eltérés tehát csak a százzezredrészekben mutatkozik.

¹ Feltéve, hogy a Kohlrausch-féle hengeren az érintkezések megbízhatók voltak.

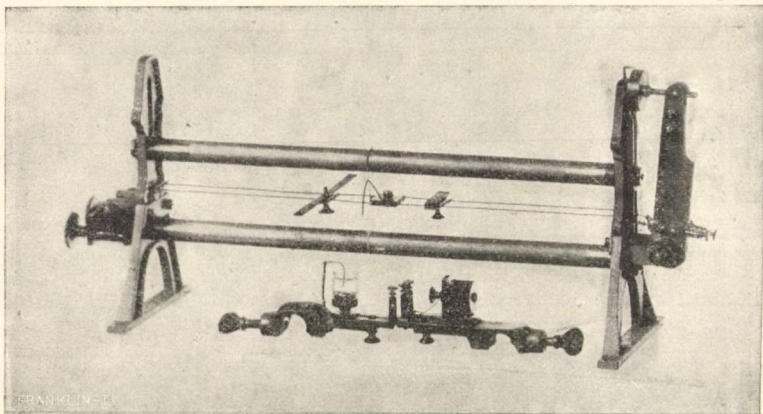
Ezen pontosságot értem el olyan aczéллеmezzel, mely maratás által vékonyítva, egy centiméter hosszra 0.00246 gramm tömegű volt. A lemez hossza 20—25 milliméter volt s mutatóját közel félakkora női hajszál képezte. Majdnem ugyanakkora érzékenységet lehetett elérni sokkal vastagabb aczéллеmezzel (39 milliméter), melyhez 25 milliméter hosszú bronzdrót volt forrasztva és a mely tetemesen gyorsabban rezgett. A mikroszkop 610-szeresen nagyított. Ekkora pontosságnál a vezetők kapacitása is érezhető befolyást gyakorol s a rezgések tökéletesen csak akkor tűnnek el, ha a kapacitás is kellően ki van egyenlítve.

Megjegyzésre méltó, hogy olynemű eltérést a telefon adataihoz képest, a melyet az optikai telefonnal és az elektrodynamometerrel tapasztaltak, egyáltalában nem lehetett észrevenni, csak a polározódásnak kellett jól platinált elektródokkal kellően elhárítva lenni. Természetesen ezt csak a telefonnal elérhető pontosságig lehetett megállapítani.

Ezen jelentékeny pontosság folytán a módszer alkalmas fém-vezetők ellentállásának a mérésére is, eközben a váltóáram következtében elkerüljük a thermo-áramok zavaró hatását. Hogyha másrésről elegendő a hangzó telefonnal elérhető pontosság, a mikroszkopikus megfigyelésnél tetemesen gyöngébb árammal dolgozhatunk, a mi lényegesen csökkenti a melegedést és a vele járó ellentállás-változást.

II. A húros torzió-megszakító. A rezgések mechanikai átvitelének csökkentése végett az egyhúros megszakító helyett torzió-rezgéseket végző kéthúrosat szerkesztettem, mely az ábrában van előtűntetve. A húrok az egyik oldalon végnélküli srófokkal egyenként, azonkívül a másik oldalon közösen is megfeszíthetők. A két húr ugyanis egykarú emelőhöz van erősítve, melynek a végén mikrometersróf száz részre beosztott dobbal szolgál a pontos beállításra. Egy dobosztályrésznek a húrokon megfelel 1.3 mikron meghosszabbodás és ez a legrosszabb esetben, mikor a húrok már erősen meg vannak feszítve, egy rezgésnek tizenkettő részével változtatja meg a rezgési számot, előnyösebb esetben egy rezgésnek csak negyvened részét teszi ki. A rezgési számot tehát igen pontosan

be lehet állítani, a mi a szóban forgó módszernél szükséges s a mit a megszakítóval könnyűséggel elérhetünk. A húrok közepén ebonitdarabbal át vannak hidalva s ezen van a meghegyezett platina-drót, mely rezgésközben a higanyba ér. Az ábrában a higanyedény a készülékről le van véve. A szikrák káros hatásának elkerülése végett a higany fölött $\frac{1}{2}$ vagy $\frac{3}{4}$ 0/0-os salétromsav-oldatot alkalmazok s a platina-drótot az elem (akkumulátor) negatív sarkával kapcsolom össze, hogy a drót amalgamazódjék és ezáltal az érintkezés biztosíttassék. A keletkező higany sót elektrolyziss útján távolítom el.² Erre szolgál a



vizes oldathá nyúló második platina-drót, mely a higanyt nem érinti és az elem pozitív sarkával áll kapcsolatban.

A negatív áram továbbá a higanytól áthalad a megszakító elektromágnesén, mely szintén levett állapotban van előtűntetve és a mely a húrokra keresztbe helyezett vaslemezre hat; azonkívül az áram áthalad az induktor primær tekercsén (3 ohm) és egy megszakítón.

Hogy a megszakítóval lehetőleg sokféle rezgési számot lehessen előállítani, a nélkül, hogy a húrokat túlságosan kelljen feszíteni vagy távolságukon változtatni, a húrokat keresztbe

² Schuller A. Tartós higany-contact. Math. és Term. Értesítő. III. 74. 1885.

tett fémrúddal terhelem meg, a milyen az ábrán is látható. Ilyen rudak tehetetlenségi nyomatékát kellően megválasztva, a rezgési számot pl. 100-tól kezdve négy-öt oktávval csökkenthetjük, a nélkül, hogy a hurokat túlságosan meg kellene lazítani. Hogy a terhelés alatt a hurok ne görbüljenek és a rezgő platinadrót bemerülése a higanyba ne nagyon változzék, a hurok közepén fel vannak akasztva. E végből az ebonit-lapba vékony varrótű van beleszúrva és az utóbbi czérnával az állványt összetartó vascsövekhez van kötve. A varrótű tengelyül szolgál, mely körül a torzió-rezgések végbemennek s egyúttal megakadályozza a párhuzamos rezgéseket, melyekre bizonyos lassú rezgéseknél hajlandóság mutatkozik.

Ez a megszakító olyan kevésbé adja át a rezgéseket a környezetnek, hogy a dolgozó-asztalon, puha tárgyakon, pl. kendőkön állva, közel lehet a mikroszkóp alatt rezgő lemezhez, mely azonban külön széken van elhelyezve, a nélkül, hogy a lemez a rezgéseket átvenné. Fontosabbak a mágnesség ingadozásai, melyek elhárításáról már előbb volt szó.

III. A lemez többszörös rezonálása. A lemez nemcsak akkor jut erős rezgésekbe, mikor az impulzusok periodusa megegyezik a rezgés tartamával, hanem akkor is, mikor a lemez rezgési száma egész többese a megszakadások számának. Ha tehát n jelenti a mutatós lemez másodpercenkénti rezgéseinek számát, akkor nemcsak n megszakadásnál, hanem $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{4}$, stb. megszakadásnál is rezeg, habár fokozatosan gyöngébben. Hogyha továbbá a mutatónak mint önállóan rezgő testnek a rezgési száma (n_1) eléggé eltér n -től, az előbbieken felül még $n_1, \frac{n_1}{2}, \frac{n_1}{3} \dots$ megszakadásnál is keletkeznek rezgések.

A többszörös rezonálás kétségtelenné teszi, hogy új rezgések gerjesztése tekintetében szabályosan ismétlődő impulzusok lényegesen másképp viselkednek, mint az ugyanazon időszakokban végbemenő harmonikus rezgés. Míg ugyanis az utóbbi csak azon rezgéseket képes előidézni, melyek szakasza legalább közel megegyezik amazéval, addig az egyenlő időközökben

ismétlődő rövid impulzusok számos rezgést képesek fentartani, melyek rezgési számai pontosan vagy közelítőleg egész számu többesei az impulzusok szakasz-számának s e közben a rendelkezésre álló energia ama rezgések bármelyikére átruházható. Érvényes ez nemcsak *egyoldalú* impulzusoknál, pl. a mikor hangvillát oly módon hozunk rezgésbe, hogy lassúbb rezgésű hangvilla vagy óra¹ szakítja meg az áramot, hanem érvényes váltakozva ellenkező irányú impulzusoknál is, a milyeneket az induktor szolgáltat. Az utóbbi esetben ugyanazon rezgéseket éleszthetjük, a melyeket az egyik oldal felé működő impulzusok egymaguk fentarthatnak, de a gerjesztett rezgések erősebbek, ha az ellenkező impulzusok is segítenek.

A következő táblázatban össze vannak állítva a megszakítónak másodpercenkénti rezgési számai, vagyis a megszakadások száma, melyeknél az indukált áramoknak a hídban fennmaradó kis része lehetőleg erős rezgéseket idézett elő. A megszakító rezgési számának meghatározására a megszakadásokat közel egyenletesen forgó kormozott papírhengeren jeleztem s ugyanazon írócsúccsal egyidejűleg időjeleket is előállítottam. Megszámláltam az egy másodpercire eső jeleket s a szakaszok tört részeit körzöbe fogva mértem meg, a mi a czélnak megfelelő pontossággal történhetett. Az egyidejű jelzéseket az által értem el, hogy a *Deprez*-féle elektromágneses írószerkezet két tekercsét megszakítottam s az egyikbe vezettem a megszakítón átmenő primær áram elágaztatott részét, a másikon pedig az időjelző lehetőleg rövid áramát, melyet fél másodperc-inga szakított meg.² Az írószerkezetnek fegyverzetét, melyen az írócsúcs van megerősítve, kemény, de kevésbé megfeszített rugó húzta vissza a nyugalmi helyzetbe, miáltal sikerült egyrészt elég rövid, körülbelül $\frac{1}{400}$ másodpercig tartó jeleket felrajzoltatni, másrészt gyöngé áram is elég határozott kitérést adott.

¹ *A. Leman*. Verhandl. d. Phys. Ges. zu Berlin. IX. 57. 1890.

Schuller A. Math. és Term. Értesítő. XII. 262. 1894.

² *Schuller A.* Az elektromos jelzőkészülékekről. Math. és Term. Értesítő. X. kötet. 209. 1892.

A megszakító rezgési számai a lemez legélénkebb rezgéseinél

n	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{3}$	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{5}$	$\frac{n}{6}$
Tapasztalt: 51·458 ...	25·677	17·131	12·854	10·292	8·571
„ „ „ „ „	—·727	—·164	—·—	—·—	—·—
Közép „ „ „ „ „	25·702	17·148	—·—	—·—	—·—
Számított értékek „	25·729	17·153	12·864	10·292	8·576
Eltérés ‰ „ „ „ „	1·0	0·3	1·0	—·—	0·8

Ezen számadatokból kitűnik, hogy a rugó a megszakítóknak igen különböző beállításainál rezeg. Annak megítélésére, hogy ez hányféle megszakadásnál érhető el, képzeljük, hogy a megszakadások száma változatlan marad, és vizsgáljuk meg, hányféle rezgést lehet velük gerjeszteni? Közvetlenül világos, hogy végtelen rövid ideig tartó, szabályosan ismétlődő impulzusokkal végtelen sok rezgést lehet megindítani, melyek a természetes hangsort ($1 : 2 : 3 : \dots$) alkotják. A sorozat tagjainak számát egyedül az a körülmény korlátozza, hogy az egyes impulzusok véges ideig tartanak. E tekintetben megfontolandó, hogy az impulzus csak akkor erősítheti egész tartama alatt a rezgést, ha a fél rezgési időnél tovább nem hat. A valóságban még valamivel rövidebb tartamú impulzus lesz a leghatásosabb. Mert ha az impulzus éppen egy fél rezgési ideig hat, akkor lehetséges ugyan, hogy a rezgő test az impulzus egész tartama alatt azon irányban mozog, melyben az impulzus erősítőleg hat, de a legcsekélyebb zavar, pl. csekély elhangolás már azt okozná, hogy az impulzus egy része az ellenkező mozgás idejére esnék, a mozgást tehát hátráltatná.

A fél rezgési időnél hosszabb impulzusnak csak egy része fokozza a rezgést és ez a rész nullára csökken, mialatt az impulzus tartama eléri az egész rezgési időt. Azontúl csak a többlet hat előnyösen stb.

Az induktornál az egyes áramok rövid idő alatt folynak le, innen van, hogy sokféle rezgési időt lehet velük előállítani. Ugyenezen körülménynek tulajdonítható az is, hogy a vezetők kapacitása oly csekély hatást gyakorol. Mert a Wheatstone-féle kombináció egyes ágainak eltérő kapacitása azt eredményezi, hogy az egyenárammal kiegyenlített hídca az induktortól szár-

mazó minden egyes áram két ellenkező áramot szolgáltat, melyek a telefonban, valamint az elektrodynamometerben érvényesülnek, ellenben a lemezt nem rezgetik, feltéve, hogy mindkettő a lemez fél rezgései idején belül szorosan összeszorulva folyik le.

A mondottak arra az esetre vonatkoznak, midőn a mutatóval ellátott lemez rezgési száma közel ugyanakkora, mint a mutatóé egymagában, a mikor csak az együttes rezgés fejlődik ki. Hogyha ellenben ama két rezgés tartama eléggé különbözik egymástól, akkor az induktor áramaival mindkettő külön gerjeszthető s mindegyikre áll az, hogy a megszakítónak ama rezgésszámainál jelentkeznek, melyeknek maguk egész számú többségeit képezik.

Ha már most megtaláltuk a megszakítónak azon beállítását, melynél ama két rezgési számot megadja, akkor tudjuk, hogy a kettőnek kiegyenlítésére a lemezt meg kell-e hosszabbítani, vagy megrövidíteni? Ez az összehangolásnak az a módja, melyre a 201. lapon utaltam.

(A M. Tud. Akad. III. osztályának 1905 december 18.-án tartott üléséből.)

AZ IONOK HYDRATATIOJÁRÓL.

BUCHBÖCK GUSZTÁV-tól.

I. közlemény.

Az a kérdés, vajjon az ionok vizes oldatban hydratok alakjában, vagy szabadon vannak-e jelen, a physikai chemia legaktuálisabbjainak egyike, hiszen tagadhatatlanul alapvető fontosságú úgy annak a szerepnek a megítélésénél, mely az oldószernek az ionisatio létrejöttének mechanismusában jut, mint az egyensúly törvényeinek elektrolytokra való alkalmazásánál is. Az első impulsus ezen eszme felvetésére alighanem azon tény felismerésére vezethető vissza, hogy különösen associáló folyadékok azok, melyek dissociáló hatásúak, és habár hosszú ideig nem sikerült ezen feltevés helyességét közvetlen bizonyítékokkal igazolni, és quantitativ jellegű ilyen bizonyítékok tudtommal a mai napig sem állanak rendelkezésünkre, mégis gyors egymásutánban szaporodtak az olyan esetek, melyek közvetve az említett felfogás jogosultsága mellett szólnak. Magukban véve döntő súlylyal nem bíró jelenségek összességükben bizonyító jellegűekké váltak, olyannyira, hogy ionhydratok létezését legalább is nagyon valószínűvé teszik. E kérdés irodalma az utolsó években nöttön nött és legújabbán összefoglaló ismertetésben¹ is részesült, úgy hogy annak tárgyalását itt mellőzhetem.

¹ EMIL BAUR: Von den Hydraten in wässriger Lösung. Samml. chem. u. chem.-techn. Vorträge. Bd. VIII (1903). — K. DRUCKER: Die Anomalie d. starken Elektrolyte. Ugyanott Bd. X (1905). L. egyúttal R. ABEGG: Die Theorie d. elektrolyt. Dissociation. Ugyanott Bd. VIII (1903).

A kérdés biztos, és bizonyos fokig egyúttal mennyiségi értelemben vett eldöntésére kínálkozó eljárások közül különösen az biztat sikerrel, melyet NERNST és tanítványai, LOTMAR, GERRARD és OPPERMANN követtek.¹ E módszer abban állott, hogy elektrolytokat valamely nemelektrolyt jelenlétében elektrolyzáltak és megvizsgálták, vajjon a víz elektrolysis közben a nemelektrolythoz képest eltolódik-e vagy sem. Sósavat, bromhydrogent, salétromsavat és kénsavat bórsav jelenlétében elektrolyzálva, a talált concentratiováltozásokból azt következtették, hogy — a H^+ iont nem hidratálnak feltételezve — a Cl' , Br' és NO'_3 ion 5, 4 ill. 2·5, a sulfat-ion pedig több mol. vízzel vándorol. Ugyanezen elv alapján végzett diffusiokísérletek kevésbé határozott eredményhez vezettek, úgy hogy a vízben oldott eczetsav, vajsav, bórsav és ezüstnitrát hidratatiója biztosan constatálható nem volt. NERNST e kísérletek alapján azon conclusióhoz jut, «dass nämlich die Hydratation gelöster Stoffe im allgemeinen entweder fehlt, oder jedenfalls nur sehr geringfügig sein kann».

Az 1901. év elején én is munkába vettem, a nélkül, hogy NERNST munkájáról tudomásom lett volna, a kérdéses problémának ugyanazon úton való megoldását. Ezüstnitrátot phenol jelenlétében elektrolyzáltam, de hamarosan meggyőződtem arról, hogy úgy az átviteli számok meghatározására szolgáló eljárásnak, mint a nemelektrolyt analitikai meghatározása módjának lényeges tökéletesítése nélkül e módszer használható eredményekhez nem vezethet. Első sorban arra kellett törekedni, hogy az elektrolysisiskor beálló concentratiováltozások minél nagyobbak legyenek, ki lévén zárva máskülönben némileg is biztos meghatározása azon előreláthatólag igen csekély vízmennyiségeknek, melyek a kationnal és az anionnal vándorolt vízmennyiségek különbségeken elektrolysis közben eltolódnak. Másodszorban olyan nemelektrolyt alkalmazása vált szükségessé, a mely a legnagyobb, lehetőleg néhány $\frac{1}{100}$ %-nyi pontossággal határozható meg, mert különben meghaladják az analitikai

¹ Über die Hydratation der Ionen. Nachr. d. k. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1900. 68–89.

hibákból eredő eltérések a mérendő concentratiováltozást. E nehézségek legyőzése sok türelmet igényelt és csak most sikerült a kísérleteket annyira befejeznem, hogy ezen első közleményt közzétehessem. A munka a *Magyar Tud. Akadémia* megbízásából és támogatásával készült; legyen szabad ezért mélyen érzett hálámnak kifejezést adnom. Mélyen tisztelt tanáromnak és főnökömnek, THAN KÁROLY professor úr ő Méltóságának is nagy köszönettel tartozom buzdító érdeklődéseért és azon lekötelező szívessegeért, a melylyel intézetének anyagait és eszközeit rendelkezésemre bocsátotta. A kísérletek egy részénél FODOR JENŐ KÁLMÁN egyet. gyakornok úr kiváló ügyességgel támogatott; fogadja szívessegeért őszinte köszönetemet.

A módszer leírása.

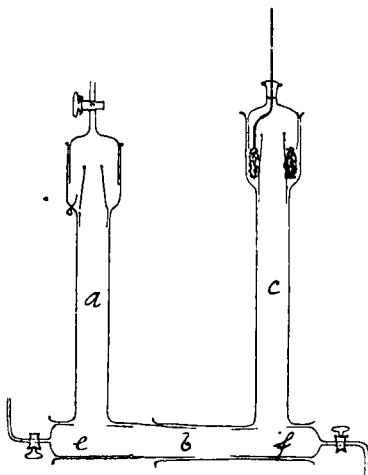
Átviteli számok mérésére számos készüléket irtak le. Az ezüstnitrattal végzett eredménytelen, tájékoztató előkísérletek után sósavra tértem át és megkíséréltem azt az ismert készülékekben, cadmiumanodot használva, elektrolyzálni. Azonban igen kicsiny áramerősséggel sem sikerült az oldatot huzamosabban elektrolyzálnom a nélkül, hogy az oldat középső részlete cadmiumtartalmúvá ne vált volna. A sűrű cadmiumchlorid-oldatnak hőáramlások okozta ezen elterjedése HITTORF-nak is nehézségeket okozott és ezért azt újabban¹ sűrű selyemszövetből készült diaphragmák alkalmazásával iparkodott elkerülni. Hogy ilyen áramlás mindig létrejön, valahányszor az oldat az elektrod körül concentrálódik,² arról könnyű meggyőződni, ha egy nyom ezüstnitrátot tartalmazó hígított salétromsavat platina-anod és alul elhelyezett, ezüstchloriddal fődött platinakathod között elektrolyzálunk. Ilyenkor azt tapasztaljuk, hogy az ezüstchloridkathodról, a hol, éppen úgy, mint a cadmiumanodnál, concentráltabb réteg (sósav) keletkezik, csakhamar felhős csatorna emelkedik, mely az anod felé törekszik és azt végül el

¹ Zeitschr. f. phys. Chemie 39. 616 (1902).

² A cadmiumchloridnál ezt a hőáramlást még előmozdítja az a körülmény, hogy rosszabb vezető és ennél fogva a fölötte lévő oldatnál jobban melegszik.

is éri.¹ Az ilyen hőáramlások teljes kizárására ennél fogva leg-czélszerűbbnek mutatkozik a kísérletnek olyformán való berendezése, hogy az oldat mindkét elektrod körül higuljon. Ez esetben természetesen az elektrodokat felül helyezzük el, és miután már most a JOULE-féle meleg felülről lefelé csökken, ilyen módon az electrolysis közben képződő rétegeknek természetes helyzete biztosítva van, a mi a kísérlet végrehajtását rendkívüli módon megkönnyíti és minden egyéb óvintézkedés nélkül az átviteli számok meghatározását teljesen megbízható műveletté teszi, míg az, ellenkező esetben, oldható anod alkalmazásakor, legalább tapasztalataim szerint, mindig finnyás, és azt hiszem, megbízhatatlan. Csak ilyen módon sikerült az electrolysist addig folytatnom, míg a concentratiováltozás céljaimnak megfelelővé vált.

A sósavnál a kitűzött célt könnyű elérni, ha kathodul platinát és anodul ezüstöt választunk,² a minek nagy előnye az is, hogy idegen anyagok nem jutnak a folyadékba. A vizsgálataimhoz használt készüléket az 1. ábra tünteti elő. Két,



1. ábra.

köszörülettel egymásba illeszthető részből áll. A csapos *e* és *f* köszörületek *a* és *c* csövek keresztmetszetének megfelelően ki vannak lyukasztva, általában gondoskodva van arról, hogy a készülék keresztmetszete fölülről lefelé sehol se kisebbedjék. Az *a* és *c* csövek kiszélesedő felső részeibe kis tölcsek vannak becsiszolva. Kathodul az *a* felső részébe beforrasztott platina-

¹ E jelenség természetesen nem téveszthető össze a *Cl* ionoknak ugyanazon irányban való, az áramtól elválaszthatatlan vándorlásával, mely utóbbi az egész keresztmetszetben egyenletesen történik.

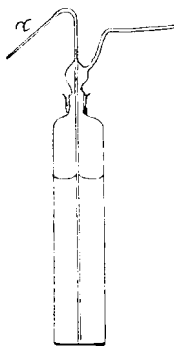
² Hasonlóan járt el NOYES és SAMMET: Zeitschr. f. phys. Chemie 43. 49 (1903).

drót, anodul legfinomabb ezüstdrótszövet szolgál, mely, gyűrűszerű pamattá összecsavarva, a *c* kiszélesedő része és a becsiszolt tölcser közötti vályúban fekszik és vastag ezüstdróthoz van erősítve. Miután a legtisztább árúbeli ezüst is kevés rezet tartalmaz, czélszerű az ezüstelektrodot sósav elektrolysisénél anodul használni, a mikor a réz oldatba megy, majd az így kapott chloridelektrodot ugyancsak elektrolytosan reducálni és csak az így tisztított, használat előtt kiizzított elektrodot a tulajdonképeni kísérletekhez használni. Az ilyen ezüstelektrod igen tartós; valamennyi kísérletet egy ugyanazon elektroddal végeztem. Az *a*-ban levő tölcser felső nyílását czélszerű finom selyemgázzal lekötöni, nehogy a gázfejlődés okozta mozgás az *a* csőben levő folyadékra áttérjedjen.

A kísérlet kivitele már most a következő. Miután a készülék két részének súlyát külön-külön meghatároztuk, a két részt összeillesztjük, majd a készüléket kaucsukcső közvetítésével, *e* vagy *f* csapon át, az oldattal megtöltjük. Az elektrolysis befejezése után az oldatot, az *e* és *f* közsőrületek megfelelő forgatása útján, három részre különítjük el, és miután a középső *b* részt kiüritettük (indifferens oldat) és a készülék ezen részét kimostuk és kiszáritottuk, úgy a kathodoldatot tartalmazó *a* részt, mint az anodoldatot tartalmazó *c* részt újból megmérjük. Miután a kathodon fejlődő hydrogen vízgőzt víz magával, a távozó gázt megmért kis chlorealciumcsövön vezetjük át. E cső súlyszaporodása a kísérlet hőmérséke és időtartama szerint 0·01—0·03 gr. volt. Voltameternek, tekintettel a kiválotzt ezüst jelentékeny mennyiségére (8—15 gr.), 20%-os ezüstnitrátoldatot tartalmazó nagy platinacsészét használtam; az ezüstanod agyagdiaphragmában volt elhelyezve. Az áramsűrűség az OSTWALD-LUTHER-féle Handbuchban adott határértékeket nem haladta meg. A voltametercsészét néhány órai időközökben 5-ször megújított hideg vízzel mostam és 160°-on száritottam.

A sósav meghatározása — ezen értekezésben csak ezen elektrolyttal végzett kísérletekre szorítkozom — szénsavmentes natronlúggal való titrálás útján történt; indicatorul methylorange-t használtam. Hogy a büretták falaihoz lassacskán tapadó zsírnyomok okozta meniscus-eltorzulásokat, illetőleg az ebből

eredő leolvasási hibákat, nemkülönben a hőmérsékváltozásokból eredő térfogathibákat — a kísérletek egy részét télen, másikat nyáron végeztem — elkerüljem, térfogatbüretták helyett csapos, golyóalakú súlybürettákat használtam. Miután ezeknek súlya jó táramérlegen csaknem 0'001 gr.-nyi pontossággal határozható meg, és a szénsavmentes natronlúg némi gyakorlat mellett methylorange-zsal is rendkívül éles színátmenetet ad, az egyes párhuzamos meghatározások mindig néhány $\frac{1}{100}\%$ -ig egyeztek. A natronlúg titerjét közvetlenül sósavgáznak megmért mennyiségére vonatkoztattam. Ezt az eljárást, tekintettel az eddig ajánlott titeranyagok mindegyikénél többé-kevésbé mutatkozó bizonytalanságokra, nemcsak a legpontosabbnak tartom, hanem egyszerűségénél fogva is melegen ajánlhatom, miért is röviden leirom. A sósavgázt tömény sósavból fejlesztjük, oly módon, hogy mintegy 400 cm³-nyi lombikot vele kétharmadáig megtöltünk és hozzá csapos tölcserből tömény kénsavat csepegtetünk. Az igen egyenletes áramban fejlődő gázt két, tömény kénsavat tartalmazó mosóüvegen átvezetve megszáritjuk és ha a készülékből a levegőt teljesen kiüztük, a mit a fejlődő gáznak vízbe vezetése útján ismerünk fel, a-nál a 2. ábrán látható, megmért mennyiségű vizet tartalmazó absorptioedénybe vezetjük. Ezen edény be- és kivezető csövei capillárisak; absorptio közben czélszerűen hideg vízbe állítjuk. A sósav sűrű réteg alakjában az edény alján marad; víz sem párolog el, miután levegő az edényből nem távozik. Absorptio után megmértén az edényt, a súlykülönbség megadja az oldat sósavtartalmát. Elegyítés után folyadékrészleteket kifűvünk és az említett módon natronlúggal megtitrálunk.



2. ábra.

Az átviteli számok meghatározására szolgáló, imént leírt módszer használhatóságának igazolására két, tiszta sósavval végzett kísérlet adatait közlöm. A sósavat úgy ezen, mint a később leírandó kísérletekhez a fentebb leírt módon előállított tiszta sósavgáznak destillált vízbe vezetése útján állítottam elő. A közölt átviteli számok a megfelelő elektrodon észlelt concentratiováltozásnak a két elektrodon talált concentratiováltozások összegéhez való viszonyát fejezik ki.

S ó s a v.

1 gr. vízre 0·036641 gr. HCl.

1 cm³-ben 0·035901 gr. HCl.

1 gr.				Az összes						Az			
eredeti	indiff.	kathod.	anod.	indifferens		kathod.	anod.		indiff.	kathod.	anod.		
				oldat tartalmaz elektrolisis									
oldat tartalmaz				előtt	után	előtt	után	előtt	után	oldat koncentrációváltozása			
HCl	0·035346	0·035349	0·028540	0·019450	3·2414	3·2416	2·3902	1·9158	5·5213	2·9889	+0·0002	0·4714	2·3324
Víz	0·964654	0·964651	0·971460	0·980350	88·4634	88·4634	65·2342	65·2342	150·6871	150·6871	—	—	—

BUCHBÖCK GUSZTÁV.

Kísérlet tartalma 10 h 50 M Kiválasztott ezüst 8·895 gr. = 0·08241 gr.-equ. II átviteli száma 0·8422
 Áramerősség 0·2 A. Elbomlott sósav 0·08248 * * Cl * * 0·1578

Analitikai adatok. Lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·034689 gr. HCl. *Ered. oldat:* 25·560 gr. oldat = 26·047 gr. lúg, 25·365 gr. oldat = 26·048 gr. lúg, tehát 1 gr. oldat = 1·01904, ill. 1·01890, k. é.-ben 1·01897 gr. lúg = 0·035346 gr. HCl. — *Indiff. oldat:* 31·452 gr. oldat = 32·050 gr. lúg, 39·737 gr. oldat = 40·405 gr. lúg, tehát 1 gr. oldat = 1·0190, ill. 1·0191, k. é.-ben 1·01905 gr. lúg = 0·0353349 gr. HCl. — *Kathod.-oldat:* 29·963 gr. oldat = 24·652 gr. lúg, 33·669 gr. oldat = 27·700 gr. lúg, tehát 1 gr. oldat = 0·82272, k. é.-ben 0·82274 gr. lúg = 0·028540 gr. HCl. — *Anod.-oldat:* 43·473 gr. oldat = 24·376 gr. lúg, 50·288 gr. oldat = 28·196 gr. lúg, tehát 1 gr. oldat = 0·56072, ill. 0·56069, k. é.-ben 0·56071 gr. lúg = 0·019450 gr. HCl.

2. táblázat.

S ó s a v.

1 gr. vízre 0·097588 gr. *HCl*. 1 cm³-ben 0·09238 gr. *HCl*.

1 gr.				Az összes						Az			
eredeti	indiff.	kathod.	anod.	indifferens		kathod.		anod.		indiff.	kathod.	anod.	
oldat tartalmaz				oldat tartalmaz elektrolýsis									
				előtt	után	előtt	után	előtt	után				
HCl ...	0·088911	0·088839	0·077809	0·061508	8·4347	8·4273	5·3681	4·6383	10·4267	7·0030	0·0074	—0·7298	—3·4237
Víz ...	0·911089	0·911161	0·922191	0·938492	86·4327	86·4327	55·0090	55·0090	106·8480	106·8480	—	—	—

Kísérlet tartama 9h 50M Kiválozt ezüst 12·278 gr. = 0·11375 gr.-æqu. II átviteli száma 0·8243
 Áramerősség 0·3 A. Elbomlott sósav 0·11395 " " Cl " " 0·1757

Analytikai adatok. Lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·10100 gr. *HCl*. — *Ered. oldat*: 62·770 gr. oldat = 55·260 gr. lúg. —
Indiff. oldat: 64·355 gr. oldat = 56·610 gr. lúg. — *Kathod-oldat*: 55·625 gr. oldat = 42·855 gr. lúg. — *Anod-oldat*:
 86·565 gr. oldat = 52·720 gr. lúg.

Megfelelő módszerrel rendelkezvén az átviteli számok meghatározására, már most kielégítő pontossággal analitikailag meghatározható nemelektrolytról kellett gondoskodnom. E célból phenollal, acetonnal, bórsavval, formaldehyddal és jodecyanal végeztem kísérleteket. Ez anyagok közül az első hármat, a melynek meghatározásmódját nem sikerült e munka igényeinek megfelelően tökéletesítenem, ez okból el kellett vetnem. Ellenben a formaldehyd és a jodecyan jodometrice rendkívül élesen határozható meg. Mind a mellett ezekkel sem sikerült használható eredményeket kapnom, kétségtelenül az elektrodozon beálló chemiai változások folytán. Végül a mannitban és a resorcinban akadtam két olyan nemelektrolytra, melynek pontos meghatározása sikerült. Az analitikai eljárást a következőkben ismertetem.

A mannit meghatározása. Az eljárás lényege az, hogy az oldatból tiszta ezüstcarbonattal (ezüstoxyd megtámadja a mannitot) a sósavat eltávolítjuk és miután a leszűrt oldatból az oldott ezüstöt kénhydrogennel leválasztottuk, a kapott tiszta mannitoldatot szárazra párologtatjuk. Hogy pontos eredményeket kapjunk, a következő módon járunk el. Az ezüstcarbonatot kb. 0.1 norm. ezüstnitrátoldatból ugyanilyen hígítású kaliumhydrocarbonatoldattal állítjuk elő, decantatio útján igen gondosan mossuk és kisajtolás után vacuumban phosphorpentoxyd fölött közönséges hőmérséken állandó súlyig szárítjuk. Az analizálandó oldat egy részében már most meghatározzuk titrálás útján a sósavtartalmat és miután a mannit meghatározására szolgáló oldatrészletnek megfelelő ezüstcarbonatmennyiséget kiszámítottuk, a számított mennyiségnél 2—3 gr.-mal többet lemérünk, azt kb. 300 cm³-es lombikban mintegy 150 cm³ vízzel leöntjük és az analizálandó oldatot hozzáelegyítjük. A lombik nyakába capilláris csappal felszerelt kaucsukdugót illesztünk, és miután a szénsav nagyobbrésze eltávozott, az oldott szénsav eltávolítása céljából a lombikot kiszivattyúzzuk, majd hevesen rázzuk, mindaddig, míg a kezdetben tejszerű folyadék teljesen megtisztult, a mi kellő ezüstcarbonatfölsleg mellett (2—3 gr.) igen rövid idő multán bekövetkezik, végül pedig (a csap kinyitása után) megmérjük, hogy a csapadék és folyadék

összes mennyiségét megtudjuk. Az ismert sósavtartalom révén a csapadék ezüstchloridtartalma és így összes súlya is ismeretes lévén, ebből a folyadék súlya is egyszerűen adódik. A csapadékról a folyadékot már most, a párologás elkerülése céljából zárt tölsérben, gyapoton leszűrjük, és a megmért szüredékben a mannitot meghatározzuk. E célra a szüredékhez fölös mennyiségű, hevenyében készített kénhydrogenes vizet adunk és a sötétbarna folyadékot, hogy az oldott kolloid ezüstsulfid oldhatatlanná váljék, vízfürdön szárazra párologtatjuk; a párologtatás vége felé a csészét óraüveggel befödjük. A műveletet még egyszer ismételjük, majd a száraz maradékot vízben oldjuk, az oldatot a kiválott ezüstsulfidról leszűrjük, a csapadékot gondosan kimossuk és a szüredéket megmért platina- vagy porcelláncsészében a már leírt módon szárazra párologtatjuk. A beszáradó oldat freccségéből eredő veszteségek elkerülésére a csészét, még mielőtt a felületen kristálykéreg képződne, (vele mért) óraüveggel be kell fődni; az oldat ilyenkor szivacsos, likacsos tömeggé szárad be, melyet 2 órán át 120° -on szárítunk, majd megmérünk. Ellenőrzés céljából czélszerű a maradékot mérés után újból vízben oldani és beszárítás után a mérést ismételni. Miután a sósav leválasztására aránylag sok ezüstcarbonat szükséges, ajánlatos a mannitnak hevítéssel való elüzése után az üres csészét újból megmérni, hogy a mért mannit tisztaságáról meggyőződünk. A 3., 4. és 5. táblázatban leírt kísérletekhez használt ezüstcarbonat, melyet ezüstmaredekokból kapott ezüstitratból állítottam elő, csekély mennyiségű (kb. 0.018%) tisztatlanságot tartalmazott, mely az említett módon számításba vétetett. A mannitoldatból leválasztott ezüstsulfidot (0.1—0.15 gr.) æqu. ezüstcarbonat alakjában a csapadék összes mennyiségének kiszámításánál correctioképen tekintetbe vettem. Mindaddig, míg az oldatok oldott vagy suspendált ezüstvegyületeket (kivéve ezüstsulfidot) tartalmaztak, az összes műveleteknél a napvilágosság ki volt zárva. A mannit könnyű kiszáradása szempontjából czélszerű, ha a mennyisége 3 gr.-ot meg nem halad.

A módszer használhatósága a következő adatokból tűnik ki:

1. 26.021 gr. mannitot 424.077 gr. sósavban (1 gr. vízre

0·034527 gr. HCl) oldottam. Az oldat 1 gr.-ja tehát 0·057812 gr. mannitot tartalmazott.

a) 32·186 gr. oldatnak 4·436 gr. ezüstcarbonattal a leirt módon történt kezelése után a szüredékben közvetlenül 1·5887 gr., az egész oldatmennyiségre átszámítva 1·8614 gr. mannitot találtam. 1 gr. oldatnak tehát megfelel 0·057833 gr. mannit.

b) 33·070 gr. oldat szüredékében (Ag_2CO_3 4·560 gr.) közvetlenül 1·6922, átszámítva 1·9120 gr. mannit találtatott; 1 gr. oldatnak e szerint megfelel 0·057817 gr. mannit.

2. 50·878 gr. mannitot 860·631 gr. sósavban (1 gr. vízre 0·090191 gr. HCl) oldottam (a 6. és 7. táblázatban leirt kísérletek eredeti oldata); 1 gr. oldat e szerint 0·055817 gr. mannitot tartalmazott.

a) 21·394 gr. oldat (6·941 gr. Ag_2CO_3) szüredékében közvetlenül találtatott 1·1399, átszámítva 1·1952 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·055868 gr. mannit.

b) 34·834 gr. oldat szüredékében (10·939 gr. Ag_2CO_3) közvetlenül találtatott 1·8456, átszámítva 1·9441 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·055810 gr. mannit.

c) 40·088 gr. oldat szüredékében (12·465 gr. Ag_2CO_3) közvetlenül találtatott 1·9566, átszámítva 2·2379 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·055824 gr. mannit.

3. 52·720 gr. mannitot 440·003 gr. sósavban (1 gr. vízre 0·090208 gr. HCl) oldottam (l. 8. táblázat eredeti oldat); az oldat 1 gr.-jában van e szerint 0·10700 gr. mannit.

a) 23·695 gr. oldat szüredékében (8·022 gr. Ag_2CO_3) közvetlenül találtatott 2·4124, átszámítva 2·5350 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·10699 gr. mannit.

b) 25·038 gr. oldat szüredékében (8·546 gr. Ag_2CO_3) közvetlenül találtatott 2·5323, átszámítva 2·6797 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·10702 gr. mannit.¹

A kevésbé tiszta ezüstcarbonattal végzett kísérletekben (a fentebb említett correctiót alkalmazva) mintegy 0·1%-kal

¹ Az eddigi példákban az ezüstcarbonat fölöslege igen csekély volt, minek következtében a csapadékos folyadék csak huzamos rázásakor tisztult meg teljesen.

magasabb értékeket kaptam, a mi tekintettel arra, hogy az idegen anyagok között főképen vas volt kimutatható, alighanem arra vezethető vissza, hogy a szennyező vegyületnek az izzítás-kor szenvedett súlyvesztesége folytán a correctio kelletténél kisebbnek találtatott. Miután e hiba az összes meghatározásokat közelítőleg egyenlő mértékben befolyásolja, a kísérleteket a correctio csekély bizonytalansága ellenére felhasználtam. Mindenesetre azonban czélszerű az ezüstcarbonat tisztaságára a lehető legnagyobb gondot fordítani. A végzett kísérletek eredményei a következők:

4. 15·970 gr. mannitot 673 820 gr. sósavban (1 gr. vízre 0·036637 gr. HCl) oldottam (l. 3. táblázat, eredeti oldat); az oldat 1 gr.-ja tartalmaz 0·023152 gr. mannitot.

Ezen oldat 96·865 gr.-jának szüredékében (15·485 gr. Ag_2CO_3) közvetlenül találtatott 2·0523 gr. (correctio 0·0020 gr.), átszámítva 2·2444 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·023171 gr. mannit.

5. 34·893 gr. mannitot 668 432 gr. sósavban (1 gr. vízre 0·036635 gr. HCl) oldottam (l. 4. táblázat, eredeti oldat); az oldat 1 gr.-ja tartalmaz 0·049612 gr. mannitot.

Ezen oldat 93·430 gr.-jának szüredékében (14·867 gr. Ag_2CO_3) közvetlenül találtatott 4·1055 gr. (correctio 0·0024 gr.), átszámítva 4·6357 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·049617 gr. mannit.

6. 15·086 gr. mannitot 645·898 gr. sósavban (1 gr. vízre 0·090205 gr. HCl) oldottam (l. 5. táblázat, eredeti oldat); 1 gr. oldat tartalmaz e szerint 0·022824 gr. mannitot.

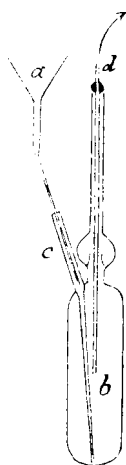
Ezen oldat 80·538 gr.-jának szüredékében (28·000 gr. Ag_2CO_3) közvetlenül találtatott 1·4618 gr. (correctio 0·0034 gr.), átszámítva 1·8403 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·022850 gr. mannit.

A resorcin meghatározása. A resorcin illékony-ságánál fogva vizes oldatának egyszerű bepárologatása útján nem határozható meg, vizes oldatából azonban könnyen vonható ki ætherrel. E végből a lemért oldatot a 3. ábrában feltüntetett lombikban mindenekelőtt natronlúggal megtitrljuk, ügyelvén arra, hogy a lúgból fölösleget ne alkalmazzunk, miután a resorcin lúgos közegben sötétedés közben gyorsan oxydálódik.



3. ábra.

Azután 100 gr. tiszta kristályos natriumchloridot és annyi vizet adunk hozzá, hogy a lombik kb. 300 cm³-es alsó része a megszűkítésig megteljen, 25 cm³ frissen destillált æthert rétegezzünk föléje, melyet kézzel kissé melegítünk, hogy az æthergőz a levegőt a lombikból kiűzze és végül az egészet erősen összerázzuk. A natriumchlorid hozzáadásával elérjük azt, hogy a víz és æther kölcsönösen alig oldódnak. Az ætheres réteg teljes elkülönülése után a dugót eltávolítjuk és az ætheres réteget vékonyra kihúzott pipettával leszívjuk. Az említett körülmények között egyszeri kirázáskor csaknem pontosan $\frac{3}{4}$ -e a resorcin-



4. ábra.

nak megy át a vizes oldatból az ætheres rétegbe; biztosak lehetünk tehát a felől, hogy tízszeri kirázáskor, mint az a leírandó kísérleteknél történt, az összes resorcin az ætheres oldatban van. Ezen ætheres oldat közönséges hőmérséken való bepárologatáskor syruppá szárad be, melyet ugyan némi fáradsággal finom porrá dörzsölhetünk, de ez, legfinomabb eloszlásban is, az æther és víz utolsó nyomait oly makacsul tartja vissza, hogy semmiképen sem sikerült azokat közönséges hőmérséken eltávolítani. Végül a következő eljárást alkalmaztam, a mely teljesen kielégítő eredményekhez vezetett. A lepipettázott ætheres oldatot az *a* tölcserben (4. ábra) lévő kettős papirosszűrőn (a netalán magával ragadott sóoldat visszatartására) közvetlenül *b* edénybe szűrjük, melyen vízszivattyúval a nyíl irányában levegőáramot szívatunk át. Az edényt ezen művelet közben langyos (30—35°-os) vízbe helyezzük. Miután az æthert így lehetőleg teljesen elpárolagtattuk, a mi az összes ætheres oldatra nézve 1 $\frac{1}{2}$ —2 órát vesz igénybe (a párolgást a művelet vége felé az edény megfelelő mozgatásával elősegítjük), az edényt méreteinek megfelelő, kettősfalú, cylindrikus, rézpléhből készült fürdőbe helyezzük és xylogőzzel 139°-on hevítjük. Hevítés közben *c* és *d* csövkön száraz hydrogengázt vezetünk át a készüléken, egyúttal azonban a *d*-t körülvevő, kissé bővebb csövet egy kívülről reáhúzott, a rajzban fel nem tüntetett hűtővel hűtjük. A megolvadt resorcinon (olv. p. 118°) áthaladó

hydrogenáram magával viszi az æther- és víznyomokat, melyek a hűtőalatti kis tekében összegyűlnek; innen azokat időnkint levegőáramban való enyhe melegítéssel elűzzük, a mikor a készüléket természetesen előzőleg a fürdőből kiemeljük és lehűtjük, és e műveleteket mindaddig ismételjük, míg a hűtőben többé nedvesség-harmatnak nyoma sem mutatkozik. A készülék mostani és eredeti súlyának különbsége¹ adja a resorcin mennyiségét. E módszernél figyelembe veendő, hogy az árúbeli tiszta natriumchlorid felülete csekély mennyiségű, ætherben oldható zsírnemű vagy gyantás anyagokkal van szennyezve. A kísérleteimhez használt natriumchlorid 100 gr.-jából, a leírt módon eljárva, ætherrel való 10-szeri kirázáskor 0·0033 gr. ætherben oldható maradékot kaptam, melyet a talált resorcin-mennyiségből correctióképen levontam. További 10-szeri kirázáskor az æther már csak 0·0001 gr. maradékot hagyott, jeléül annak, hogy a telített sóoldatból az æther mérhető mennyiségű natriumchloridot nem old ki. A módszer pontosságát a következő adatokból ítéltethetjük meg.

1. 1·2356 gr. resorcint vízben oldottam és az oldatban a resorcint a leírt módon határoztam meg. Találtam 1·2359 gr.-ot.

2. 1·1924 gr. resorcint kb. norm. sósavban oldottam és a resorcint meghatároztam. Találtatott 1·1935 gr.

3. 38·490 gr. resorcint 604·625 gr. kb. 3 norm. sósavban oldottam; ezen oldat 1 gr.-jában volt tehát 0·059849 gr. resorcin.

Az oldat 93·095 gr.-jában találtam 5·5718 gr. resorcint, 1 gr. oldatban tehát 0·059851 gr. resorcint.

4. 16·860 gr. resorcint 737·090 gr. kb. norm. sósavban oldottam; az oldat 1 gr.-ja e szerint tartalmazott 0·022362 gr. resorcint.

a) 111·055 gr. oldatból kaptam 2·4823 gr., tehát 1 gr. oldatból 0·022352 gr. resorcint.

b) 41·702 gr. oldatban találtam 0·9326 gr. resorcint; 1 gr. oldatban e szerint a resorcinttartalom 0·022364 gr.

¹ Az edény mérése mindig hasonló méretű táraedény közvetítésével történt.

A sósav elektrolysise mannit jelenlétében.

. A kísérletekhez használt mannitot árúbeli legtisztább mannitból big alkoholból való kétszeri átkristályosítás útján állítottam elő. Ezen mannit 8·2 gr.-ja hevítéskor, ill. izzításakor csak 0·0002 gr. maradékot hagyott; anorganikus anyagokat tehát nem tartalmazott.

A tulajdonképeni kísérletek előtt azt a kérdést kellett eldöntennem, vajjon a mannit maga potentialkülönbségek hatására nem vándorol-e. E célra a leírt készüléket vizes mannit-oldattal töltöttem meg és az elektrodok között 110 V. potentialkülönbséget létesítettem. Az áramot $10\frac{1}{2}$ óra mulva kikapcsoltam és a mannittartalmat bepárologatás útján meghatároztam. Az oldatok 1 gr.-jában találtatott:

eredeti oldat...	0·10791 gr. mannit
indifferens oldat...	0·10796 " "
kathod-oldat...	0·10786 " "
anod-oldat...	0·10794 " "

A voltametercsésze súlya 0·004 gr.-mal növekedett. A mannit vándorlása tehát nem ismerhető fel.

E kérdés eldöntése után a tulajdonképeni kísérletekre tértem át. Az eredmények a következő táblázatokban vannak összeállítva és azt hiszem, közelebbi magyarázat nélkül is érthetők. Úgy a concentratiováltozások, mint az azokból számított átviteli számok mannitra vannak vonatkoztatva. Az átviteli számok az illető elektrodon talált concentratiováltozásnak és a mindkét elektrodon talált concentratiováltozások összegének hányadosai. A vándorolt vízmennyiség kiszámítását lásd a 231. lapon.

Sósav és mannit.

1 gr. vízre 0·036637 gr. HCl.

1 cm³-ben 0·035282 gr. HCl.

	1 gr.				Az összes						Az		
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	indifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-
					oldat tartalmaz				oldat tartalmaz elektrolysis				
				előtt	után	előtt	után	előtt	után				
HCl — —	0·034523	0·034484	0·030108	0·021306	3·1990	3·1939	3·4099	2·9700	6·0825	3·6952	—0·0051	—0·4399	—2·3873
Mannit	0·023171	0·023181	0·023203	0·023538	2·1471	2·1471	2·2888	2·2888	4·0824	4·0824	—	—	—
Viz — —	0·942306	0·942335	0·946689	0·955156	87·3172	87·2790	93·0797	93·4082	166·0209	165·6644	—0·0382	+0·3285	—0·3565

Kísérlet tartama 7h 30M

Kiválott ezüst 8·366 gr. = 0·077513 gr.-æqu.

H átviteli száma 0·8444

Áramerősség 0·28 A.

Elbomlott sósav

0·077546 „ „

Cl „ „ 0·1556

Vándorolt vízmennyiség: 0·06548 x — 0·01207 y = 0·01901Ha $x = 1$, $y = 3·85$

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·042577 gr. HCl.). *Ered. oldat*: 36·700, ill. 31·620 gr. oldatnak megfelel 29·755, ill. 25·640 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 0·81076, ill. 0·81088, k. é.-ben 0·81082 gr. lúg = 0·034523 gr. HCl. — *Indiff. oldat*: 23·318 gr. oldatnak megfelel 18·886 gr., 1 gr. oldatnak tehát 0·80993 gr. lúg = 0·034484 gr. HCl. — *Kathod-oldat*: 23·448 gr. oldatnak megfelel 16·581 gr., 1 gr. oldatnak tehát 0·70714 gr. lúg = 0·030108 gr. HCl. — *Anod-oldat*: 58·550 gr. oldatnak megfelel 29·298 gr., 1 gr. oldatnak tehát 0·50040 gr. lúg = 0·021306 gr. HCl.

Mannit meghatározás. Ered. oldat: 1. 221. l. — *Indiff. oldat*: 68·827 gr. oldat szüredékében (12·020 gr. Ag_2CO_3) közvetlenül tal. 1·3984 gr. (corr. 0·0020 gr.), átszámítva 1·5955 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·023181 gr. mannit. — *Kathod-oldat*: 73·463 gr. oldat szüredékében (11·425 gr. Ag_2CO_3) tal. 1·5027 gr. (corr. 0·0025 gr.), átszám. 1·7045 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·023203 gr. mannit. — *Anod-oldat*: 99·990 gr. oldat szüredékében (10·985 gr. Ag_2CO_3) tal. 2·1308 gr. (corr. 0·0035 gr.), átszám. 2·3535 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·023538 gr. mannit.

Sósav és mannit.

1 gr. vízre 0·036635 gr. HCl.

1 cm³-ben 0·034661 gr. HCl.

	1 gr.				Az összes						Az		
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	indifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-
					oldat tartalmaz elektrolysis								
					előtt	után	előtt	után	előtt	után			
HCl — —	0·033587	0·033586	0·029319	0·020914	3·1666	3·1654	3·3365	2·9090	6·0322	3·7023	—0·0012	—0·4275	—2·3299
Mannit	0·049617	0·049636	0·049679	0·050339	4·6781	4·6781	4·9291	4·9291	8·9112	8·9112	—	—	—
Víz — —	0·916796	0·916778	0·921002	0·928747	86·4392	86·4065	91·0770	91·4029	164·6564	164·4125	—0·0327	+0·3259	—0·2439

Kísérlet tartama 7h 20M Kiválott ezüst 8·164 gr. = 0·075642 gr.-æqu. H átviteli száma 0·8450

Áramerősség 0·28 A. Elbomlott sósav 0·075630 " " Cl " " 0·1550

Vándorolt vízmennyiség: 0·06390 x — 0·01173 y = 0·01581Ha $x = 1$, $y = 4·10$.

Analitikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·042577 gr. HCl). *Ered. oldat:* 38·701, ill. 33·669 gr. oldatnak megfelel 30·530, ill. 26·560 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 0·78888 ill. 0·78886, k. é.-ben 0·78887 gr. lúg = 0·033587 gr. HCl. — *Indiff. oldat:* 26·380 gr. oldatnak megfelel 20·810 gr., 1 gr. oldatnak tehát 0·78886 gr. lúg = 0·033586 gr. HCl. — *Kathod-oldat:* 36·176 gr. oldatnak megfelel 24·913 gr., 1 gr. oldatnak tehát 0·68866 gr. lúg = 0·029319 gr. HCl. — *Anod-oldat:* 47·390, ill. 46·445 gr. oldatnak megfelel 23·280, ill. 22·815 gr. lúg, 1 gr. oldatnak tehát 0·49124, ill. 0·49123 gr., k. é.-ben 0·49123 gr. lúg = 0·020914 gr. HCl.

Mannit meghatározás. *Ered. oldat:* 1. 221. l. — *Indiff. oldat:* 52·631 gr. oldat szüredékében (9·660 gr. Ag₂CO₃) tal. 2·2836 gr. (corr. 0·0026 gr.), átszám. 2·6124 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·049636 gr. mannit. — *Kathod-oldat:* 62·141 gr. oldat szüredékében (9·840 gr. Ag₂CO₃) tal. 2·7885 gr. (corr. 0·0023 gr.), átszám. 3·0871 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·049679 gr. mannit. — *Anod-oldat:* 68·155 gr. oldat szüredékében (8·335 gr. Ag₂CO₃) tal. 3·1188 gr. (corr. 0·0028 gr.), átszám. 3·4308 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·050339 gr. mannit.

5. táblázat.

Sósav és mannit.

1 gr. vízre 0·090205 gr. *HCl*.1 cm³-ben 0·084436 gr. *HCl*.

	1 gr.				Az összes						Az			
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	indifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-	
					oldat tartalmaz electrolysis									oldat koncentrációváltozása
					előtt	után	előtt	után	előtt	után				
<i>HCl</i> — —	0·080851	0·080799	0·074980	0·064747	7·6955	7·6924	8·0752	7·4810	14·4678	11·3584	—0·0031	—0·5942	—3·1094	
Mannit	0·022850	0·022844	0·022875	0·023308	2·1749	2·1749	2·2822	2·2822	4·0889	4·0889	—	—	—	
Víz — —	0·896299	0·896357	0·902145	0·911945	85·3112	85·3377	89·5200	90·0418	160·3885	159·9817	+0·0265	+0·5218	—0·4068	

Kísérlet tartama 8^h 50^m Kiváltott ezüst 11·000 gr. = 0·10193 gr.-equiv. *H* átviteli száma 0·8396Áramerősség 0·31 A. Elbomlott sósav 0·10158 „ „ *Cl* „ „ 0·1604Vándorolt vízmennyiség: 0·08528 *x* — 0·01630 *y* = 0·02577*Ha* *x* = 1, *y* = 3·65.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·042577 gr. *HCl*). *Ered. oldat*: 19·192, ill. 19·667 gr. oldatnak megfelel 36·165, ill. 37·325 gr. lúg, 1 gr. oldatnak tehát 1·9000, ill. 1·8980, k. é.-ben 1·8990 gr. lúg = 0·080851 gr. *HCl*. — *Indiff. oldat*: 23·240 gr. oldatnak megfelel 44·103, tehát 1 gr. oldatnak 1·8977 gr. lúg = 0·080799 gr. *HCl*. — *Kathod-oldat*: 26·448 gr. oldatnak megfelel 46·575 gr., tehát 1 gr. oldatnak 1·7610 gr. lúg = 0·074980 gr. *HCl*. — *Anod-oldat*: 30·102, ill. 30·020 gr. oldatnak megfelel 46·234, ill. 45·651 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 1·5208, ill. 1·5207, k. é.-ben 1·5207 gr. lúg = 0·064747 gr. *HCl*.

Mannit meghatározás. Ered. oldat: 1. 221. l. — *Indiff. oldat*: 71·365 gr. oldat szüredékében (24·970 gr. *Ag*₂*CO*₃) tal. 1·3267 gr. (corr. 0·0036 gr.), átszám. 1·6303 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·022844 gr. mannit. — *Kathod-oldat*: 72·155 gr. oldat szüredékében (23·465 gr. *Ag*₂*CO*₃) tal. 1·4095 gr. (corr. 0·0018 gr.), átszám. 1·6506 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·022875 gr. mannit. — *Anod-oldat*: 99·800 gr. oldat szüredékében (27·455 gr. *Ag*₂*CO*₃) tal. 1·9885 gr. (corr. 0·0026 gr.), átszám. 2·3261 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·023308 gr. mannit.

6. táblázat.

Sósav és mannit.

1 gr. vízre 0·090191 gr. HCl.

1 cm³.ben 0·082569 gr. HCl.

	1 gr.				Az összes						Az		
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	indifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-
	oldat tartalmaz				oldat tartalmaz elektrolýsis						oldat koncentrációváltozása		
					előtt	után	előtt	után	előtt	után			
HCl — —	0·078110	0·078076	0·070582	0·061034	7·4322	7·4282	5·4148	4·8770	12·2610	9·3833	—0·0040	—0·5378	—2·8777
Mannit	0·055834	0·055838	0·056019	0·057007	5·3125	5·3125	3·8706	3·8706	8·7643	8·7643	—	—	—
Víz — —	0·866056	0·866086	0·873399	0·881959	82·4037	82·4003	60·0379	60·3714	135·9454	135·5924	—0·0034	+0·3335	—0·3530

Kísérlet tartama 8h — Kiválott ezüst 10·085 gr. = 0·09344 gr. æqu. H átviteli száma 0·8425

Áramerősség 0·32 A. Elbomlott sósav 0·09380 „ „ Cl „ „ 0·1575

Vándorolt vízmennyiség: 0·07893 *x* — 0·01475 *y* = 0·01905

Ha *x* = 1, *y* = 4·06.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·034689 gr. HCl). *Ered. oldat*: 26·604, ill. 26·603 gr. oldatnak megfelel 59·908, ill. 59·902 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 2·2518, ill. 2·2517, k. é.-ben 2·2518 gr. lúg = 0·078110 gr. HCl. — *Indiff. oldat*: 21·462, ill. 19·434 gr. oldatnak megfelel 48·307, ill. 43·741 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 2·2509, ill. 2·2508, k. é.-ben 2·2508 gr. lúg = 0·078076 gr. HCl. — *Kathod-oldat*: 21·877 gr. oldatnak megfelel 44·514 gr., tehát 1 gr. oldatnak 2·0348 gr. lúg = 0·0582 gr. HCl. — *Anod-oldat*: 24·595, ill. 27·507 gr. oldatnak megfelel 43·275, ill. 48·400 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 1·7595, ill. 1·7595 k. é.-ben 1·7595 gr. lúg = 0·061034 gr. HCl.

Mannit meghatározás. Ered. oldat: l. 220. l. — *Indiff. oldat*: 26·460, ill. 25·165 gr. oldat szüredékében (8·448, ill. 8·148 gr. Ag₂CO₃) tal. 1·4081, ill. 1·3409 gr., átszám. 1·4781, ill. 1·4045 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·055863, ill. 0·055812, k. é.-ben 0·055838 gr. mannit. — *Kathod oldat*: 24·338, ill. 20·162 gr. oldat szüredékében (7·152, ill. 6·000 gr. Ag₂CO₃) tal. 1·3081, ill. 1·0782 gr., átszám. 1·3630, ill. 1·1298 gr. 1 gr. oldatban tehát 0·056003, ill. 0·056036, k. é.-ben 0·056019 gr. mannit. — *Anod-oldat*: 39·918, ill. 38·806 gr. oldat szüredékében (9·994, ill. 9·492 gr. Ag₂CO₃) tal. 2·1726, ill. 2·1099 gr., átszám. 2·2763, ill. 2·2115 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·057024, ill. 0·056989, k. é.-ben 0·057007 gr. mannit.

Sósav és mannit.

1 gr. vízre 0·090191 gr. *HCl*.1 cm.³-ben 0·082569 gr. *HCl*.

	1 gr.				Az összes						Az		
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	indifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-
					oldat tartalmaz elektrolysis								
					oldat koncentrációváltozása								
oldat tartalmaz				előtt	után	előtt	után	előtt	után				
HCl — —	0·078110	0·078040	0·065867	0·051956	7·4299	7·4259	5·3055	4·4537	12·9569	8·3529	—0·0040	—0·8518	—4·6040
Mannit	0·055834	0·055812	0·056086	0·057610	5·3109	5·3109	3·7925	3·7925	9·2619	9·2619	—	—	—
Víz — —	0·866056	0·866148	0·878047	0·890434	82·3789	82·4182	58·8264	59·4038	143·6638	143·1552	+0·0393	+0·5774	—0·5086

Kísérlet tartama 12^h 30^m

Kiváltott ezüst 16·157 gr. = 0·14971 gr. æqu.

H átviteli száma 0·8439

Áramerősség 0·32 A.

Elbomlott sósav

0·14976 „ „

Cl „ „ 0·1561Vándorolt vízmennyiség 0·12628 *x* — 0·02336 *y* = 0·03014Ha *x* = 1, *y* = 4·11.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·034689 gr. *HCl*). *Ered. oldat*: 1. 6. táblázat. — *Indiff. oldat*: 20·029, ill. 21·399 gr. oldatnak megfelel 45·063, ill. 48·140 gr. lúg, 1 gr. oldatnak tehát 2·2499, ill. 2·2497, k. é.-ben 2·2498 gr. lúg = 0·078040 gr. *HCl*. — *Kathod-oldat*: 23·342 gr. oldatnak megfelel 44·323 gr., tehát 1 gr. oldatnak 1·8989 gr. lúg = 0·065867 gr. *HCl*. — *Anod-oldat*: 27·486, ill. 30·665 gr. oldatnak megfelel 41·168, ill. 45·932 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 1·4978, ill. 1·4979 gr., k. é.-ben 1·4979 gr. lúg = 0·051956 gr. *HCl*.

Mannit meghatározás. Ered. oldat: 1. 220. l. — *Indiff. oldat*: 25·092, ill. 26·028 gr. oldat szüredékében (8·140, ill. 8·446 gr. *Ag₂CO₃*) tal. 1·3445, ill. 1·3801 gr., átsz. 1·4013, ill. 1·4518 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·055845, ill. 0·055780 gr., k. é.-ben 0·055812 gr. mannit. — *Kathod-oldat*: 19·679, ill. 21·629 gr. oldat szüredékében (5·504, ill. 5·956 gr. *Ag₂CO₃*) tal. 1·0598, ill. 1·1623 gr., átszám. 1·1038, ill. 1·2130 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·056090, ill. 0·056082 gr., k. é.-ben 0·056086 gr. mannit. — *Anod-oldat*: 34·096, ill. 38·141 gr. oldat szüredékében (7·466, ill. 8·114 gr. *Ag₂CO₃*) tal. 1·8796, ill. 2·0931 gr., átszám. 1·9643, ill. 2·1973 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·057610, ill. 0·057610, k. é.-ben 0·057610 gr. mannit.

Sósav és mannit.

1 gr. vízre 0·090208 gr. *HCl*.1 cm³-ben 0·079418 gr. *HCl*.

	1 gr.				Az összes						Az		
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	indifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-
	oldat tartalmaz				oldat tartalmaz elektrolysis						oldat concentratiováltozása		
					előtt	után	előtt	után	előtt	után			
<i>HCl</i> ---	0·073890	0·073822	0·064632	0·051173	7·1557	7·1500	5·3110	4·6277	11·5885	7·8127	−0·0057	−0·6833	−3·7758
Mannit	0·107005	0·106993	0·107420	0·109923	10·3626	10·3626	7·6914	7·6914	16·7820	16·7820	—	—	—
Víz ---	0·819105	0·819185	0·827948	0·838904	79·3238	79·3424	58·8763	59·3059	128·4633	128·0773	+0·0186	+0·4296	−0·3860

Kísérlet tartama 11^h — Kiválott ezüst 13·221 gr. = 0·12250 gr. æqu. *H* átviteli száma 0·8468Áramerősség 0·3 A. Elbomlott sósav 0·12246 „ „ *Cl* „ „ 0·1532Vándorolt vízmennyiség: 0·10356 x − 0·01874 y = 0·02264Ha x = 1, y = 4·32.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·034689 gr. *HCl*) *Ered. oldat*: 27·043, ill. 27·050 gr. oldatnak megfelel 57·605, ill. 57·618 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 2·1301, ill. 2·1300, k. é.-ben 2·1301 gr. lúg = 0·073890 gr. *HCl*. — *Indiff. oldat*: 22·332, ill. 22·315 gr. oldatnak megfelel 47·530, ill. 47·485 gr. lúg, 1 gr. oldatnak tehát 2·1283, ill. 2·1279, k. é.-ben 2·1281 gr. lúg = 0·073822 gr. *HCl*. — *Kathod-oldat*: 26·132 gr. oldatnak megfelel 48·689 gr., 1 gr. oldatnak tehát 1·8632 gr. lúg = 0·064632 gr. *HCl*. — *Anod-oldat*: 31·064, ill. 27·585 gr. oldatnak megfelel 45·827, ill. 40·692 gr. lúg, 1 gr. oldatnak tehát 1·4753, ill. 1·4751, k. é.-ben 1·4752 gr. lúg = 0·051173 gr. *HCl*.

Mannit meghatározás. Ered. oldat: 1. 220. l. — *Indiff. oldat*: 23·691, ill. 22·367 gr. oldat szüredékében (8·269, ill. 7·945 gr. Ag_2CO_3) tal. 2·3993, ill. 2·2637 gr., átszám. 2·5347, ill. 2·3931 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·10699, ill. 0·10699, k. é.-ben 0·10699 gr. mannit. — *Kathod-oldat*: 20·034 gr. oldat szüredékében (6·050 gr. Ag_2CO_3) tal. 2·0461 gr., átszám. 2·1521 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·10742 gr. mannit. — *Anod-oldat*: 22·595, ill. 21·820 gr. oldat szüredékében (5·549, ill. 5·541 gr. Ag_2CO_3) tal. 2·3626, ill. 2·2974 gr., átszám. 2·4838, ill. 2·3985 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·10993, ill. 0·10992, k. é.-ben 0·10992 gr. mannit.

A közölt táblázatok adataiból látható, hogy a víz mennyisége elektrolysis közben minden esetben a kathodon növekedett, az anodon pedig, a kísérleti hibák határain belül, ugyanannyival csökkent. Ha felteszszük, hogy a mannit sósav jelenlétében sem vándorol — tiszta vizes oldatra ezt közvetlenül behizonyítottam —, akkor ebből azt kell következtetnünk, hogy a kathodhoz vándorló hydrogenion vizet visz a kathodhoz, és pedig többet, mint a mennyit az onnan elvándorló chlorion egyidejűleg a kathodról elvisz. A kathodhoz vándorolt hydrogen, ill. az onnan elvándorolt chlor mennyisége a sósavnak az anodon, ill. a kathodon észlelt concentratiocsökkenésével adva lévén, ha az egy hydrogen-, ill. chlorionnal vándorolt vízmolekulák számát x -szel, ill. y -nal jelöljük, oly egyenletet állíthatunk fel, a melyből, ha az egyik ion hidratatióját ismeretesenek tételezzük fel, a másiké kiszámítható. A táblázatok alatt közölt egyenlet az $x=1$ esetre van y -ra nézve megoldva, vagyis ki van számítva, hogy — feltéve, hogy a hydrogen egy mol. vízzel van egyesülve — hány mol. vízzel kell a chlorionnak vándorolnia, hogy a víz talált concentratiováltozása ezen alapon értelmezhető legyen. Az eredmények fejtegetésére a resorcinnal végzett kísérletek ismertetése után térek át.

A sósav elektrolysis resorcin jelenlétében.

A kísérleteket árúbeli tiszta resorcinnal végeztem. Az első kísérletek nem adtak használható eredményeket, valószínűleg a kathodon fejlődő hydrogennek a resorcinra gyakorolt redukáló hatása folytán. Ezért a végleges kísérleteknél a kathodoldat fölé a resorcinos oldatnál kisebb sűrűségű tiszta sósavoldatot rétegeztem. E végből a készülék kathodrészébe a szükséges mennyiségű tiszta sósavat, a középső és az anodrészbe a resorcintartalmú kísérleti oldatot töltöttem és az e köszörületet annyira forgattam, hogy a resorcinos oldat cseppenként a kathodrészbe hatoljon, miközben a fölötte lévő sósavat a kathodrész felső bővített részébe emelte. Ilyen módon igen éles rétegezés volt elérhető. A kísérletek eredményei a következő táblázatokban vannak összeállítva.

Sósav és resorcin.

1 gr. vízre 0·040594 gr. *HCl*.1 cm.³-ben 0·038904 gr. *HCl*.

	1 gr.				Az összes						Az		
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	indifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-
					oldat tartalmaz elektrolysis								
					előtt	után	előtt	után	előtt	után			
<i>HCl</i> — —	0·038146	0·038103	0·028804	0·025866	3·5646	3·5648	3·1518	2·7298	6·7386	4·5028	+0·0002	—0·4220	—2·2358
Resorcin	0·022150	0·022123	0·011632	0·022476	2·0698	2·0698	1·1023	1·1023	3·9128	3·9128	—	—	—
Víz — —	0·939704	0·939774	0·959564	0·951658	87·8103	87·9204	90·5361	90·9639	165·9988	165·6734	+0·1101	+0·4278	—0·3254

Kísérlet tartama 6^h 45^M Kiválott ezüst 7·878 gr. = 0·072993 gr.-æqu. *H* átviteli száma 0·8412Áramerősség 0·29 A. Elbomlott sósav 0·072900 „ „ *Cl* „ „ 0·1588Vándorolt vízmennyiség: 0·06132 *x* — 0·01158 *y* = 0·02090Ha *x* = 1, *y* = 3·49.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás. (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·067905 gr. *HCl*). A kathodrészben lévő oldat fölé 45·025 gr. tiszta sósav rétegeztetett. E sósav 69·622, ill. 72·426 gr.-jának 28·546, ill. 29·695 gr., tehát 1 gr. sósavnak 0·41001, ill. 0·41001, k. é.-ben 0·41001 gr. lúg = 0·027812 gr. *HCl* felelt meg. — *Eredeti oldat:* 75·967, ill. 76·960 gr. oldatnak megfelel 42·674, ill. 43·234 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 0·56174, ill. 0·56178, k. é.-ben 0·56176 gr. lúg = 0·038146 gr. *HCl*. — *Indiff. oldat:* 91·055 gr. oldatnak megfelel 51·092 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·56111 gr. lúg = 0·038103 gr. *HCl*. — *Kathod-oldat:* 91·111 gr. oldatnak megfelel 38·646 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·42418 gr. lúg = 0·028804 gr. *HCl*. — *Anod-oldat:* 152·720 gr. oldatnak megfelel 58·178 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·38094 gr. lúg = 0·025866 gr. *HCl*.

Resorcin meghatározás. Indiff. oldat:* 91·055 gr. oldatban találtatott 2·0144 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·022123 gr. resorcin. — *Kathod-oldat:* 91·111 gr. oldatban tal. 1·0598 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·011632 gr. resorcin. — *Anod-oldat:* 152·720 gr. oldatban tal. 3·4324 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·022476 gr. resorcin.

* Az eredeti oldat resorcin-tartalmát úgy ezen, mint a következő kísérleteknél az oldat készítésekor lemért resorcin-mennyiség-ből számítottam ki.

10. táblázat.

SÓSAV ÉS RESORCIN.

1 cm³-ben 0·038280 gr. HCl.

1 gr. vízre 0·040594 gr. HCl.

	1 gr.				Az összes						Az		
	eredeti	indiff.	kathod.	anod.	indifferens		kathod.		anod.		indiff.	kathod.	anod.
					oldat tartalmaz elektrolýsis								
					oldat tartalmaz								
					oldat tartalmaz elektrolýsis								
	előtt	után	előtt	után	előtt	után	előtt	után	előtt	után	oldat koncentrációváltozása		
HCl ...	0·037398	0·037368	0·030611	0·025580	3·5084	3·5105	3·3647	2·9567	6·6621	4·4908	+0·0021	—0·4080	—2·1713
Resorcin	0·041339	0·041282	0·022368	0·041947	3·8782	3·8782	2·1605	2·1605	7·3642	7·3642	—	—	—
Víz ...	0·921263	0·921350	0·947021	0·932473	86·4279	86·5593	91·1348	91·4958	164·1155	163·7050	+0·1314	+0·3610	—0·4105

Kísérlet tartalma 6h 45M Kiváltott ezüst 7·621 gr. = 0·070620 gr.-æqu. H átviteli száma 0·8418

Áramerősség 0·28 A Elbomlott sósav 0·070746 „ „ Cl „ 0·1582

Vándorolt vízmennyiség: 0·05955 x — 0·01119 y = 0·02141

Ha x = 1, y = 3·41.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·16297 gr. HCl). A kathodrésben lévő oldat fölé 44·397 gr. tiszta sósav rétegeztetett. E sósav 84·761, ill. 74·209 gr.-jának 16·523, ill. 14·464 gr., tehát 1 gr. sósavnak 0·19494, ill. 0·19491, k. é.-ben 0·19493 gr. lúg = 0·031767 gr. HCl felett meg. — *Eredeti oldat*: 80·530, ill. 73·500 gr. oldatnak megfelelő 18·480, ill. 16·870 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 0·22947, ill. 0·22951, k. é.-ben 0·22949 gr. lúg = 0·037398 gr. HCl. — *Indiff. oldat*: 91·277 gr. oldatnak megfelelő 20·928 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·22930 gr. lúg = 0·037368 gr. HCl. — *Kathod-oldat*: 94·290 gr. oldatnak megfelelő 17·710 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·18784 gr. lúg = 0·030611 gr. HCl. — *Anod-oldat*: 158·585 gr. oldatnak megfelelő 24·891 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·15697 gr. lúg = 0·025580 gr. HCl.

Resorcin meghatározás. Indiff. oldat: 91·277 gr. oldatban találtatott 3·7681 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·041282 gr. resorcin. — *Kathod-oldat*: 94·290 gr. oldatban tal. 2·1091 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·022368 gr. resorcin. — *Anod-oldat*: 158·585 gr. oldatban tal. 6·6521 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·041947 gr. resorcin.

Sósav és resorcin.

1 gr. vízre 0·040586 gr. *HCl*.1 cm³-ben 0·036335 gr. *HCl*.

	1 gr.				Az összes						Az			
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	indifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-	
					oldat tartalmaz elektrolysis									oldat koncentrációváltozása
					előtt	után	előtt	után	előtt	után				
HCl. — —	0·035047	0·035025	0·032265	0·022243	3·3326	3·3320	3·5349	3·0938	6·3398	3·9585	−0·0006	−0·4411	−2·3813	
Resorcin	0·101420	0·101381	0·054699	0·103090	9·6443	9·6443	5·2448	5·2448	18·3468	18·3468	—	—	—	
Víz — —	0·863533	0·863594	0·913036	0·874667	82·1157	82·1537	87·1079	87·5654	156·2125	155·6647	+0·0380	+0·4575	−0·5478	

Kísérlet tartama 7h 40M

Kiválotott ezüst

8·340 gr. = 0·077273 gr.-æqu.

H átviteli száma 0·8437

Áramerősség

0·27 A.

Elbomlott sósav

0·077428

Cl

0·1563

Vándorolt vízmennyiség: 0·06531 *x* — 0·01210 *y* = 0·02789Ha *x* = 1, *y* = 3·09.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·067850 gr. *HCl*). A kathodrészben levő oldat fölé 44·174 gr. tiszta sósavat rétegeztem. E sósav 127·995 gr.-jának 73·567 gr., 1 gr. sósavnak tehát 0·57477 gr. lúg = 0·038997 gr. *HCl* felelt meg. — *Eredeti oldat*: 87·462, ill. 80·100 gr. oldatnak megfelel 45·178, ill. 41·375 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 0·51655, ill. 0·51654, k. é.-ben 0·51655 gr. lúg = 0·035047 gr. *HCl*. — *Indiff. oldat*: 84·773 gr. oldatnak megfelel 43·762 gr., 1 gr. oldatnak tehát 0·51622 gr. lúg = 0·035025 gr. *HCl*. — *Kathod-oldat*: 92·807 gr. oldatnak megfelel 44·133 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·47554 gr. lúg = 0·032265 gr. *HCl*. — *Anod-oldat*: 80·821, ill. 78·825 gr. oldatnak megfelel 26·495, ill. 25·840 gr. lúg, 1 gr. oldatnak tehát 0·32784, ill. 0·32783, k. é.-ben 0·32784 gr. lúg = 0·022243 gr. *HCl*.

Resorcin meghatározás. Indiff. oldat: 84·773 gr. oldatban találtatott 8·5943 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·10138 gr. resorcin. — *Kathod-oldat*: 92·807 gr. oldatban tal. 5·0764 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·054699 gr. resorcin. — *Anod-oldat*: 90·821, ill. 78·825 gr. oldatban tal. 8·3314, ill. 8·1263 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·10309, ill. 0·10309, k. é.-ben 0·10309 gr. resorcin.

Sósav és resorcin.

1 gr. vízre 0·040600 gr. HCl.

1 cm³-ben 0·033917 gr. HCl.

	1 gr.				Az összes						Az			
	eredeti	indiff.	kathod.	anod.	indifferens		kathod.		anod.		indiff.	kathod.	anod.	
					oldat tartalmaz elektrolysis									oldat koncentrációváltozása
					előtt	után	előtt	után	előtt	után				
HCl ---	0·032271	0·032209	0·030821	0·019589	3·1164	3·1132	3·4109	2·9714	5·9079	3·5282	—0·0032	—0·4395	—2·3797	
Resorcin	0·172870	0·172719	0·092591	0·175712	16·6947	16·6947	8·9267	8·9267	31·6479	31·6479	—	—	—	
Víz ---	0·794859	0·795072	0·876588	0·804699	76·7626	76·8511	84·0444	84·5279	145·5177	144·9359	+0·0885	+0·4835	—0·5818	

Kísérlet tartama 8^h — Kiválotott ezüst 8·334 gr. = 0·077230 gr. æqu. H átviteli száma 0·8441

Áramerősség 0·26 A. Elbomlott sósav 0·077410 „ „ Cl „ „ 0·1559

Vándorolt vízmennyiség: 0·06527 x — 0·01206 y = 0·02956Ha $x = 1$, $y = 2·96$.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·067850 gr. HCl). A kathodrészből lévő oldat fölé 44·744 gr. tiszta sósavat rétegeztem. E sósav HCl-tartalma a 11-ik táblázatával megegyező. — *Eredeti oldat*: 77·344, ill. 73·760 gr. oldatnak megfelel 36·788, ill. 35·083 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 0·47564, ill. 0·47564 gr. lúg = 0·032271 gr. HCl. — *Indiff. oldat*: 49·252, ill. 44·758 gr. oldatnak megfelel 23·380, ill. 21·247 gr. lúg, 1 gr. oldatnak tehát 0·47470, ill. 0·47471, k. é.-ben 0·47471 gr. lúg = 0·032209 gr. HCl. — *Kathod-oldat*: 93·179 gr. oldatnak megfelel 42·328 gr., 1 gr. oldatnak tehát 0·45427 gr. lúg = 0·030821 gr. HCl. — *Anod-oldat*: 53·693, ill. 49·705, ill. 43·983 gr. oldatnak megfelel 15·501, ill. 14·351, ill. 12·700 gr. lúg, 1 gr. oldatnak tehát 0·28870, ill. 0·28872, ill. 0·28875, k. é.-ben 0·28873 gr. lúg = 0·019589 gr. HCl.

Resorcin meghatározás. Indiff. oldat: 49·252, ill. 44·758 gr. oldatban találtatott 8·5061, ill. 7·7310 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·17271, ill. 0·17273, k. é.-ben 0·17272 gr. resorcin. — *Kathod-oldat*: 93·179 gr. oldatban tal. 8·6275 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·092591 gr. resorcin. — *Anod-oldat*: 53·693, ill. 49·705, ill. 43·983 gr. oldatban tal. 9·4331, ill. 8·7343, ill. 7·7288 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·17569, 0·17572, ill. 0·17573 gr., k. é.-ben 0·17571 gr. resorcin.

Sósav és resorcin.

1 gr. vízre 0·11288 gr. *HCl*.1 cm³-ben 0·103190 gr. *HCl*.

	1 gr.				Az összes						Az		
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	indifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-
					oldat tartalmaz				oldat tartalmaz elektrolysis				
				előtt	után	előtt	után	előtt	után				
HCl — —	0·098260	0·098167	0·087641	0·083329	9·4838	9·4851	9·2908	8·7132	17·9678	14·9337	+0·0013	—0·5776	—3·0341
Resorcin	0·031240	0·031207	0·016281	0·031875	3·0152	3·0152	1·6186	1·6186	5·7125	5·7125	—	—	—
Víz — —	0·870500	0·870626	0·896078	0·884796	84·0183	84·1217	88·4922	89·1152	159·4783	158·5688	+0·1034	+0·6230	—0·6095

Kísérlet tartama 8h 35^M Kiválotott ezüst 10·704 gr. = 0·099180 gr. æqu. *H* átviteli száma 0·8401Áramerősség 0·31 A. Elbomlott sósav 0·099060 „ „ *Cl* „ „ 0·1599Vándorolt vízmennyiség: 0·08322 *x* — 0·01585 *y* = 0·03420Ha *x* = 1, *y* = 3·09.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·16297 gr. *HCl*). A kathodrészen lévő oldat fölé 47·590 gr. tiszta sósav rétegeztetett. E sósav 83·895, ill. 51·485 gr.-jának megfelelt 45·429, ill. 27·880 gr., tehát 1 gr. sósavnak 0·54150, ill. 0·54152, k. é.-ben 0·54151 gr. lúg = 0·088250 gr. *HCl*. — *Eredeti oldat*: 69·771, ill. 67·300 gr. oldatnak megfelel 42·069, ill. 40·576 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·60297, ill. 0·60291, k. é.-ben 0·60294 gr. lúg = 0·098260 gr. *HCl*. — *Indiff. oldat*: 90·067 gr. oldatnak megfelel 54·252 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·60236 gr. lúg = 0·098167 gr. *HCl*. — *Kathod-oldat*: 94·487 gr. oldatnak megfelel 50·813 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·53779 gr. lúg = 0·087641 gr. *HCl*. — *Anod-oldat*: 155·810 gr. oldatnak megfelel 79·667 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·51131 gr. lúg = 0·083329 gr. *HCl*.

Resorcin meghatározás. Indiff. oldat: 90·067 gr. oldatban találtatott 2·8107 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·031207 gr. resorcin. — *Kathod-oldat*: 94·487 gr. oldatban tal. 1·5383 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·016281 gr. resorcin. — *Anod-oldat*: 155·810 gr. oldatban tal. 4·9664 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·031875 gr. resorcin.

Sósav és resorcin.

1 gr. vízre 0·11286 gr. HCl .

1 cm³-ben 0.100639 gr. *HCl*.

	1 gr.				Az összes						Az		
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	iudifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-
					oldat tartalmaz elektrolýsis				oldat koncentrációváltozása				
					előtt	után	előtt	után	előtt	után			
HCl — —	0·095417	0·095384	0·092066	0·080575	9·2366	9·2500	9·2875	8·7032	17·5060	14·4872	+0·0134	—0·5843	—3·0188
Resorcin	0·059147	0·059041	0·029381	0·060354	5·7255	5·7255	2·7775	2·7775	10·8515	10·8515	—	—	—
Víz — —	0·845436	0·845575	0·878553	0·859071	81·8394	82·0015	82·4912	83·0783	155·1094	154·4603	+0·1621	+0·5871	—0·6491

Kísérlet tartama 8h 35M Kiválott ezüst 10·665 gr. = 0·098820 gr.-æqu. H átviteli száma 0·8738

Áramerősség	0·31 A.	Elbomlott sósav	0·098825	"	"	Cl	"	"	0·1622
-------------	---------	-----------------	----------	---	---	----	---	---	--------

Vándorolt vízmennyiség: $0.08280\ x - 0.01602\ y = 0.03430$

Ha $x = 1, y = 3.03$.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0.16297 gr. HCl). A kathodrézben lévő oldat fölé 47.597 gr. tisztá sósav rétegeztetett, mely 1 gr.-ban 0.10099 gr. HCl-t tartalmazott. *Eredeti oldat:* 58.500, ill. 47.822 gr. oldatnak megfelel 34.252, ill. 27.999 gr. lúg, tehát 1 gr. oldatnak 0.58550, ill. 0.58548, k. é.-ben 0.58549 gr. lúg = 0.095417 gr. HCl. — *Indiff. oldat:* 89.862 gr. oldatnak megfelel 52.595 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0.58529 gr. lúg = 0.095384 gr. HCl. — *Kathod-oldat:* 87.761 gr. oldatnak megfelel 49.579 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0.56493 gr. lúg = 0.092066 gr. HCl. — *Anod-oldat:* 145.015 gr. oldatnak megfelel 71.698 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0.49442 gr. lúg = 0.080575 gr. HCl.

Resorcin meghatározás. Indiff. oldat: 89·862 gr. oldatban találtatott 5·3055 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·059041 gr. resorcin. — *Kathod-oldat:* 87·761 gr. oldatban tal. 2·5785 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·029381 gr. resorcin. — *Anod-oldat:* 145·015 gr. oldatban találtatott 8·7523 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·060354 gr. resorcin.

Sósav és resorcin.

1 gr. vízre 0·11289 gr. *HCl*.1 cm³-ben 0·095452 gr. *HCl*.

	1 gr.				Az összes						Az		
	eredeti	indiff.	kathod-	anod-	indifferens		kathod-		anod-		indiff.	kathod-	anod-
					oldat tartalmaz				oldat tartalmaz elektrolysis				
				előtt	után	előtt	után	előtt	után				
HCl — —	0·089810	0·089725	0·089280	0·074598	8·7715	8·7729	9·5773	8·9886	16·3374	13·2899	+0·0014	—0·5887	—3·0475
Resorcin	0·114587	0·114457	0·061340	0·117003	11·1913	11·1913	6·1757	6·1757	20·8445	20·8445	—	—	—
Víz — — —	0·795603	0·795818	0·849380	0·808399	77·7037	77·8138	84·8482	85·5497	144·7282	144·0196	+0·1101	+0·7015	—0·7086

Kísérlet tartama 8^h 40^M Kiváltott ezüst 10·750 gr. = 0·099610 gr. æqu. *H* átviteli száma 0·8381Áramerősség 0·31 A. Elbomlott sósav 0·099733 „ „ *Cl* „ „ 0·1619Vándorolt vízmennyiség: 0·08359 *x* — 0·01615 *y* = 0·03913Ha *x* = 1, *y* = 2·75.

Analytikai adatok. Sósav meghatározás (lúgtiter: 1 gr. lúg = 0·16297 gr. *HCl*). A kathodrészben lévő oldat fölé 46·706 gr. tiszta sósavat rétegeztem. E sósav 76·570, ill. 77·129 gr.-jának megfelelt 47·652, ill. 47·999 gr., tehát 1 gr. sósavnak 0·62234, ill. 0·62234, k. é.-ben 0·62234 gr. lúg = 0·10142 gr. *HCl*. — *Eredeti oldat*: 72·635, ill. 85·065 gr. oldatnak megfelel 40·034, ill. 46·873 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·55116, ill. 0·55102, k. é.-ben 0·55108 gr. lúg = 0·089810 gr. *HCl*. — *Indiff. oldat*: 87·183 gr. oldatnak megfelel 48·000 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·55056 gr. lúg = 0·089725 gr. *HCl*. — *Kathod-oldat*: 94·115 gr. oldatnak megfelel 51·560 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·54784 gr. lúg = 0·089280 gr. *HCl*. — *Anod-oldat*: 21·260 gr. oldatnak megfelel 9·731 gr., tehát 1 gr. oldatnak 0·45775 gr. lúg = 0·074598 gr. *HCl*.

Resorcin meghatározás. Indiff. oldat: 87·183 gr. oldatban találtatott 9·9786 gr., 1 gr. oldatban tehát 0·11446 gr. resorcin. — *Kathod-oldat*: 94·115 gr. oldatban tal. 5·7730 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·61340 gr. resorcin. — *Anod-oldat*: 139·960 gr. oldatban tal. 16·3757 gr., tehát 1 gr. oldatban 0·11700 gr. resorcin.

A resorcinnal végzett kísérletek adatai nagyjában ugyanazt a képet nyújtják, mint a mannitra vonatkozók. Az indifferens oldat concentratiováltozásai általában véve jelentékenyebbek, mint a mannitos kísérleteknél, a mi nyilván onnan ered, hogy tiszta sósavnak a kathodoldat fölé való rétegezése folytán a resorcin diffúziója kissé zavarólag hat; az eredmények megbízhatóságát azonban ez a körülmény kétségtelenül lényegesen nem befolyásolja.

A kísérletek eredményei.

Hogy e dolgozat eredményeit jobban áttekinthessük, a talált átviteli számokat és az ionokkal vándorolt vízmennyiségeket táblázatosan összeállítom.

Sósav és mannit (1 gr. vízre 0.036637 gr. HCl).

Gr. mannit, ill. resorcin 1 gr. oldatban	H á t v i t e l i	Cl' s z á m a	A Cl ionnal vándorolt vízmolekulák száma ¹
0	0.8439	0.1561	3.6
0.023171	0.8444	0.1556	3.85
0.049617	0.8450	0.1550	4.10

Sósav és mannit (1 gr. vízre 0.090199 gr. HCl).

0	0.8367	0.1633	3.3
0.022850	0.8396	0.1604	3.65
0.055834	0.8432	0.1568	4.09 ²
0.107005	0.8468	0.1532	4.32

Sósav és resorcin (1 gr. vízre 0.040593 gr. HCl).

0	0.8403	0.1597	3.6
0.022150	0.8412	0.1588	3.49
0.041339	0.8418	0.1582	3.41
0.101420	0.8437	0.1563	3.09
0.172870	0.8441	0.1559	2.96

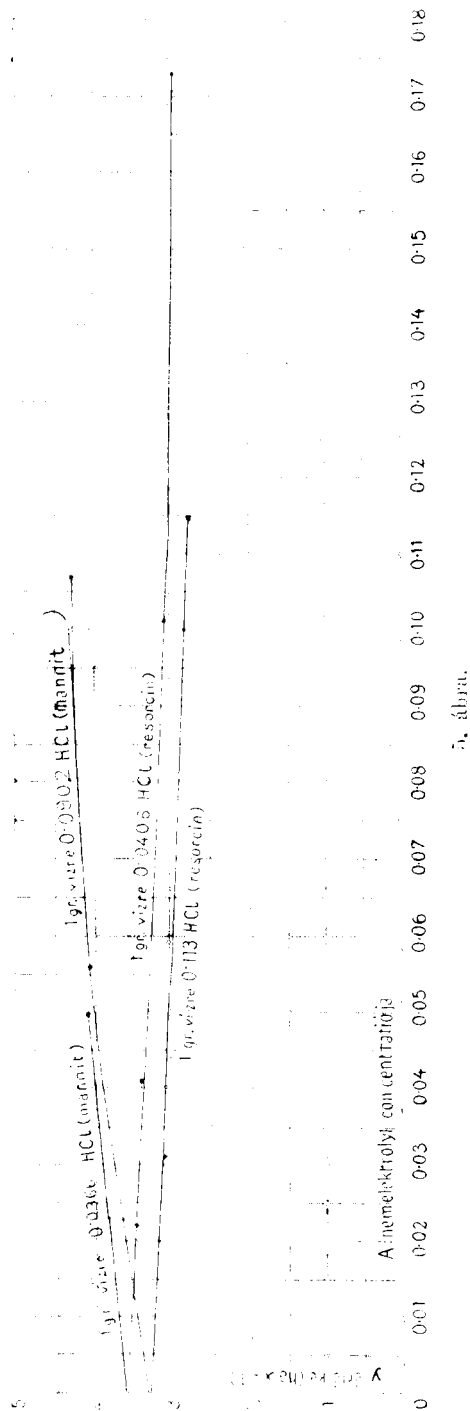
Sósav és resorcin (1 gr. vízre 0.11288 gr. HCl).

0	0.8375	0.1625	3.3
0.031240	0.8401	0.1599	3.09
0.059147	0.8378	0.1622	3.03
0.114587	0.8381	0.1619	2.75

¹ Feltéve, hogy a H ion 1 mol. vízzel vándorol.

² A 6. és 7. táblázat adatainak középértéke.

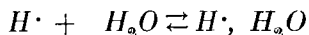
Ez adatokból mindenekelőtt látható, hogy az ionokkal vándorló relativ vízmennyiség a nemelektrolyt koncentrációjától függ. Ez legjobban a graphikai ábrázoláskor tűnik ki. Az 5. ábrán az abscissa a nemelektrolytnak (mannit, ill. resorcin) 1 gr. oldatban foglalt mennyisége, az ordinata pedig az $x=1$ feltevésnek megfelelő y érték, vagyis a Cl ionnal vándorolt vízmolekulák száma (kiszámítva azon feltevés alapján, hogy a H ion 1 mol. vízzel vándorol). Az ugyanazon sósav-concentrációhoz tartozó pontokat összekötő görbe e szerint az illető sósav-concentrációra vonatkozólag megadja az összefüggést az ionokkal egyesült relativ vízmennyiségek és a nemelektrolyt koncentrációja között. A görbék annak ellenére, hogy az analitikai hibák az y számított értékét rendkívül nagy mértékben befolyásolják, igen szabályos lefutásúak; az ordinatatengelyig való meghosszabbításuk útján a relativ hydratatio azon értékéhez jutunk, mely a sósav végtelen csekély nemelektrolyttartalmának megfelel. Az extrapolatio ugyan némi bizonytalanságot involvál, annál inkább, mert kb. 2%-osnál hígabb nemelektrolytoldatok nemelektrolyttartalmának elegendő pontossággal való meghatározása nem sikerült, az egyik mannitos kísérlet-sorozatban továbbá csak kétféle mannitconcentrációnak megfelelő kísérlet eredménye áll rendelkezésemre — a nagyobb mannitconcentrációval végzett, nem sikerült kísérletet már meg nem ismételhettem —, mindamellett ezen kevés adatból is legalább igen nagy valószínűséggel következik, hogy a *hydratatio foka végtelen csekély nemelektrolyttartalom esetében a nemelektrolyt természetétől független*. Ezen eredmény azért fontos, mert ezzel be van bizonyítva, hogy itt tényleges hidratatióval és nem látszólagos, a nemelektrolyt vándorlása okozta vízeltolódással van dolgunk. Másik fontos eredmény az, hogy a Cl ion és a H ion hidratatiójának viszonya a sósav hígításával növekszik; míg ez a viszony 1 gr. vízre 0.11288 gr. HCl -t tartalmazó sósavra nézve kb. 3.3, addig 1 gr. vízre 0.040593 gr. HCl -t tartalmazó sósavra vonatkozólag az közel 3.6-nak adódik. Ha első megközelítésre felteszszük, hogy a hidratatioviszony a sósav koncentrációjának lineáris függvénye, akkor végtelen híg sósavra nézve ez a viszony 3.8 értékű, mely értéknek 4-től



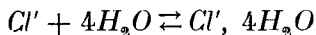
5. ábra.

való eltérése úgy a kísérleti hibáknak, mint a bizonytalan extrapolációnak tudható be. Ennélfogva — egyelőre természetesen bizonyos fentartással — kimondhatjuk, hogy *végtelen híg oldatban a Cl ion 4 molekula vízzel vándorol, ha a H ion 1 mol. vízzel van egyesülve.*

Az ionok relativ hidratatiójának a sósav concentrációjával való változásából *szükségképpen következik, hogy véges concentrációjú sósavoldatban a hidratatio csak részleges lehet.* A viszonylagos hidratációnak a higitással való növekedése ugyanis szükségképpen következménye vagy az egyik ion hidratációja csökkenésének — a mi azonban kizártnak tekinthető —, vagy a másik ion hidratációja növekedésének, vagy végül mindkét ion hidratációja növekedésének, mely utóbbi esetben azonban ezen növekedésnek az egyik ionra nézve nagyobbak kell lennie, mint a másikra nézve. A hidratációnak a higitással való növekedését háromféle módon magyarázhatjuk. Vagy fel kell tennünk, hogy a higitáskor szabad elemi ionok mind teljesebben hidratálódnak, vagy hogy vízben szegényebb ionhydratok fokozatosan vízben dúsabbakba mennek át, vagy végül, hogy ionokból és nem disszociált elektrolytmolekulákból álló vegyületek a higitó víz hatására elbomlanak és ionhydratokká változnak. Hogy ezen lehetőségek melyike felel meg leginkább a valóságnak, azt az ez idő szerint rendelkezésünkre álló eszközökkel nem dönthetjük el; de könnyű kimutatni, hogy a Cl ion hidratatiójának a higitással való gyorsabb növekedése az elmélet követelményeinek megfelel. Miután ugyanis a Cl ionok 4-annyi vízzel vannak egyesülve, mint a H ionok, kell, hogy a víz a tömeghatás törvénye értelmében, ha hatását az egyszerű



és



egyenletek fejezik ki, az első esetben concentrációjának első, a másodikban annak negyedik hatványával arányosan hasson, vagyis kell, hogy a higitás a relativ hidratációnak a talált értelemben való eltolódását eredményezze. E megfontolás alapján előrelátható, hogy olyan esetben, a mikor a hidratatio

viszony 1, annak értéke az elektrolýt concentratiójától független lesz.

Az ionok hydratatiójára vonatkozó ezen fejtegetéseinket, a graphikai ábrázolásból kiindulva, azon speciális feltevésre alapítottuk, hogy a H ion 1 mol. vízzel vándorol; könnyű azonban ezen feltevés mellőzésével a kérdést egész általánosan is megoldani. Ha ugyanis a táblázatok alatt adott egyenleteket úgy írjuk, hogy y coefficientse 1 legyen, akkor a következő egyenletcsoportokhoz jutunk:

Sósav mannittal (1 gr. vízre 0·036637 gr. HCl).

Gr. mannit, ill. resorcin
1 gr. oldatban

$$\begin{array}{ll} 0\cdot023171 & 5\cdot425x - y = 1\cdot575 \\ 0\cdot049617 & 5\cdot448x - y = 1\cdot347 \end{array}$$

Sósav mannittal (1 gr. vízre 0·090199 gr. HCl).

$$\begin{array}{ll} 0\cdot022850 & 5\cdot232x - y = 1\cdot581 \\ 0\cdot055834 & 5\cdot351x - y = 1\cdot292 \\ 0\cdot055834 & 5\cdot406x - y = 1\cdot290 \\ 0\cdot107005 & 5\cdot527x - y = 1\cdot209 \end{array}$$

Sósav resorcinnal (1 gr. vízre 0·040593 gr. HCl).

$$\begin{array}{ll} 0\cdot022150 & 5\cdot295x - y = 1\cdot805 \\ 0\cdot041339 & 5\cdot322x - y = 1\cdot914 \\ 0\cdot101420 & 5\cdot398x - y = 2\cdot305 \\ 0\cdot172870 & 5\cdot412x - y = 2\cdot452 \end{array}$$

Sósav resorcinnal (1 gr. vízre 0·11288 gr. HCl).

$$\begin{array}{ll} 0\cdot031240 & 5\cdot251x - y = 2\cdot158 \\ 0\cdot059147 & 5\cdot169x - y = 2\cdot141 \\ 0\cdot114587 & 5\cdot176x - y = 2\cdot423 \end{array}$$

Mint ezen összeállításból látható, az egyenletek állandói elég törvényszerűen változnak a nemelektrolýt concentratiójával és lehetségessé teszik a nemelektrolýt concentratiójának 0 értékére való extrapolatiót. Csak a resorcinnal végzett második kísérletsorozatban tapasztalható olyan rendellenesség, mely, úgy látszik, e sorozat első kísérletének valamely zavaró hibájára

vezethető vissza. Ez okból e sorozatban az extrapolationál csak a két concentráltabb resorcinoldattal végzett kísérletet vettem tekintetbe és az extrapolatiót úgy itt, mint az első mannitos kísérletsorozatban lineárisan eszközöltem. A leírt módon a következő egyenletekhez jutunk, melyek tehát az x és y közötti összefüggést azon esetre adják meg, hogy a nemelektrolyt concentrációja 0.

0·036637 gr. HCl 1 gr. vízre (mannit 0): $5·41x - y = 1·78$ 1)

0·040593 „ HCl 1 „ „ (resorcin 0): $5·26x - y = 1·64$ 2)

0·090199 „ HCl 1 „ „ (mannit 0): $5·13x - y = 1·90$ 3)

0·11288 „ HCl 1 „ „ (resorcin 0): $5·16x - y = 1·85$ 4)

Az $x=1$ értéknek ezen egyenletek szerint a között sorrendben a következő y értékek felelnek meg: 3·63, 3·62, 3·23 és 3·31, a melyek a graphikai extrapolatio útján közvetlenül találtakkal megegyeznek. Ha legalább három alkalmas sósavconcentratióra volna ilyen egyenletünk, akkor ugyanilyen módon, extrapolatio útján, elegendő biztossággal olyan egyenletet vezethetnénk le, mely az x és y közötti összefüggést végtelen csekély sósavconcentratio esetére megadná; a végzett kísérletek azonban csak két kellőleg különböző sósavconcentratióra vonatkozván, ezt csak azon feltevés alapján tehetjük, hogy a coefficientsek a sósavconcentratióval lineárisan változnak, a mi a valóságnak valószínűleg közelítőleg meg fog felelni. Ha ez extrapolatiót elvégezzük, és e célra a 2) és 3) egyenleteket használjuk, mint a melyek a kísérleti adatokból legbiztosabban levezethetők, akkor a következő vonatkozást kapjuk x és y között olyan oldatra, a mely úgy a sósavra, mint a nemelektrolytra nézve végtelen hig:

$$5·37x - y = 1·42.$$

Ezen egyenletből a következő következtetéseket vonhatjuk. y értéke positiv vagy 0, ha $x \geq 0·27$. Miután y negativ értékű nem lehet, ennél fogva ez annyit jelent, hogy a legkisebb vízmennyiség, a melylyel a H ion egyesülve lehet, atomonként 0·27 molekula. Ez esetben azonban a Cl ion nem volna hydra-

talva, a mi, eltekintve e feltevés valószínűtlenségétől, a tömeghatás törvényéből a 342. lapon vont azon következtetésnek is ellentmond, mely szerint a Cl ionnak több vizet kell megkötnie, mint a H ionnak. Hogy $y > x$ legyen, x értékének 0.33-nál nagyobbannak kell lenni. E szerint mint lehetséges és valószínű összetartozó értékek a következők adódnak:

$x=0.5$	$y=1.26$
$x=1$	$y=3.95$
$x=2$	$y=9.32$
$x=3$	$y=14.69$

Mindenesetre véletlen, és az extrapolatio bizonyos fokú önkényességére is vezethető vissza, a mely annak természete szerint ki nem zárható, hogy az $x=1$ értéknek megfelelő $y=3.95$ érték a 4 egész számot annyira megközelíti; mind a mellett nem tulságosan merésznék tartom, ha ez értékeket a lehetségesek közül a legvalószínűbbeknek tekintjük, és addig, míg ez eredmények más úton is ellenőrizhetők, a H és Cl ion hidratjainak a H^+ , H_2O és Cl^- , $4H_2O$ képleteket tulajdonítjuk.

Úgy a nemelektrolyt, mint a sósav concentrációjának befolyását oly módon elimináltuk, hogy a véges concentrációkra talált értékeket végtelen hígításra extrapoláltuk. Már most felmerül az a kérdés, hogyan magyarázandó a talált hidratatió-értékek változása a nemelektrolyt concentrációjával. Itt mindenekelőtt igen feltűnő, hogy a mannit a Cl ion, a resorcin pedig a H ion hidratatióját kedvezően befolyásolja. Az ilyen különböző befolyás valószínűleg nem a reactióközeg tisztán physikai módosítására, hanem a nemelektrolyt és az ionok közötti chemiai hatásra vezetendő vissza, melyben az ionok chemiai jelleme érvényesül, és közelfekvő az a feltevés, hogy a nemelektrolyt egy igen csekély része az ionokkal egyesülvén, azokkal vándorol és ez által a hidratatioviszonynak a nemelektrolyt concentrációjával való látszólagos változását okozza. E felfogás szerint a sósav és nemelektrolyt véges concentrációjú oldatában egyensúlykor az ionok túlnyomó nagyobb részét víz és igen csekély részét nemelektrolytmolekulákkal egyesülve kell képelnünk. Az oldat nemelektrolyttartalmának fokozatos csök-

kentésekor ez az egyensúly mindinkább a vízmolekulák javára tolódik el, míg végül a nemelektrolyt végtelen csekély koncentrációjakor csak a víz marad fenn mint egyetlen concurrens. Ebből érthetővé válik, hogy a mannitnak, ill. a resorcinnak az ionokkal való associációja ellenére a nemelektrolyt koncentrációjának csökkentése ugyanazon hidratatióértékhez vezet.

Hogy milyen rendűnek kell tekintenünk az ionokkal egyesült törtrészét a nemelektrolytnak, arról némi tájékozást nyújthat a következő megfontolás. Miután a resorcin koncentrációjának növelése a Cl ionok relativ hidratatióját látszólag csökkenti, könnyen belátható okokból fel kell tennünk, hogy a resorcin egy része a Cl ionok irányában vándorol. E rész mindenesetre annál nagyobb lesz, minél nagyobb az oldat resorcin-tartalma. Számítsuk ki az értékét a használt oldatok legconcentráltabbjára, nevezetesen a 12. táblázat 17·3% resorcint tartalmazó kísérleti oldatára nézve. E kísérletben y értéke 2·96-nak adódott, míg végtelen csekély resorcintartalomra való extrapolációkor $y = 3·6$ találtatott. Ugyanezen értékhez (3·6) jutunk a 12. táblázat kísérleti adataiból való számítás útján, ha felteszszük, hogy a resorcin vándorlása folytán a kathodoldat resorcintartalma a helyes értéknél 0·032 gr.-mal alacsonyabbnak, az anodoldaté ugyanennyivel nagyobbnek találtatott. Miután 0·032 gr. resorcin 0·0003 gr. molekulát képvisel, és ezen resorcinmennyiség vándorlása közben 0·0773 gr. mol. sósav elbomlott, illetőleg 0·0296 gr. mol. víz vándorolt, látható, hogy mindenesetre csak igen csekély része az ionoknak az, mely resorcinnal, túlnyomó nagyobb részük pedig vízzel vándorol.

A közölt felfogás helyessége kísérleti úton is ellenőrizhető. Miután a mannit a hydrogen relativ hidratatióját csökkenti, tehát felfogásunk értelmében a H ion irányában, a resorcin pedig, mint fentebb láttuk, a Cl ion irányában vándorol, következik, hogy azon esetben, ha mindkét nemelektrolytot egyidejűleg tartalmazó sósavat elektrolyzálunk, a két nemelektrolyt koncentrációviszonyának meg kell változnia és pedig olyan értelemben, hogy a mannit relativ koncentrációjának a kathodon növekednie, az anodon pedig csökkennie kell. Miután kísérleteimet adott határidőig be kellett fejeznem, ezt a döntő ki-

sérletet sajnálatomra már nem végezhettem, legközelebbi közleményemben azonban visszatérek reá.

Ha jogosultnak fogadjuk el azt a feltevést, hogy nemelektrolytok, mint mannit és resorcin, az ionokkal asszociálódhatnak, akkor semmi kétséget sem szenvedhet, hogy bomlatlan elektrolytmolekulák, mint pl. a sósavmolekulák is képesek erre, hiszen ezt a nézetet már régen azért fogadták el, hogy az átviteli számoknak a koncentrációval való változását megmagyarázassák. Elektrolytoldatokban e szerint legalább kétféle iont, nevezetesen ion-vizből és ion-elektrolytból álló vegyületeket, talán elemi ionokat is el kell fogadnunk; az utóbbiaknak a száma azonban, legalább abból következtetve, hogy úgy látszik nemelektrolytok is asszociálnak az ionokkal, valószínűleg igen csekély. Mindenesetre kétségtelen, hogy azon nehézségeknél fogva, melyekkel a különböző ioncomplexusok mennyiségének és összetételének meghatározása jár, az erős elektrolytok egyensúlyának a tömeghatás törvénye szempontjából való szabatos formulázása egyelőre még igen kevés sikerrel kecsegtető probléma.

Abból a körülményből, hogy az ionok vándorlásában a víz is részt vesz, következik, hogy az átviteli számok meghatározásakor koncentráltabb oldatokban észrevehető hibát követünk el, ha a koncentrációváltozásokat a vízre vonatkoztatjuk. De akkor is, ha azokat nemelektrolytra vonatkoztatjuk, a helyes átviteli számokat csak a véges koncentrációjú nemelektrolytoldatokban talált értékeknek végtelen csekély nemelektrolyttartalomra való extrapolációja útján kapjuk meg, mint azt a relativ hydratatio meghatározásakor is tettük. Sajnos, az átviteli számoknak ilyen úton való meghatározásakor a kísérleti hibák, miután itt aránylag nagy pontosságra kell törekednünk, még nagyobb súlyúak, mint a relativ hydratatio meghatározásakor. A táblázatos összeállításban (239. l.) közölt adatokhoz egészben véve a következő megjegyzéseket fűzhetjük. A chlor átviteli száma minden esetben — az utolsó resorcinos kísérletsorozatot kivéve ¹ — a nemelektrolyt növekedő koncentrációjával csökken.

¹ Ha e sorozat első kísérletét, melyet már a 234—244. lapon közölt okoknál fogva kissé hibásnak kell tartanunk, figyelmen kívül hagyjuk, akkor a szabály itt is érvényes.

Ha a nemelektrolyt végtelen csekély koncentrációjára extrapolálunk, a mi a koncentrációfüggvénynek a kísérleti hibák okozta eltorzulása folytán csak némi bizonytalansággal végezhető, akkor azokhoz a számokhoz jutunk, melyek a 0 koncentrációnak megfelelő rovatban vannak a táblázatba felvéve. Az utolsó kísérletsorozatban az extrapolatio csak a második és harmadik kísérlet tekintetbe vételével történt. A chlorion átviteli száma ezek szerint olyan sósavban, mely 1 gr. vízre 0.0366 gr. HCl -t tartalmaz 0.156, az 1 gr. vízre 0.113 gr. HCl -t tartalmazó sósavban pedig 0.163, mely számok azonban 1%-ig, vagy talán még valamivel nagyobb mértékben hibásak lehetnek. Az ezen számokban nyilvánuló bizonyos fokú bizonytalanságok azonban csak részben tudhatók be a kísérleti hibáknak, java-részüik valószínűleg a hőmérsék ingadozásaira vezetendő vissza, melyek e kísérleteknél tekintetbe nem vétettek, és tekintettel arra, hogy a kísérletek részben nyáron, részben télen végeztek, könnyen 10° -ot vagy többet tehettek.

E dolgozatban, azt hiszem, sikerült megmutatnom, hogy az ionok relativ hidratációjának aránylag biztos meghatározása a követett úton lehetséges. Hogy azonban e kérdést csak egy elektrolytra nézve is kielégítően megoldhassuk, nagyszámú, igen gondos meghatározásra van szükség, mert a végső eredményeket mind extrapoláció útján kapjuk. Szándékom a vizsgálatokat első sorban más savakra és később egyéb elektrolytokra is kiterjeszteni.

Az eredmények összefoglalása.

Átviteli számok mérésére módszert dolgoztam ki és készüléket szerkesztettem, arra helyezvén a főszlyt, hogy a secundär hőáramlásokat a lehetőségig elkerüljem és lehetőleg nagy koncentrációváltozásokat érjek el.

Két nemelektrolyt, a mannit és resorcin meghatározására pontos analytikai módszert dolgoztam ki, azon kérdés eldöntése czéljából, hogy vajjon sósavnak ezen két nemelektrolyt jelenlétében történő elektrolysisekor a víz az ionok vándorlásában részt vesz-e vagy nem? A kérdést igenlő értelemben döntöttem el; továbbá az mutatkozott, hogy az ionok hidratációjának

viszonya úgy a nemelektrolyt, mint a sósav koncentrációjától függ. Extrapolatio útján az a valószínű eredmény adódott ki, hogy a nemelektrolyt végtelen csekély koncentrációja esetében a vándorolt vízmennyiség annak természetétől független. Concentráltabb sósavban a hydratatioviszony és így a hydratatio foka is kisebbnek adódott, mint higabb sósavban; végtelen hig oldatban nagy valószínűséggel feltehetjük, hogy a Cl ion 4 mol. vízzel, a H ion pedig 1 mol. vízzel van egyesülve.

A kísérleteket a budapesti kir. m. tud.-egyetem I. chemiai intézetében végeztem.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1905 decz. 18.-án tartott üléséből.)

A GÖZKALORIMÉTERHEZ TARTOZÓ MÉRLEG.

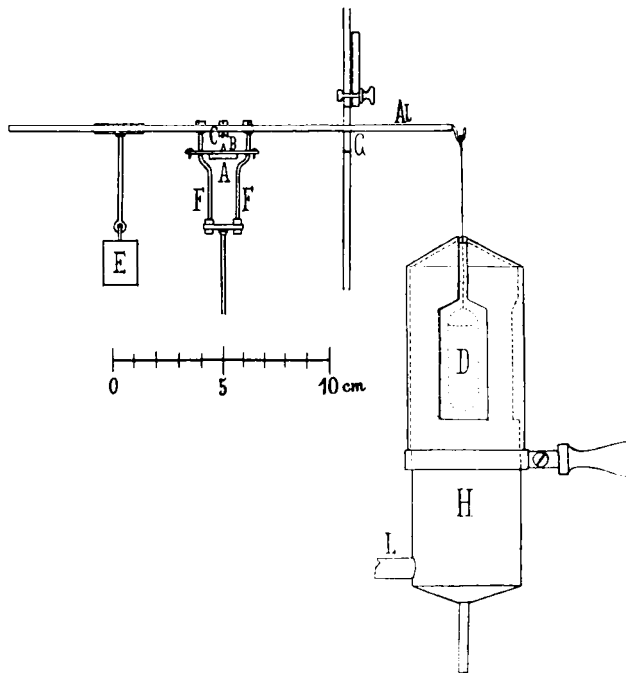
SCHULLER ALAJOS r. tagtól.

1. A mérleg hőfokától tetemesen eltérő hőfokú testek tömegének mérését akként szokás végezni, hogy a mérleg egyik csészéjét lefelé megtoldják s a testet a mérleg alatt bizonyos mélységben alkalmazzák. Kényelmetlen ekkor, hogy kétféle magasságban kell dolgozni, s a mi több, csak nehezen sikerül a mérleg melegedését elkerülni, mihelyt a mérendő test sokkal melegebb mint a mérleg. Ezen hátrányokat elkerülendő, a mérleget akként módosítottam, hogy a megméréndő test, ugyan a szekrényen kívül, de a mérleggel *egy magasságban* helyezhető el.

A mérleg szekrénye az alsó lapról, mely pl. márványból vagy üvegből készülhet, eltávolítható, a mi néha magában is előny s alkalmas vezetékben előre vagy hátra tolható és srófkokkal rögzíthető. Ezen mérleg leglényegesebb része azonban az 1-ső ábrán elötüntetett kengyelszerkezet. A mérleg bal oldali élén a szokásos módon nyugszik A achatlap, csak hogy vele szilárdan össze van kötve a keresztbe álló él B , melynek közepén mélyedés van kireszelve, úgy, hogy az él két részre oszlik. Eme haránt élre nehezedik a hozzá tartozó vályu C , mely a hozzá erősített vízszintes alumíniumrúddal Al egy testet képez. A rúd hosszabbik végén lévő horogra akasztjuk a megméréndő testet, nevezetesen a gőzkaloriméter esetében a dróthálóból készült kosárkát D , a rövidebb oldalra pedig alkalmas ellensúlyt E függesztünk. Ugyancsak az alumíniumrúdra vannak erősítve a csészét tartó oszlopok K , F , melyek az achatlapot tartó lemez nyílásain vannak átvezetve úgy, hogy a lemezt ne érintsék. A haránt él mentén történő eltolódás az által van korlátozva, hogy a C serpenyőt tartó sróf belenyú-

lik a haránt él hézagába. Hogy a szerkezet súlypontja elég mélyre kerüljön, a csészét, mely az ábrán nincs előtüntetve, állandóan 100 gr-mal terheljük meg.

A közönséges méréseknél a mérleg a szekrény hátulsó részében foglal helyet s a megméréendő testet ama 100 gr. helyére a csészébe tesszük; ha ellenben a megméréendő testet



1. ábra.

kívül akarjuk alkalmazni, a szekrényt addig toljuk hátra, míg a mérleg elülső falához közel nem jut, mialatt az aluminium-rúd horgos vége az üveglapnak elzárható nyílásán *G* nyúlik ki. A mérleg oldalajtókkal van ellátva s a súlyokat ezeken át rakjuk a csészékre.

2. A gőzkaloriméterrel dolgozva, a függő kosárkát *D* a mérleg kiegyenlítése után gőztérbe kell hoznunk. Erre szolgál *H* gőzkamra, mely a gőzfejlesztővel és egy fűvócsővel együtt sineken járó kocsira van felszerelve. A sinek a mérlegrúddal

közel párhuzamosak és a mozgás korlátozására kellő helyen ütközőkkel vannak ellátva.

A gőzkamra alsó része H szilárdan áll, míg a jól hozzásimuló felső henger körülötte elforgatható. Mindkét rész posztóval van burkolva s egyik oldaluk valamint fedőlapjuk ki van vágva, hogy a kosár D és a felfüggesztő drót a koci előretolása közben ütközés nélkül a gőztérbe hatolhasson. Az ábrán a nyílások a valósághoz képest $\frac{1}{4}$ fordulattal el vannak fordítva. Hogyha a kosár a gőztérbe jutott, a felső részt fogantyú segítségével elforgatjuk, hogy a nyílás a drót számára felül megmaradó lyuk kivételével elzárassék. A fogantyú helyes állásait ütközők szabják meg. A gőzt alulról vezetjük be L -nél s legalul folyik le az összegyűjtendő víz az alkalmas edénybe.

Célszerű a gőzfejlesztőt akként összeállítani, hogy a gőzt tetszésszerűen ideig egyenletesen lehessen fejleszteni és hogy a megindításkor a fűtőlángot ne kelljen mindig újra szabályozni. Evégből egyrészt gondoskodva van a forraló vízkészletének folytonos, lehetőleg egyenletes pótlásáról, a mire a desztillált vízzel ellátott Mariotte-féle palaczk M szolgál, másrészt a gázvezetékbe nyomásszabályzó ¹ van iktatva, mely a nyomást változtatlanul megtartja.

A 2-ik ábrán vázolt Mariotte-féle palaczk M rendeltetése a víz felszínét N edényben csekély ingadozással változtatlanul megtartani, mely célból a palaczk kifolyási csőve O akként van alakítva, hogy egyszerre csak kevés levegő szívassék be, akkor is, a mikor már sok levegő van a palaczkban. Ezt az által érjük el, hogy egyrészt a felfogó edény N lehetőleg szűk, másrészt a kifolyási cső O fölül kapilláris csőben végződik, melyen a levegő csak apró buborékokban szállhat föl s a víz számára az alsó részén van oldalnyílás.

Ámbár ez a szerkezet jól elhárítja a vízszinnek jelentékenyebb emelkedését, a gőzkaloriméternél még sem elegendő, mert a gőzfejlesztőbe áramló víz időközönként annyira lehűtené a forrásban lévő vizet, hogy a gőzáram az itt kívánatos aránylag lassú fejlődésnél nem lenne elég egyenletes. Hogy ez elkerül-

¹ SCHULLER A. Műegyetemi Lapok 2. 299. 1877.

tessék, közbe van iktatva P szűk cső (18 cm. hosszú, 0.35 mm. nyílással) melyen át a víz az N edényből a gőzfejlesztőbe jut, még pedig úgy, hogy kívül a szintáj folyton annýival magasabb, mint a gőzfejlesztőben, hogy ahhoz képest a Mariotte-palaczk működésétől származó ingadozások csekélyek, a víz áramlása tehát közelítőleg egyenletes.

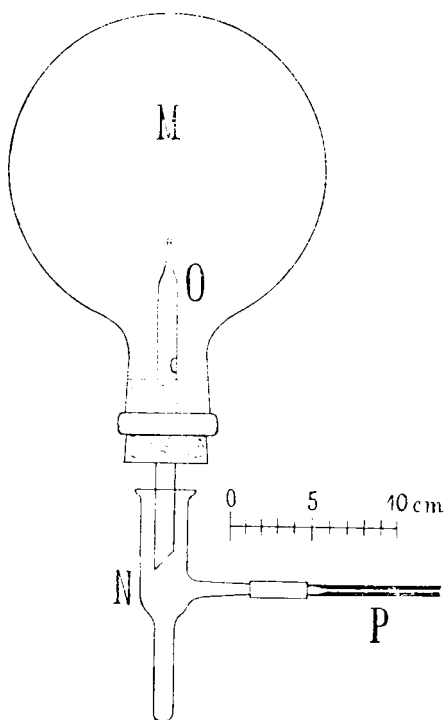


Fig. 1.

A rézből készült gőzüst és a gőzvezető cső a hővesztésig csökkentésére asbestpapírral van burkolva.

Ismeretes, hogy a felfüggesztő drót hideg részén lerakódó vízcseppeket el kell hárítanunk, ha azt akarjuk, hogy a mérleg állandó nyugalmi helyzetbe jusson. *Bunsen* ecsettel vagy mesterséges horzsoló kövel távolította el a mindig újból képződő

cseppeket. *Wirtz*¹ képződésüket melegítéssel háritotta el. Az utóbbi célra fúvó csövet alkalmazok, mely a drótot a gőz kitódulása helyén kellően melegíti, egyúttal a gőzt eltávolítja a dróttól. Erre ujjni vastag vascső szolgál, mely asbestpapírral van burkolva, kivéve azt a részét, melyet a Bunsen-lánggal hevítünk. A cső egyik vége hajlékony kaucsuk-cső útján fujtatóból kapja a levegőt, p. lábbal hajtott kettős fujtatóból, melyet a kísérletező időközönként működtet, mihelyt a fujtatóval kapcsolatos elektromos csengő megszólal. A vascső másik vége kupakkal van elzárva, melybe egymás fölött két lyuk (1 mm. átmérővel) van fúrva, még pedig kifelé összetartó ferde irányban, úgy, hogy két légáram találkozik, melyekből szétterülő, lapos áram keletkezik. Ez a légáram éri a drótot közvetlenül a nyílás fölött, de úgy, hogy a gőztérbe levegő ne fuvassék.

A mérleget az egyoldalú melegedéstől megóvándó, oldalát és elejének közel $\frac{1}{3}$ -át több réteg lemezpapírral védjük.

Az előzetes melegítés ideje alatt a meleg részeket természetesen oly távol tartjuk a mérlegtől, a mennyire a 80 cm. hosszú kocsi-sinek megengedik.

3. A szóbanforgó szerkezet egyik előnye, hogy a kosár a felfüggesztő drót rövidsége folytán csak kis lengésbe juthat, miből folyólag a gőz kivezetésére szolgáló nyílás, melyen a drótnak át kell menni, szintén kicsiny lehet, úgy hogy gyakorlatlanoknál is elegendő 6 mm. nyílás, a nélkül, hogy a drót ütközésétől és a hajcsövesség folytán odatapadástól tartani kellene. Ugyanezen körülményből kifolyólag mérsékelt gőzáram elegendő annak a biztosítására, hogy levegő ne jusson a felső nyíláson át a gőztérbe. A távozó gőz ezért nem is melegíti meg a dolgozó helyiséget annyira, hogy eltávolításáról gondoskodni kellene, s a készüléket nem kell kürtő közelében összeállítani. Kitűnik ez abból, hogy a gőzfejlesztőben óránként csak 130 g. víz párolog el.

Már Schükarew tapasztalta, hogy a gőzkamrában a gőz hőfoka nem éri el a légköri nyomásnak megfelelő forrpontot, a minek az oka a gőzhöz kevert levegő lehet, melyet nem lég-

¹ Wirtz Wid. Ann. 40. 440. 1890.

mentesen záró edényünknel alig sikerülhet teljesen elhárítani s mely részben a forralóban áramló víztől is származhatik. Ezért czélszerű a gőz hőfokát munkaközben hőmérővel megállapítani. Ha a gőz hőfoka pl. 0.3° -kal kisebb, mint a tiszta telített gőznek lenni kellene, a hozzákevert levegő parciális nyomása közel 8 mm. higanyoszlopnak felelne meg, a mi, tekintettel a nagy gőztérre, a gőzfejlesztőben és a gőzköpenyben, melyből a levegő csak hosszas forralás közben űzhető ki, nem látszik kizártnak.

Ugyanilyen pontosan kell a szoba hőfokával megegyező kezdeti hőfokot is meghatározni, melyet a mérendő test csak lassan vesz fel, míg a mérés a gőztérben sokkal kevesebb időt igényel, részben azért is, mert a gőzköpeny előzetesen már alaposan átmelegedett.

Ezen készülékkel a fajmeleget *Bunsen*¹ módja szerint kényelmesen és pontosan határozhatjuk meg, minthogy a test súlya a gőztérben is annyira állandónak mutatkozik, hogy a lecsapódott víz tömege a milligramm törtrészeig pontosan megállapítható. Lényeges azonban, hogy a gőzkamra burkolata átlátszatlan legyen, pl. fém posztóburkolattal, mert különben a kisugárzás következtében a vízlecsapódás nem szűnik meg teljesen.

¹ Über das Dampfcalorimeter. Wied. Ann. 31. 1. 1887.

A REZGŐ LEMEZEK CSOMÓVONALAINAK METSZÉSI PONTJAIRÓL.

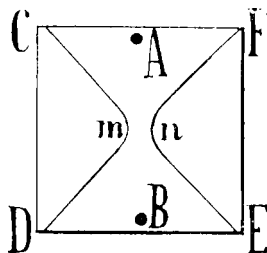
SCHULLER ALAJOS r. tag-tól.

1. Általánosan elterjedt nézet az, hogy a kísérletileg előállított csomóvonalak az ú. n. Chladni-féle hangidomokban nem metszik, hanem kikerülik egymást. Ezzel szemben a matematikai fejtegetések bizonyos egyszerű alakoknál metszési pontokra utalnak, legalább a felülethez párhuzamos felező síkban. Ugyanilyen eltérés tapasztalható a széleken befogott vékony hártványon, és egyelőre nem ismeretes az elmélet és a tapasztalat között mutakozó ezen ellentét kielégítő magyarázata. Wheatstone szerint szabálytalanságok okozhatnák, de ezen feltevessel ellenkezni látszanak Strehlke-nek nagy pontossággal végzett, gondosan készült lemezekre vonatkozó mérései. Az ellenmondás azonban eltűnnék, ha kiderülne, hogy a csomóvonalak és különösen metszési helyük kis szabálytalanságokkal szemben igen érzékenyek. Ez irányban végzett kísérletek megerősítik ezt a vélekedést, és oda utalnak, hogy a csomóvonalak csakugyan metszhetik egymást és hogy a metszést kellő kezelés által minden lemezen létesíthetjük. De már itt ki kell emelnünk, hogy természetszerűleg nem várhatók olyan éles metszési pontok, a milyenek a csomóvonalak a metszéstől távolabb eső helyeken. Mert metszési pont közelében a rezgés mindig csak csekély lehet és ezért a csomóvonalak ott csak tökéletlenül fejlődhetnek ki, ellentétben a távolabbi részekről, melyek kifejlődését az ott erőteljesen fellépő torsio két irányban segíti elő. A homokszemek egyrészt az oldalakról a csomóvonalak felé löketnek, másrészt a lemez felülete a csomóvonalak közelében a lemez belsejében lévő tengely körül forogván, saját sík-

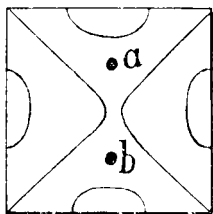
jában is ide-oda inog, mi által a homokszemek tapadása meglazul és mozgékonyosságuk fokozódik.

E szerint nem remélhető, hogy a csomóvonalakat egészen a metszési pontig követni sikerülne, s így felmerül a kérdés, hogy miképen lehet tehát a metszést felismerni. E tekintetben szolgáljon a következő kísérlet felvilágosításul.

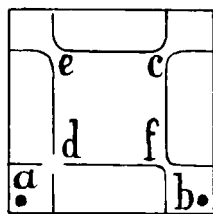
2. Négyzet alakú üvegtábla, 13·15 cm.-nyi oldalakkal és 98·4763 gramm tömeggel, egyik oldalán homályosra volt köszörülve. Két sarkát a hüvelyk- és mutató-ujj közé fogva és egyik átlóját a kis újjal alátámasztva, a lemezt hegedűvonóval rezgésbe hoztam, mialatt a lemezen lévő tengeri homok az 1. ábrán előtüntetett hyperbolikus alakban helyezkedett el. A hyperbola



1. ábra.



2. ábra.



3. ábra.

csúcspontjai $m-n$ -nél 18·5 milliméter távolságban voltak egymástól és az ágak végei, különösen az egyik oldalon nem irányultak a lemez sarkai felé.

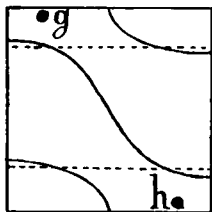
A lemezek CD és EF széleit leköszörültem. Midőn ily módon 0·1952 grammot eltávolítottam a csúcspontok 16·5 milliméterre közeledtek, szintúgy az ágak végei is megközelítették a lemez sarkait. A lemez leköszörülését CD és EF oldalakon folytatva, sorban a következő tömegek távolítottak el:

0·1011, 0·2075, 0·0745, 0·0423 gramm,

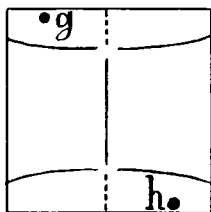
mialtál a csomóvonalak távolsága $m-n$ a következő értékekre csökkent:

14·5, 8·0, ?, 0·0 milliméter.

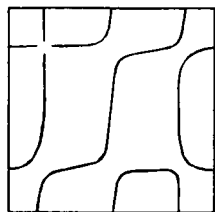
A kérdőjellel megjelölt utolsóelőtti esetben már nem sikerült a csomóvonalakat a metszési hely közelében élesen kifejleszteni, távolságuk tehát bizonytalan; mindamellett kétségtelenül kitűnt, hogy metszés még nem forog fenn, mert a lemezt a szem magasságában tartva és az egyik átló irányában nézve, határozottan kitűnt, hogy a szemközt lévő ágak még nem egyirányúak, a mit csak az utolsó 0.0423 gramm leköszörülésével lehetett elhárítani. Ezen állapotot tartom a metszés egyik jelének. Egy másik jelét a következő kísérlet szolgáltatja: A lemezt *A* és *B*-nél ragasztóviaszk-gömböcskékkel terheljük meg, melyek a lemez tömegének $\frac{1}{1000}$ vagy $\frac{2}{1000}$ részét teszik ki. Ekkor ismét hyperbola alakokat nyerünk, melyek az eredetihez képest 90° -kal



4. ábra.



5. ábra.



6. ábra.

el vannak fordulva, és melyeknek legkisebb távolságát egymástól lemérjük. Azután ugyanazon viaszkgolyócskákat *CD* és *EF* oldalak megfelelő pontjaira ragasztjuk, miáltal a görbék az eredeti helyzetben jelentkeznek. Ha már most távolságuk megegyezik az előbbi esetben lemérttel, a metszési pont el volt érve, máskülönben a lemez leköszörülését még folytatni kellene.

Hogyha a lemez leköszörülését ugyanazon oldalakon azontúl is folytatjuk, ismét hyperbolikus alak jelentkezik, mely az eredetihez képest 90° -kal el van fordítva. E szerint a metszési pont közelében a csomóvonalak ugyanolyan értelemben változnak, akár az egyik oldalt leköszörüljük, akár a vele párhuzamos középvonalat terheljük, a mint pl. *A* és *B*-nél történt.

3. Ilyenmő kísérleteknél a következő körülményekre kell ügyelni: A csomóvonalaktól származó quadransokban a homok

a csúcspont felé közeledik és határa végre hyperbolikus hajlást mutat. Ha már most a homok a metszéspont közelében eredetileg nem volt egyenletesen eloszolva, könnyen az a látszat támadhat, mintha a hyperbolák az egyik irányban jobban ki lennének fejlődve, mint a rá merőlegesben, ezért a homok egyenletes eloszlásáról kell gondoskodni. Továbbá kerülendők a lemezben hőfokkülönbségek. Ilyenek támadhatnak az újjakkal való huzamosabb érintkezés folytán, a vonónak gyakori alkalmazása és talán még a rezgés következtében is. Igen hátrányos lehet továbbá harmonikus felhangnak a csatlakozása, pl. a háromszoros rezgési számmal. Némely alaknak nagy változékonysága ilyen felhanggal látszik összefüggni. Ilyenkor a csomóvonalak egyes részeit még a metszési pontoktól távolabb eső helyeken sem sikerül előállítani.

4. A fent említettnek megfelelő befolyását a terhelésnek más rezgési alakoknál is meg lehet figyelni. Egyik lemez a 2. ábrán feltüntetett csomóvonalakat adta, melyeknél a diagonálisak határozottan nem metszik egymást. a és b -nél viaszkkal megterhelve, a görbülés a középén el volt hárítható, az ellenkező ágak egyenlő irányuk voltak, tehát egymásnak folytatását látszottak képezni, úgy hogy semmi sem mutatott arra, hogy a csomóvonalak a középén kitérnének. Az előbbieik szerint az a feltevés látszik beigazoltnak, hogy a lemeznek ebben az állapotában a csomóvonalak a középén metszenék egymást, ha sikerülne azokat odáig követni.

5. Hasonló jelenség mutatkozott a 3. ábra egyes keresztezési helyein. Eredetileg a csomóvonalak d -nél metszeni látszottak egymást, a mennyiben nem voltak élesen előállíthatók és szemközti ágak ugyanazon egyenes részeit képezték. a -nál alkalmazott viaszgömböcske főképpen c és d metszési pontokra hatott, melyek a -val együtt ugyanazon átlón fekszenek, még pedig c záródott, vagy erősebb terhelésnél a görbület ellenkezővé vált, olyanná, a milyen e -nél, egyidejűleg megnyílt d , mely c -nek előbbi alakját vette fel. Épen úgy hatott a b -nél alkalmazott viaszgömböcske az ugyanazon átlóban fekvő e és f helyre, még pedig a jelenlétében is; itt is e -nél közeledtek a csomóvonalak és egyidejűleg távolodtak f -nél.

6. Még megemlítem a 4. ábra hangidomát, melyről *Melde* »Akusztiká«-jában úgy nyilatkozik, hogy az ábrában pontozottan jelzett alapidom, *Chladni* jelzése szerint $2 \mid 1$, sohasem keletkezik. Ha előállítottuk az ábrán kihúzott csomóvonalakat és a lemezt változatlanul megfogva g és h -nal viaszkkal megterheljük, a csomóvonalak megközelítik az alapidomot, sőt nagyobb terhelésnél, különösen a lemez csucsaiban, az idom átváltozik tükörképévé. Magát az alapidomot nem sikerült teljesen élesen előállítanom, csak az 5. ábrán vázolt alakhoz juthattam, melynél a párhuzamos egyenesek helyett görbe vonalak jelentkeztek és a melyeknél a középső egyenes résznek a folytatásai a párhuzamosokon túl nem fejlődtek ki. Az eltérések valószínűleg egy harmonikus felhang fellépésével függnek össze. Ez a felhang igen feltűnő, egyedül előállítva a 6. ábrát szolgáltatja, és rezgési száma úgy látszik pontosan 3-szorosa az előbbi hangénak, a mi megegyezik *Chladni* adataival, csak hogy *Chladni* az illető ábrán¹ egyenes diagonálist rajzolt. Az 5. ábra minden fogyatékosága mellett is el kell ismerni, hogy közelebb áll az alapidomhoz, mely egymást metsző egyenesekből van alkotva, mint a 4. ábra kihúzott vonalaihoz. Az 5. ábrán fellépő metszési pontok mellett ugyan csak az a körülmény szól, hogy a csomóvonalaknak átellenes, még jól kifejlődött részei a keresztezési hely közelében megegyező iránynyal bírnak, és hogy a középső, szintén jól kifejlődött csomóvonal az előbbiekre merőleges, míg mindig ferde, ha a metszéspontot kikerüli.

7. Az előzményekből kitűnik, hogy a csomóvonalak általában, és különösen a metszési helyhez közel eső részük rendkívül érzékenyek csekély tömegváltozások iránt. Valószínű, hogy hasonló hatást gyakorolnak a rugalmasságnak csekély eltérései is, s ez esetben nem meglepő, hogy a legpontosabb mérésekhez használt lemezek sem szolgáltatnak metszési pontokat. De sajátságos lenne, ha még véletlenül sem mutatkoztak volna ilyen metszések. Ilyennek tartom a 3. ábrán d -vel jelölt helyet s ilyen más kísérletezőknél is mutatkozhatott, csak hogy ezeket

¹ *Chladni*, Die Akustik, 1882 Tab. IV. 71. b.

tekinteten kívül hagyták, egyrészt mert nem sikerült őket tökéletes élesen előállítani, másrészt mert ismeretlenek voltak a metszéseket jellemző tulajdonságok, melyek a 258. lapon vannak felemlítve.

Az eredményeket összefoglalva, láttuk, hogy a lemez tömegének csekély módosítása által a csomóvonalakat oly módon befolyásolhatjuk, hogy egymással szemben álló domború, pl. hyperbola-alakú részei közeledjenek és végül messék egymást. Még nagyobb tömegáthelyezések által azt is elérhetjük, hogy a görbület ellenkezővé, domborúból homorúvá válják, pl. a hyperbola 90° -kal elforduljon. A metszés esetében a metszési pont felé irányuló szemközt álló ágak szabatosan egy irányba esnek, és ezen állapotban elegendő a lemez tömegének egy pár tízezred része, hogy észrevehető irányváltozást okozzon. (l. a 259. lap számadatait.) A metszésnek egy másik ismertető jelét képezi a homoknak egyenletes eloszlása a metszési pont közelében a négy quadransban. Végül egy harmadik ismertető jel, mely azonban csak ritkán lesz alkalmazható, a 258. lapon a lemez legmélyebb hangjára vonatkozólag van felemlítve, és ez abban áll, hogy ugyanazon terhelés különböző quadransokban alkalmazva egyenlő nagy alakváltozást idéz elő.

Minthogy a mondottak szerint a csomóvonalak görbülését a metszési pontok közelében el tudjuk háritani, régebbi tapasztalatokkal ellentétben lehetségesnek látszik, hogy egyenes csomóvonalak is kifejlődhetnek.

ADATOK HÁTSÓINDIA, SUMATRA, JAVA ÉS A HAWAII-SZIGETEK COPEPODA-FAUNÁJÁNAK ISMERETÉHEZ.

DADAY JENŐ I. tagtól.

I. Bevezetés.

Az *orientali regio* Copepoda-faunájára vonatkozó legelső adatokat BRADY G. ST. «Note on Entomostraca collected by Mr. A. Haly in Ceylon» című 1886. évi dolgozatában találjuk (1a.), melyben a *Diaptomus orientalis* BRADY, *Cyclops* sp. és *Attheyella singalensis* BRADY szerepelnek. RICHARD J. már három dolgozatában nyújt idevonatkozó feljegyzéseket, a meny-nyiben az 1891. évben megjelent «Entomostracés d'eau douce de Sumatra et de Célebes» (7.) címűben ugyanis a *Cyclops simplex* POGG. és *Diaptomus orientalis* BRADY fajokról tesz említést, míg 1894. évi két dolgozata közül az «Entomostracés recueillis par M. E. Modigliani dans le lac Toba (Sumatra)» (8.) címűben a *Diaptomus Doriai* RICH., *Cyclops Leuckarti* SARS és *Cyclops oithonoides* var. *hyalinus* REHB.; a «Sur quelques animaux des eaux douces du Tonkin» (9.) címűben pedig a *Cyclops Leuckarti* SARS; *Cyclops oithonoides* var. *hyalinus* REHB. és *Cyclops prasinus* FISCH. fajokat jegyzi fel.

POPPE S. A. és MRÁZEK AL. 1895. évi «Die von Herrn Dr. H. Driesch auf Ceylon gesammelten Süßwasser-Entomostraken» című dolgozatában (6.) a *Diaptomus Drieschi* és *Cyclops vernalis* FISCH. fajokat említi. A legtöbb fajt azonban DADAY JENŐ jegyzi fel Ceylonból 1898. évi «Mikroskopische Süßwasserthiere aus Ceylon» című dolgozatában (2.), a meny-nyiben a következő fajokról tesz említést: *Cyclops fimbriatus* FISCH., *Cyclops phaleratus* C. K., *Cyclops serrulatus* FISCH., *Cyclops prasinus* FISCH., *Cyclops languidus* SARS, *Cyclops*

Leuckarti CLS., *Diaptomus orientalis* BRADY, *Diaptomus Lumholtzi* Sars és *Diaptomus singalensis* DAD. Ugyane bűvár a «Dritte asiatische Forschungsreise des Grafen Eugen Zichy» című munka 1901. évi 2. kötetében (4.) Chinából a következő fajokat sorolja fel Peking termőhelyéről: *Cyclops phaleratus* C. K., *Cyclops serrulatus* FISCH., *Cyclops vernalis* FISCH., *Cyclops Leuckarti* CLS., *Canthocamptus staphylinus* JUR., *Diaptomus asiaticus* ULLJ. STINGELIN TH. 1900. évi dolgozatában Celebesből a *Cyclops Leuckarti*-t, egy *Canthocamptus*-t s a *Pseudodiaptomus Poppei*-t ismerteti (12a.).

Végre Sars G. O. 1903. évi «Freshwater Entomostraca from China and Sumatra» című dolgozatában (11.) a *Cyclops Leuckarti* CLS., *Cyclops hyalinus* REHB. és *Cyclops affinis* G. O. Sars. fajokat találjuk, míg «Pacifische Plankton-Crustaceen» című, ugyanezen évben megjelent dolgozata (11a.) az *Attheyella grandidieri* GUERN. RICH., *Attheyella coronata* n. sp., *Cyclops albidus* (JUR.), *Cyclops Leuckarti* CLS. és *Cyclops fimbriatus* FISCH. var. *poppei* SCHMEIL fajokat tartalmazza a Hawaii-sziget-csoportból.

Dr. Volz W. 1901—1902. évi délázsiai utazása alkalmával tekintélyes mennyiségű planktonanyagot gyűjtött s a benne levő *Copepodák* tanulmányozását nekem ajánlotta fel. Én e megtisztelő ajánlatot készséggel fogadtam el, annyival is inkább, mert így reményem nyílt arra, hogy az előzőkben röviden ismertetett adatokat kibővíthetem.

A rendelkezésemre állott anyag 23 kis üvegben volt elhelyezve, még pedig glycerinben és 17 termőhelyről való. Ebben az anyagban vizsgálataim során 17 fajt sikerült találnom, melyeknek túlnyomó része, még pedig 14 már ismert, 3 ellenben új.

II. Az egyes termőhelyek és a megfigyelt fajok áttekintése.

A) Hátsóindiai szigetek.

Sumatra.

1. Kis tó *Tolong-Bankolang* mellett (Pangkolon Balai). Palembang kormányzóság. (Nr. Va. 1902. jun. 4.)

Cyclops serrulatus FISCH.

„ *Leuckarti* CLS.

Diaptomus Doriai RICH.

2. Egy odvas fa esővizéből, melyet korábban rizsmorzsólásra használtak. *Belanie*. Palembang kormányzóság. (Nr. Ib. és XXIIIa. 1901. ápr. és jul.)

Cyclops aspericornis n. sp.

„ *oithonoides* SARS.

3. Kis, moszatos tócsa *Belanie* mellett. (Nr. Iib. és IIId. 1901. ápr.)

Cyclops aspericornis n. sp.

Diaptomus Doriai RICH.

4. Karbau-tócsa *Belanie* mellett. (Nr. IVe. és VIc. 1901. ápr.)

Cyclops oithonoides SARS.

„ *Leuckarti* CLS.

Diaptomus Doriai RICH.

5. Kis, homokos tó *Belanie* mellett. (Nr. XXIVa. 1901. ápr.)

Cyclops prasinus SARS.

„ *Leuckarti* CLS.

Diaptomus Doriai RICH.

6. Régi karbau-tócsa *Belanie* mellett. (Nr. VIIc. 1901. ápr.)

Cyclops bicolor SARS.

„ *anceps* RICH.

„ *Leuckarti* CLS.

Attheyella decorata (DAD.).

7. Kis, napsütötte tó *Bingin-Telok* mellett. (Nr. XXIIa. 1901. máj.)

Cyclops phaleratus FISCH.

„ *oithonoides* SARS.

Java.

8. *Sitoë Bagendiet* tó fenekéről növénydús partjáról. (Nr. XI_d. 1902. jul.)

Cyclops phaleratus C. K.

« *anceps* Rich.

« *serrulatus* Fisch.

« *Leuckarti* Cls.

Laophonte Mohammed Bl. et Rich.

Diaptomus Doriai Rich.

9. Plankton-anyag ugyanezen tóból. (Nr. VIII_a. 1902. jul.)

Cyclops oithonoides Sars.

« *Leuckarti* Cls.

Diaptomus Doriai Rich.

10. Medenczék a *Buitenzorgi* botanikus kertben. (Nr. XVIII_c. 1902. jul.)

Cyclops prasinus Sars.

« *serrulatus* C. K.

« *anceps* Rich.

« *Leuckarti* Cls.

« *albidus* (Jur.).

Attheyella Grandidieri (Guern. Rich.).

« *decorata* (Dad.).

11. Kis tó *Lembang* mellett *Bondoengtól* északra, 1300 m. a tenger felett. Nyugati Java. (Nr. XIV_a. 1902. jul.)

Cyclops serrulatus C. K.

*B) Hátsó-India.**Singapore.*

12. Medenczék a botanikus kertben. (Nr. X_b. 1902. aug. 15.)

Cyclops Leuckarti Cls.

13. Plankton a «Waterworks»-ból, nagy medenceze, mely *Singapore* vízgyűjtőjéül szolgál. (Nr. XXI_a. 1902. aug. 13.)

Cyclops aspericornis n. sp.

Sium.

14. Tócsa *Wat Sabatome* előtt. Bangkok. (Nr. XII_a. 1902. aug. 23.)

Cyclops Leuckarti Cls.

Diaptomus Doriai Rich.

15. Más tócsa *Wat Sabatome* közelében. (Nr. XIc. 1902. aug. 23.)

Cyclops bicolor Sars.
 „ *anceps* Rich.
 „ *Leuckarti* Cls.
Nitocera platypus n. sp.

16. Ugyanazon tócsa más helyéről. (Nr. XIIIa. 1902. aug. 23.)

Cyclops fimbriatus Fisch.
 „ *phaleratus* C. K.
 „ *anceps* Rich.
 „ *oithonoides* Sars.
Attheyella Grandidieri (Guern. Rich.).
Nitocera platypus n. sp.
Dactylopus Jugurtha Bl. et Rich.

Cochinchina.

17. Medenczék a *Saigoni* botanikus kertben. (Nr. XIXa. 1902. szept. 3.)

Cyclops Leuckarti Cls.
 „ *oithonoides* Sars.
Attheyella Grandidieri (Guern. Rich.).
Diaptomus Visnu n. sp.

C) Hawaii-szigetek.

18. Tócsa és pocsolyák *Honolulu* és *Waikiki* között (Oahu sziget). (Nr. XVd. és XVIIb.)

Cyclops aspericornis n. sp.

III. Az egyes fajok ismertetése.

COPEPODA.

Fam. CYCLOPIDAE.

1. *Cyclops fimbriatus* Fisch.

Schmeil O. 12. p. 161. Taf. 7. fig. 8—13.

Az orientali régióból még eddig csupán ceyloni termőhelyről volt ismeretes, a honnan Daday J. jegyezte fel. Víz-

gálataim során csupán a Siamban a *Wat Sabatome* közelében fekvő tócsából származó anyagban találtam meg pár ivarérett példányát.

2. *Cyclops phaleratus* C. K.

SCHMEIL O. 12. p. 170. Taf. 8. fig. 1—11.

E fajt DADAY J. Ceylonból és Chinából jegyezte fel. A rendelkezésemre állott anyagban a következő termőhelyeken találtam meg: *Sumatra*, kis tó Bingin-Telok mellett; *Java*, Sitoë Bagendiet tó; *Siam*, tócsa *Wat Sabatome* közelében. Valamennyi termőhelyről csupán néhány ivarérett példányát láttam.

3. *Cyclops bicolor* Sars.

SCHMEIL O. 12. p. 118. Taf. 6. fig. 6—13.

Az orientali régióból még eddig ismeretlen volt. Vizsgálataim során a következő termőhelyekről jegyeztem fel: *Sumatra*, régi karbaumentócsa Belanie mellett; *Java*, Sitoë Bagendiet tó. Mindkét termőhelyről több ivarérett és petezacskókat czipelő példányt találtam.

4. *Cyclops serrulatus* Fisch.

SCHMEIL O. 12. p. 141. Taf. 5. fig. 6—14.

E fajt DADAY J. Ceylonból és Chinából jegyezte fel; úgy látszik, hogy az orientali régióban közönséges, a mennyiben én a következő termőhelyekről származó anyagban találtam meg: *Sumatra*, kis tó Tolang Bankolang mellett; *Java*, Sitoë Bagendiet tó; medenczék a buitenzorgi botanikus kertben; kis tó Lembang mellett; különösen sok volt a buitenzorgi botanikus kertből való anyagban.

5. *Cyclops prasinus* Fisch.

Cyclops prasinus SCHMEIL O. 12. p. 150. Taf. 5. fig. 1—5.

Dél-Ázsiából, illetőleg az orientali régióból már korábban ismert faj. Legelőször RICHARD J. jegyezte fel Tonkinból, később

pedig DADAY J. Ceylonból. Vizsgálataim során a következő két termőhelyen találtam meg: *Sumatra*, kis tó Belanie mellett és *Java*, medenczék a buitenzorgi botanikus kertben; mindkét helyen csak pár példányát láttam.

6. *Cyclops anceps* RICH.

Cyclops anceps RICHARD J. 10. p. 265. fig. 1—4.

E faj eddig még csak Délamerikából volt ismeretes. Úgy látszik, hogy az orientali régióban gyakori, erre mutat az, hogy én vizsgálataim során a következő termőhelyekről származó anyagban találtam meg: *Sumatra*, régi karbauentócsa Belanie mellett; *Java*, Siteo Bagendiet tó, medenczék a buitenzorgi botanikus kertben; *Siam*, Bangkok, tócsa Wat Sabatome mellett. Több példány 5. lábáról hiányzott a belső tűskeforma nyujtvány, minek révén nagyon emlékeztetett a *Cyclops vari-cans* SARS fajra, de a receptaculum seminis alakja és szerkezete határozottan a délamerikai, illetőleg a typosos példányokéval egyezett.

7. *Cyclops Leuckarti* CLS.

Cyclops Leuckarti SCHMEIL O. 12. p. 57. Taf. 3. fig. 1—8.

A genusnak egyik kozmopolita faja, a mely Dél-Ázsiából, illetőleg az orientali régióból már régebben ismeretes. RICHARD J. Sumatrából és Tonkinból. DADAY J. Ceylonból és Chinából, SARS G. O. pedig újabban szintén Sumatrából jegyezte fel. Én vizsgálataim során a következő termőhelyeken találtam meg: *Sumatra*, kis tó Tolang Bankolang mellett, kis tó Belanie mellett, különböző karbauentócsák Belanie mellett, kis beiszapolt tócsa Belanie mellett, régi karbauentócsa Belanie mellett; *Java*, Siteo Bagendiet tó, a buitenzorgi botanikus kert medenczéi; *Siam*, tócsa Wat Sabatome előtt és mellett; *Singapore*, medenczék a botanikus kertben; *Cochinchina*, medenczék a saigoni botanikus kertben.

8. *Cyclops aspericornis* n. sp.

Törzse elöl és hátul keskenyedett, csaknem kétszer oly hosszú, mint a mekkora a legnagyobb szélessége, egy negyeddel hosszabb, mint a potroh és a villafüggelékek együttvéve. Az első törzsszelvény hosszabb, mint az utána következő négy együtt, valamennyinél szélesebb, majdnem oly széles, mint a milyen hosszú, elöl kissé kihegyesedett, két hátulsó oldalcsúcsa majd egyenesre metszett, majd pedig gyengén kerekített. A következő három törzsszelvény csaknem egyforma hosszú, oldalcsúcsaik feltűnő hegyesek és hátrafelé meghosszabbodtak, különösen a harmadiké és negyediké, mely utóbbinak oldalcsúcsai különben karélyosaknak látszanak. Az ötödik törzsszelvény oldalcsúcsai hegyesek, oldalt állanak, oldalain finom sörték sora emelkedik.

A *potroh* meglehetősen vékony, a genitalis szelvény mellső végén szélesebb, oly hosszú, mint az utána következő három szelvény együttvéve, cuticulájának fölületén a hasoldalon szabály szerint apró szemölcsök sorakoznak harántsorokban s ugyanezt találjuk a következő két szelvényen is. A potroh három utolsó szelvénye majdnem egyforma hosszú és széles. Egyetlen potrohszelvény hátulsó szegélyén sincsenek fogacskák.

A *villafüggelékek* majdnem oly hosszúak, mint a két utolsó potrohszelvény együttvéve, jóformán egyenesen hátrafelé irányulnak, belső szegélyük finoman sörtézett, alapjukon apró tüskék koszorúja emelkedik. Az oldali szegélysörte közelebb áll a villafüggelékek végsőcsúcsához, mint alapjához. A külső csúcssörte kevésbé hosszabb a villafüggelékek felénél, míg a belső kevésbé rövidebb, mint a villafüggelékek s a három utolsó potrohszelvény együttvéve. A két középső villasörte közül a külső jóval meghaladja a villafüggelékek s a potroh három utolsó szelvényének együttes hosszát, míg a belső oly hosszú, mint a potroh s a villafüggelékek együttvéve.

Az *első csáppár* meglehetősen vékony és hosszú, hátrafelé hajlítva kevésbé meghaladja a második törzsszelvényt; valamennyi ízének fölületén apró, kerek kis szemölcsök emelkednek, melyek a 15. izig harántsorokba rendeződöttek, míg a 16. és 17. ízén szabálytalanul elszórtak; a rövidebb ízeken

a szemölcsorok száma 1—2, a hosszabbakon 3—5 és még több. A két utolsó csápiz belső szegélyén cuticularaj húzódik végig, a mely azonban az utolsó izen egyenletesen és meglehetősen finoman fogazott, de közepén élesen bemetszett, épen mint a típusos *Cyclops Leuckarti*-én.

A második csáppár mindenik izének fölületén elszórtan apró, szemölcszerű kiemelkedések vannak; a proximalis iz hátulsó szegélye hosszában finoman tüskézett, mellső distalis csúcsán két rövid, a hátulsón egy hosszú tollas sörte ered; a második iz distalis hátulsó csúcsa duzzadt, finoman sörtés, épen így sörtés a következő két izé is; az utolsóelőtti iznek mellső szegélyén öt, distalis csúcsán pedig három sörte van, melyek közül az előbbiek rövidebbek; az utolsó iz végsőcsúcsán két rövidebb és három hosszabb tollas sörte ül. Általában különben a második csáppár nagyon hasonlít a *Cyclops annulatus* WIERZ. fajához.

A szájszervek s az állkapcsi lábak hasonlítanak a *Cyclops Leuckarti*-éhoz, az utóbbiaknak fölületén szintén megvannak az elszórt szemölcsöcskék, sőt a hátulsó állkapcsi lábak hátulsó szegélye ugyanolyan, mint a *Cyclops Leuckarti*-é.

Az evezőlábak általánosságban egyeznek a *Cyclops Leuckarti* és még inkább a *Cyclops annulatus* fajával. A negyedik lábpár kapcsolólemezen az oldalsörtéken kívül megvan a két tüske is, a melyek egy-egy kis halmon ülnek. Valamennyi láb protopoditjának második izén a belső csúcs kerekített halmot alkot egy külső oldaltüskével és csúcsán finom sörték pamatával, a két lábág között pedig kétesúcsú nyujtvány emelkedik. Az egyes lábak és lábizek tüskézettsége egészen olyan, mint a *Cyclops annulatus*-é.

Az ötödik lábpár kétizű, a distalis iz belső oldalának közepe táján erős, röviden sörtés, distalis csúcsán pedig vékonyabb, finoman tollas, hosszú sörte ered, általában tehát egyezik a *Cyclops Leuckarti* és *annulatus* fajokéval.

A *receptaculum seminis* főtömege szívforma tömlő, a mely fölött két szárnyforma nyujtvány terül el, általánosságban pedig hasonlít a *Cyclops Leuckarti*-éhoz. (V. ö. SCHMEIL O. 12. Taf. 3. Fig. 8.)

A petezacskók számos petét tartalmaznak és oldalt kifelé irányulnak.

A nőstény testhossza a villasörtékkal együtt 1·8—2 mm., a villasörték nélkül 1·2—1·4 mm.

Termőhelyei: *Sumatra*, egy odvas fából, a melyet korábban rizszúzásra használtak; tócsa Belanie mellett; *Java*, medenczék a buitenzorgi botanikus kertben; *Singapore*, plankton a Waterworksból; *Oahu* sziget, tócsák és pocsolyák. Több példány állott rendelkezésemre.

E faj közel rokonságban áll a *Cyclops Leuckart*-al és *Cyclops annulatus*-szal, annyira, hogy jóformán a kettő között átmenetnek lehet tekinteni. Mindkét fajtól különbözik törzsszelvényeinek alakjában, utolsó törzsszelvényének sörtézettségében, csápjainak, állkapcsi lábainak és két első potrohszelvényének szemölcsösségében, a mi különben egyik-másik példány törzsszelvényein is mutatkozik. A *Cyclops Leuckarti*-hoz hasonlít abban, hogy potrohszelvényeinek hátulsó szegélye sima és első csápjai is csaknem oly hosszúak, továbbá hátulsó állkapcsi lábának hátulsó szegélye szintén csipkés. A *Cyclops annulatus*-szal egyezik evezőlábainak szerkezetében és abban, hogy potrohának 2—3 első szelvénye hasoldalán szemölcsorokkal ékített. Mindkét fajjal egyezik abban, hogy első csápjának két utolsó ízén cuticulataraj van, a mely az utolsó ízén finoman fogazott, közepén bemetszett; de egyezik ötödik lábpárjának szerkezetében is.

9. *Cyclops oithonoides* Sars.

Cyclops oithonoides SCHMEIL O. 12. p. 64. Taf. 4. fig. 6—11.

Az orientali régióból már korábban ismeretes faj, a melyet RICHARD J. Sumatrából és Tonkinból jegyzett fel. (9.) Úgy látszik, hogy közönséges faj, a mennyiben én az alább következő termőhelyekről származó anyagban találtam meg: *Sumatra*, karbanentócsa Belanie mellett, tócsa Bingin Telok mellett; odvas fatörzs, melyet régebben rizszúzásra használtak, Belanie mellett; *Java*, plankton a Bitoe Bagendiet tóból; *Siam*, tócsa Wat Sabatome mellett; *Cochinchina*, medenczék a saigoni botanikus kertben.

10. *Cyclops albidus* (JUR.).

Cyclops albidus SCHMEIL O. 12. p. 128. Taf. 1. fig. 8—14.

Az orientali régióból még eddig ismeretlen volt s én is vizsgálataim során csupán a következő egyetlen termőhelyen találtam meg: *Java*, medenczék a buitenzorgi botanikus kertben, s itt is csak pár példánya volt jelen.

Fam. HARPACTICIDAE.

Gen. ATTHEYELLA BRADY.

11. *Attheyella Grandidieri* (GUERN. RICH.).

Canthocamptus Grandidieri GUERNE J. DE et RICHARD J. 5a. p. 214. fig. 1—9.

« *signatus* DADAY E. v. 3. p. 32. fig. 13a—k.

Attheyella Grandidieri SARS G. O. 11a. p. 639. Taf. 37. fig. 12a—b.

Csupán nőstényeket találtam, melyeknek hossza 0·9—1·1 mm. között ingadozott a villasörtékkal együtt.

Termőhelyei: *Java*, a buitenzorgi botanikus kert medenczéi; *Siam*, tócsa Wat Sabatome mellett; *Cochinchina*, a saigoni botanikus kert medenczéi.

Érdekes e fajnak eddig megállapított földrajzi elterjedése. GUERNE J. DE és RICHARD Madagascár szigetéről írta le, én magam Ujguineában és Paraguay faunájában találtam meg, a honnan a *Canthocamptus trispinosus* BRADY faj varietása gyanánt említettem; míg SARS G. O. a Hawaii-szigetcsoporthoz tartozó Molokai szigeten a Kalae mellett fekvő egy tóból származó anyagból ismertette. Újabb termőhelyeinek a régebbiekkel való egybevetése arra az eredményre vezet, hogy e faj a subtropikus vidékek lakójának tekinthető és Európán kívül minden világrészben otthonos.

12. *Attheyella decorata* (DAD.).

Canthocamptus decoratus DADAY E. v. 3. p. 34. fig. 14a—e.

« *bidens* var. DADAY E. v. 5. p. 144. Taf. 9. fig. 5—8.

Attheyella coronata SARS G. O. 11a. p. 641. Taf. 38. fig. 13. 13a—k.

Csupán nősténypéldányok állottak rendelkezésemre, melyeknek hossza a villasórték nélkül 0·6—0·8 mm, a villasórtékkal együtt 0·9—1·12 mm.

Termőhelye: *Sumatra*, régi karbauentócsa Belanie mellett; *Java*, a buitenzorgi botanikus kert medenczéi.

E fajt Ujguineából irtam le először, de mint az újabban rendelkezésemre állott anyaggal való összehasonlításból kitűnt, az újguineai példány még fiatal s nem ivarérett volt. E mellett szól a potrohnak szerkezete, illetőleg az utolsó potrohszelvény feltűnő hossza s az első csápok hatizúsége. Paraguay faunájából e fajt a *Canthocamptus bidens* SCHM. varietása gyanánt irtam le, de innen csak ivarérett példányaim voltak s így nem volt módomban az újguineai *Canthocamptus decoratus*-szal való azonosságot konstatálhatni. Mint azt a paraguayi példányok ismertetése során is hangsúlyoztam, e faj nagyon közel áll az európai *Canthocamptus bidens*-hez s ettől legfőképen abban különbözik, hogy első evezőlábainak mindkét ága három-izű, a mi nézetem szerint elég fontos ok a két fajnak különválasztására. Sars G. O. az *Attheyella coronata* néven leírt példányokat, a melyek teljesen azonosak a tölem vizsgált példányokkal, az *Attheyella Grandidieri* társaságában, illetőleg ugyanazon termőhelyen találta.

13. *Nitocra platypus* n. sp.

Teste hátrafelé csak igen kis mértékben vékonyodik, tiz szelvényből összetett. A törzs első szelvénye homlokán meglehetősen hegyesen kerekített, rostrumot nem alkot, csaknem oly hosszú, mint az utána következő három együttvéve, legnagyobb átmérője hosszával csaknem egyenlő, hátulsó csúcsai kihegyesedtek, épen úgy, mint az utána következő négy szelvényé is, fölülete sima, de elszórtan finom érzősórték emelkednek. A következő négy törzsszelvény csaknem egyforma hosszú, fölületük és hátulsó szegélyük sima, illetőleg nem fogazott.

A potroh első szelvénye téglaloma, hátulsó csúcsai derékszögűek, csak oly hosszú, mint az utána következő, két oldalán harántsorban 6—8 tüskeforma sörte emelkedik a hátulsó sze-

gély előtt, a mely egészen sima, illetőleg fogatlan. A második potrohszelvény keskenyebb, illetőleg rövidebb az utána következőknél, oldalcsúcsai megnyultak, hegyesek, hátulsó szegélye előtt a hasoldalon fogacskákhoz hasonló tüskék félgyűrűje emelkedik, a mely a két oldalra is kiterjed, de a hátoldalon már megszűnik. A harmadik és negyedik potrohszelvény ugyanolyan szerkezetű, mint a második, de valamivel hosszabb. Az utolsó potrohszelvény hátulsó szegélye karélyos, közepén bemetszett, apró fogacskákkal fegyverzett, a fogacskák félgyűrűt alkotnak a hasoldalon, de a két oldalon lévők erősebbek és közülök négy-négy a hátoldalra húzódott.

A hímek potrohszelvényei mindenben hasonlítanak a nőstényekéihez, de az utolsónak hasoldalán, a villafüggelékek alapjának belső zugán egy-egy halmocska emelkedik, melynek csúcsán 4-4 tüske ül, a villafüggelékek alapját pedig finom sörtécskék övezik, míg a szegélytüskék sora hiányzik.

A *villafüggelékek* mind a két ivaregyéneken egyforma szerkezetűek, megnyult négyszögletű oszlophoz hasonlítanak, csak kevésbé hosszabbak, mint a milyen szélesek, külső szegélyüknek közepe táján hosszú, finom sörté emelkedik; a csúcssörték közül a külső erősen eltávolodott a többitől, közte és az oldal, valamint a második csúcssörté között egy-egy tüske ül. A belső csúcssörté csenevész, rendesen csak oly hosszú, mint a villafüggelékek. A két középső csúcssörté jól fejlett, közülök a külső oly hosszú, mint a villafüggelékek s a két utolsó potrohszelvény együtt, a belső végre oly hosszú, mint a villafüggelék s a hat utolsó testszelvény együttvéve; mindkét középső csúcssörté gyéren fogazott. A hátoldali sörté a külső szegély közelébe húzódott. Igen jellemző a villafüggelékekre az, hogy hátoldalukon, a csúcssörték alapjától nem nagy távolságban cuticulahalom emelkedik, melynek csúcsa erősen bemélyedt, úgy hogy két zuga tüskeszerűen áll ki és közöttük egy hosszabb tüske ered.

Az *analís operculum* aránylag rövid, íves szegélyén a nőstényeknél 4, a hímeknél 5 tüske emelkedik egymástól egyenlő távolságban.

A nőstény *első csáppárja* nyolczizú, hátrafelé hajlítva nem haladja meg az első törzsszelvényt, ízei közül a harmadik

és negyedik a többinél sokkal hosszabb, az utolsó is hosszabb az öt megelőző három iznél; az érzőpálczika feltűnő hosszú, vastag és szemecskésnek látszik; a csápsörték közül leghosszabb a negyedik és hatodik izről eredő.

A him *ölelő csápjai* hét izből összetetteknek látszanak, izei közül legvastagabb a negyedik, a melyen az érzőpálczikán kívül még egy törforma, egyik szegélyén tuskézett cuticula-függelék is van; az érzőpálczika hosszú, keskeny tömlőhöz hasonlít, szemecskés, csak kevés haladja meg az utolsóelőtti izet s így aránylag rövid.

A *második csáppár* mellékága distalis csúcsán három sörtevel fegyverzett, oldalsörtéje hiányzik; a fő ág utolsó ízének külső szegélyén három kisebb és három nagyobb tüske emelkedik, melyek közül a distalis csúcs közelében ülő a leghosszabb és legerősebb.

A *mandibula* rágó fölületének fogai közül egy a többinél sokkal erősebb s a többitől erősen eltávolodott. A fogak különben kívülről befelé fokozatosan kisebbednek és gyengülnek. A palpus mandibularis kétizű, a proximalis iz végén ujjformán meghosszabbodott és két sörtét visel; a distalis iz végsúcsán három sörte van.

Az evezőlábak ágai mindannyian háromizűek. Az *első lábpár* két ága csaknem egyforma hosszú; a külső ág izei szélesebbek a belsőéinél, közülök az utolsó a többinél kevésbé hosszabb, a két első iznek külső csúcsáról egy-egy feltűnő hosszú tüske ered, a harmadik iznek külső szegélyén két s a végsúcs közelében még egy harmadik, az előbbieneknél hosszabb tüske ül, mely mellett még két görbült sörte is van; mindenik iz külső szegélyén a csúcstüske alatt 3—3 kis tüske emelkedik. A belső ág izei közül az első a többinél sokkal szélesebb, az utolsó valamennyi között a legkeskenyebb; az első iz külső szegélye apró tüskékkel borított, az utolsó iz végsúcsán különböző hosszúságú három, tollas sörte van.

A *második lábpár* külső ága sokkal hosszabb a belsőnél, utolsó íze majdnem akkora, mint a megelőző kettő együttvéve, az ízek külső szegélye ugyanúgy fegyverzett és tuskézett, mint az első lábé, de az utolsó iz belső szegélyén két hosszú tollas

sörte van. A belső ág első íze a többinél rövidebb, belső csúcsán tüskét visel; a második íz oly hosszú, mint az utolsó, belső csúcsán tollas sörte van; a harmadik íz belső szegélyén egy, végcsúcsán három egyenes, tollas sörte ered; mindenik íz külső szegélye tüskézett.

A *harmadik és negyedik lábpár* egyforma, külső águk szintén sokkal hosszabb a belsőnél. A külső ág utolsó íze egy maga oly hosszú, mint a két proximalis íz együttvéve, a belső szegélyén eredő két tollas sörte egyforma erős és hosszú, míg a negyedik lábpár megfelelő ízén a belső szegély második, a végcsúcs közelében emelkedő tollas sörtéje a másiknál sokkal vastagabb és erősebb. A belső ágnak utolsó íze mindkét lábpáron egészen egyforma szerkezetű.

Az evező lábpárok szerkezete tekintetében a him és nőstény semmiben sem különbözik egymástól.

A nőstény *ötödik lábpárjának* exopoditja széles, distalis végén kerekített lemezhez hasonlít, külső szegélyén négy rövidebb tüskével és két erősebb sörtével fegyverzett, melyek közül az alaptól legtávolabb álló tüskeszerű, fogazott és mellette egy finom sörte emelkedik; a végcsúcson egy vékonyabb síma és egy vastagabb tüskézett sörte ül, a belső szegély felé pedig öt kis tüske van. Az endopodit majdnem oly magasra emelkedik, mint az exopodit és ehhez alak tekintetében is nagyon hasonlít, kerekített végszegélyén egy erős, tüskézett középsörte és négy rövidebb, gyengébb és síma sörte, továbbá két kis tüske emelkedik; a két kis tüske és egy sörte a központi nagyobbtól kifelé, a három kis sörte ellenben befelé fekszik.

A him *ötödik lábpárjának* külső ága tojásforma lemez, külső szegélyén egy kis, a belsőn a végcsúcs közelében egy nagy, erős tüske ered, végcsúcsán egy síma, vékony és két tüskézett erős sörte ül. Az endopodit kerekített csúcsú halomhoz hasonlít, nem emelkedik oly magasra, mint az exopodit, végcsúcsán három tüskeforma, rövid és tüskézett sörte ül.

A *receptaculum seminis* körteforma, az ivarnyílások mellett csupán egy-egy kis sörte emelkedik.

A nőstény testhossza a villasörték nélkül 0.7 mm; a villasörtékkel együtt 1.1 mm; a him valamivel kisebb.

Termőhelye: *Siam*, tócsa Wat Sabatome mellett.

A genusnak eddig ismert fajaitól ötödik lábpárjának és villafüggelékeinek szerkezete alapján könnyen megkülönböztethető.

14. *Dactylopus Jugurtha* BLANCH. RICH.

Dactylopus Jugurtha BLANCHARD R. et RICHARD J. 1. p. 529. Taf. 6. fig. 26—41.

E faj édes és konyhasós vízből egyaránt ismeretes, a mennyiben BLANCHARD R. és RICHARD J. algiri konyhasós tavakból írta le először. Én Új-Guineában és Turkesztánban édesvízü tócsákban találtam meg, az előbbeni termőhelyről *Canthocamptus longirostris* (3. p. 36. fig. 15a—h.), az utóbbiról pedig *Nitocera paradoxa* néven írtam le (5a. p. 492. Taf. 27. fig. 26—40. Taf. 28. fig. 41—48.), minthogy a BLANCHARD R. és RICHARD J. dolgozata elkerülte figyelmemet, főleg azért, mert mint a czime is mutatja sós vizekben tenyésző állatkákról szólt s így nem is sejthettem, hogy azok között újguineai és turkestani édesvízi képviselők is találkozhatnak, a mire csak a *Laophonte Mohammed* esete tett figyelmessé.

A rendelkezésemre állott példányok között hímeket és nőstényt egyaránt találtam. Úgy a nősténynek, valamint a hímnek is ötödik lábpárja mindenben egyezik a BLANCHARD-RICHARD-féle algiri, illetőleg az újguineai és turkesztáni példányokéval s a hím harmadik lábpárja is egészen azonos ezekével. Itt megjegyzem azt, hogy az újguineai nősténypéldányok testizei számában mutatkozó eltérésnek oka az, hogy potrohuk két első szelvényének határa oly nagy mértékben elmosódott, hogy az, különösen a hátoldalon, észrevehető nem volt, vagy figyelmeztetést legalább is elkerülte.

Mostani vizsgálataim során a következő egyetlen termőhelyen találtam meg: *Siam*, tócsa Wat Sabatome mellett.

15. *Laophonte Mohammed Rich.*

Laophonte Mohammed RICHARD J. 1. p. 526. Pt. 6. fig. 1—15.

Egyetlen nőténypéldány állott rendelkezésemre, melynek hossza a villasörték nélkül 0.47 mm, a villasörtékkal együtt 0.76 mm.

Termőhelye: *Siam*, tócsa Wat Sabatome mellett.

E faj először algériai sóstavakból lett ismeretessé, a honnan BLANCHARD J. és RICHARD J. írta le először 1891-ben. Azóta megtalálták Európában, még pedig Németországban (SCHMEIL O.), Angolországban (SCOURFIELD D. J.; SCOTT TH.), Oroszországban (ZYKOFF); én magam *Onychocamptus heteropus* név alatt leírtam Turkesztánból és Kis-Ázsiából. (Zool. Jahrb. 19. Bd. 1903. H. 5. p. 497. Taf. 28. fig. 49—65.) A termőhelyi adatok szerint tehát e faj édes, brack- és konyhasós vízben egyaránt tenyészik s a kozmopoliták közé sorolható.

A fentebbiekben ismertetett egyetlen nőténypéldány testének általános szerkezetével, különösen pedig potrohszelvényeinek alakjával a BLANCHARD-RICHARD-féle algiriai példányokhoz hasonlít. Eltér azonban úgy az algiri, mint a turkesztáni példányoktól abban, hogy a negyedik láb endopoditjának utolsó ízén a belső szegélyen két sörte emelkedik, illetőleg az iz négy sörtével fegyverzett, továbbá az ötödik láb exopoditjának külső szegélyén nem egy, hanem két sörte ül, illetőleg az exopodit két rövidebb és két hosszabb, összesen négy sörtével fegyverzett.

Fam. CENTROPAGIDAE.

16. *Diaptomus Doriai Rich.*

Diaptomus Doriai RICHARD J. 8. p. 572. fig. 9—14.

Az orientali régióból már korábban ismert s úgy látszik, hogy itt közönséges, mert én vizsgálataim során a következő termőhelyekről származó anyagban találtam meg: *Sumatra*, kis tó Talang Bankolang mellett; tócsa Belanie mellett; karbauentócsák Belanie mellett; kis iszapos tócsa Belanie mellett; *Java*, plankton a Siteo Bagendiet tóból Garvet mellett; *Siam*,

tócsa Wat Sabatome előtt és mellett. Számos him- és nőtény-példány állott rendelkezésemre.

17. Diaptomus Visnu n. sp.

A him törzse némileg tojásforma, elöl hegyesebb, keskenyebb, mint hátul, legszélesebb közepe táján. Az első törzsszelvény oly hosszú, mint az utána következők együttvéve, az első csápok eredéspontja táján kissé bemélyedt. A következő négy törzsszelvény majdnem egyforma hosszú. Az utolsó törzsszelvény két oldalcsúcsa ki- és hátrafelé irányuló, hegyesen végződő karélyt alkot, melynek csúcsán egy-egy tüske ül. A homlokról hegyes orrmány ered.

Az *első potrohszelvény* rövidebb az utána következőnél, oldalai meglehetősen duzzadtak, jobb felől a hátoldalon egy érző sörte ered. A második és harmadik potrohszelvény hasoldala finom tüskékkel borított, a melyek az állatka oldalfekvése alkalmával tűnnek fel jól.

A *villafüggelékek* keskenyek, alig hosszabbak az utolsó potrohszelvélynél, belső szegélyük finoman sörtés.

Az *első csáp* hátrafelé hajlítva a villafüggelékek csúcsáig ér s így feltűnő hosszú.

Az *ölelő csáp* utolsóelőtti második ízének belső csúcsán gyengén görbült cuticulapálczika ered, a mely meghaladja az utolsóelőtti izet s az utolsóinak közepéig nyúlik, tehát meglehetősen hosszú. Az utolsó iz végén csupán sörték vannak.

Az *ötödik lábpár* protopoditjának összekapcsoló lemeze közepén kúpforma nyujtványban folytatódik. A jobb láb protopoditjának első ízén egy kis halmocskán pálczikaforma, erős, vastag sörte ered, a mely meghaladja a protopodit második ízének közepét. A protopodit második íze distalis felében feltűnően duzzadt és befelé álló karélyt alkot. A láb külső ágának első íze kicsiny, külső csúcsán egy kis halmocskáról erős, rövid tüske ered. A második iz feltűnő hosszú, gyengén görbült, proximalis negyedében a belső szegélyen négy kis tüske van, belső szegélyének közepéről befelé irányuló, gyengén görbült cuticulapálczika ered; a csúcskarom alapján belül egy kis tüske

ül; a külső szegélysörte hiányzik. A csúcskarom erős, sarlóforma, majdnem oly hosszú, mint a protopodit második íze s a két ágiz együttvéve. A láb belső ága széles alappal bíró kúphoz hasonlít, csúcsán egy túske ül, a külső ág második ízének félhosszát meghaladja, feltűnővé teszi szembeszökő vastagsága. A bal láb protopoditjának első ízén kis kiemelkedésről hosszú sörte ered; a második íz belső szegélyén kis kúpforma és egy keskeny karélyforma cuticulakiemelkedés van. Az exopodit kétizű, első íze oszlopforma, a második némileg körteforma, belső szegélyének közepéről vékony túskenyujtvány ered. Az endopodit hengeres, egyizű, oly hosszú, mint az exopodit első íze, belső szegélyén, a csúcs közelében kis túske van.

Csupán két hím példány állott rendelkezésemre, melyeknek egész hossza 1·5 mm.

Termőhelye: *Singapore*, plankton a Waterworksból.

E faj a *Diaptomus bacillifer* alakkörébe tartozik, de ötödik lábpárjának szerkezete alapján a rokonfajoktól könnyen megkülönböztethető.

A megfigyelt fajok zoogeographiai méltatása.

Mindannak daczára, hogy az orientali regio Copepoda-faunájára vonatkozó jelenlegi ismereteink mellett, a felsorolt fajok elterjedését illetőleg, végérvényes ítéletet mondani nem lehet, mégis, az eddig napvilágot látott adatokra támaszkodva, az alábbiakban megkísérlem a megfigyelt fajok elterjedési viszonyainak méltatását.

Mindenekelőtt kétségtelen az, hogy a megfigyelt fajok zoogeographiai elterjedésük tekintetéből több csoportra oszthatók, s nevezetesen vannak közöttük olyanok, a melyek majdnem valamennyi zoogeographiai régióból ismeretesek, és vannak olyanok, a melyek az orientali región kívül még eddig csupán egy-két másiktól, vagy pedig csupán az orientali régióból is ismeretesek.

Az első csoportba, vagyis a több zoogeographiai régióból ismert fajok csoportjába a következők tartoznak:

<i>Cyclops fimbriatus</i> FISCH.	<i>Cyclops oithonoides</i> SARS.
" <i>phaleratus</i> C. K.	" <i>albidus</i> (JUR.)
" <i>bicolor</i> SARS.	<i>Attheyella Grandidieri</i> (GUERN. RICH.).
" <i>serrulatus</i> FISCH.	" <i>decorata</i> (DAD.).
" <i>prasinus</i> FISCH.	<i>Dactylopus Jugurtha</i> BL. et RICH.
" <i>Leuckarti</i> CLS.	<i>Laophonte Mohammed</i> BL. et RICH.

E fajok közül kiválóbb figyelmet csupán a *Harpacticidae*-család képviselői érdemelnek. Így az *Attheyella Grandidieri* (GUERN. RICH.) faj az orientali régió kívül ismeretes még az ausztráliaiból (Uj-Guinea), az aethiopiaiból (Madagascar), a neotropiából (Paraguay), továbbá a Hawaii szigetsoportról. Az *Attheyella decorata* (DAD.) faj az orientali régió kívül ismeretes még az ausztráliaiból (Uj-Guinea és a Hawaii szigetsoport), továbbá a neotropi régióból (Paraguay). A *Dactylopus Jugurtha* BL. et RICH. fajt az orientali régió kívül feljegyezték még a palæarktiból (Algier, Turkesztán) s az ausztráliaiból (Uj-Guinea), míg a *Laophonte Mohammed* BL. RICH. fajt az orientali régió kívül még csupán a palæarktiból (Algier, Turkesztán, Kis-Ázsia, Anglia, Németország, Oroszország).

Külön érdemel említést a *Cyclops anceps* RICH. faj, a mennyiben ez az orientali régió kívül még csupán a neotropiából (Argentína, Paraguay) ismeretes.

Végre a fajok között van pár olyan is, a mely ez idő szerint még csupán az orientali régióból ismeretes, névszerint: *Cyclops aspericornis* n. sp., *Nitocra platypus* n. sp., *Diaptomus Doriai* RICH. és *Diaptomus Vismu* n. sp.

Az idézett irodalom.

1. BLANCHARD R. et RICHARD J.: Faune de lacs salés de Algérie. — Mém. Soc. Zool. de France. Tom. 4. 1891. p. 512. Pl. 6.
- 1a. BRADY G. ST.: Notes on Entomostraca collected by M. A. Haly in Ceylon. — Journ. of Linn. Soc. Zool. Vol. 19. 1886. p. 293. Pl. 37—40.
2. DADAY E. v.: Mikroskopische Süßwasserthiere aus Ceylon. 1898.
3. DADAY E. v.: Mikroskopische Süßwasserthiere aus Deutsch-Neu-Guinea. — Termrajz. füz. Bd. 24. 1901. Taf. 1—3. Textfig. 1—26.
4. DADAY E. v.: Mikroskopische Süßwasserthiere. — Dritte asiatische Forschungsreise des Grafen Eugen Zichy. Bd. 2. 1901. p. 377. Taf. 14—28.

5. DADAY E. v.: Untersuchungen über die Mikrofauna Paraguays. — Zoologica. Heft 44. 1905. Taf. 1—23.

5a. DADAY E. v.: Mikroskopische Süsswasserthiere aus Turkestan. Zool. Jahrb. Bd. 19. Heft 5. 1903. p. 469. Taf. 27—30.

5b. GUERNE J. DE et RICHARD J.: Nouveaux Entomostracés d'eau douce de Madagascar. — Mém. Soc. Zool. de France. Tom. 6. p. 214. 1893.

6. POPPE S. A. und MRAZEK AL.: Entomostraken des naturhistorischen Museums in Hamburg. — Beiheft zum Jahrb. der Hamb. wiss. Anstalten. Taf. 12. 1895.

7. RICHARD J.: Entomostracés d'eau douce de Sumatra et de Célebes. Zool. Ergebnisse einer Reise in niederländ. Ost-Indien von Dr. M. Weber. Bd. 2. 1891. p. 118. Taf. 10. fig. 1—5.

8. RICHARD J.: Entomostracés recueilles p. M. E. Modigliani dans le lac Toba (Sumatra). — Annali del Museo Civico di Storia Naturali di Genova. Ser. 2. Vol. 19. 1894. p. 565. fig. 14.

9. RICHARD J.: Sur quelques animaux inférieurs des eaux douces du Tonkin. — Mém. Soc. Zool. de France. Tom. 7. p. 237. 1894.

10. RICHARD J.: Entomostracés de l'Amérique du Sud. — Ibid. Tom. 10. 1897. p. 263.

11. SARS G. O.: Fresh-water Entomostraca from China and Sumatra. — Arch. for Math. og Naturw. Bd. 25. Nr. 8. 1903. Taf. 1—4.

11a. SARS G. O.: Pacifiche Plankton-Crustaceen. — Zool. Jahrb. Bd. 19. Heft 5. 1903. p. 629.

12. SCHMEIL O.: Deutschlands freilebende Süsswasser-Copepoden. Cyclopida, Harpacticida, Centropagida. — Zoologica. Heft 11., 15., 21. 1892—1898.

12a. STINGELIN TH.: Beitrag zur Kenntniss der Süsswasserfauna von Celebes. — Revue Suisse de Zoologie etc. Tom. 8. Fasc. 2. 1900. p. 193.

13. WIERZEJSKI A.: Skorupiaki i wrotki (Rotatoria) stodkowodne zebranew Argentynie. — Rozpraw. Wydz. math. przyrod. Akad. Uniej w Krakowie. T. 24. p. 229. Taf. 5—7.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 január 22.-én tartott üléséből.)

STATIONARIUS SIMULÓSÍKOK.

RADOS GUSZTÁV I. tagtól.

Ismeretes, hogy a térbeli görbék viselkedése simulósíkjaikkal szemben épen az ellenkezője annak, a minőt sík görbék tanúsítanak érintőikkel szemben. A míg ugyanis valamely sík görbe az érintés pontjának környezetében általánosságban érintőjének ugyanazon oldalán marad és csak kivételes pontokban, az inflexiós pontokban, megy át az érintő egyik oldaláról a másik oldalára, a midőn tehát a görbe az érintés pontjában az érintőt egyszersmind átmetszi: addig térbeli görbe közönséges pontjában az ehhez tartozó simulósíkot mindig átmetszi s kivételeseknek kell tekintenünk a térbeli görbe ama pontjait, a melyeknek környezetében a térbeli görbe a simulósík egy-ugyanazon oldalán marad. A térbeli görbék e kivételes pontjaihoz tartozó simulósíkok azok, melyeket stationarius vagy forduló simulósíkoknak (Wendeberührungsebene) nevezünk.

Az inflexiós érintők kérdését a sík görbék elméletéből jól ismert tételek segítségével intézhetjük el. Ha ugyanis

$$y = f(x)$$

a sík görbe egyenlete, akkor inflexiós érintő oly x helyekhez és csak olyanokhoz tartozik, a melyeken $f(x)$ -nek második differenciálhányadosa zérussal egyenlő és az első utána következő el nem tűnő differenciálhányados rendszáma páratlan. E tétel az inflexiós pontokat nemcsak felismerhetővé teszi, hanem egyszersmind kész módszerrel is szolgál ezeknek meghatározására.

Önként merül fel a kérdés, hogy nem állítható-e fel a térbeli görbék stationarius simulósíkjaira vonatkozó hasonló

tétel, a mely a stationarius simulósíkoknak mint ilyeneknek felismerését lehetővé teszi és egyszersmind módot nyújt azoknak a meghatározására. Hogy ez valóban lehetséges, ezt kimutatni lesz jelen cikkemnek feladata.

Legyen

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

a szóban forgó térbeli görbe parameteres egyenletrendszere, a melyben szereplő koordinata-függvényekről felteszszük, hogy magasabbrendű differenciálhányadosaik, kivételes helyektől eltekintve, elegendő magas rendszámig előállíthatók. Használjuk továbbá nagyobb rövidség kedvéért a következő jelöléseket:

$$\frac{d^a x}{dt^a} = x^{(a)}, \quad \frac{d^a y}{dt^a} = y^{(a)}, \quad \frac{d^a z}{dt^a} = z^{(a)};$$

$$(a=0, 1, 2, 3, \dots)$$

továbbá

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \Delta(t) = (123)$$

és általánosságban

$$\begin{vmatrix} x^{(\alpha)} & y^{(\alpha)} & z_{(\alpha)} \\ x^{(\beta)} & y^{(\beta)} & z_{(\beta)} \\ x^{(\gamma)} & y^{(\gamma)} & z_{(\gamma)} \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma), \quad (1)$$

akkor a stationarius síkokra vonatkozó tételünk a következőképpen fogalmazható:

Arra, hogy a térbeli görbe bizonyos t parameter-értéknek megfelelő pontjához stationarius simulósík tartozzék, szükséges és elegendő, hogy $\Delta(t)$ -nek első e t parameter-érték meghatározta helyen el nem tűnő differenciálhányadosa páratlan rendű legyen.¹

Ha ez első el nem tűnő differenciálhányados rendszáma páros, akkor a t parameter-értéknek a térbeli görbe rendes pontja felel meg, a melyben a térbeli görbe e pontjához tartozó simulósíkját átmetszi.

¹ A kézi könyvek a szükséges feltételek közül csak a $\Delta(t)=0$ feltételt említik, a mely magában véve általánosságban még nem elegendő a stationarius sík bekövetkezésére.

Az itt fogalmazott tétel bebizonyítását egy segédtételek többszörös alkalmazása alapján adom, melyet — ismétlések elkerülése végett — ide, a tárgyalások elejére helyezek. Ha a térbeli görbének nem singularis, azaz oly pontjáról van szó, a melyben annak meghatározott simulósíkja van, akkor e pontra nézve az

$$A=y'z''-y''z', \quad B=z'x''-z''x', \quad C=x'y''-x''y'$$

kifejezések közül legalább egyiknek értéke különbözik a zérustól. A következő vizsgálódásaink kizárólagosan csakis ilyen nem singularis pontokra vonatkoznak. E megállapítások mellett a következő egyszerű tétel állapítható meg:

Segéd-tétel. Arra, hogy az

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' & \dots & x^{(\alpha)} & \dots & x^{(\beta)} & \dots & x^{(\gamma)} & \dots & x^{(p)} \\ y' & y'' & y''' & \dots & y^{(\alpha)} & \dots & y^{(\beta)} & \dots & y^{(\gamma)} & \dots & y^{(p)} \\ z' & z'' & z''' & \dots & z^{(\alpha)} & \dots & z^{(\beta)} & \dots & z^{(\gamma)} & \dots & z^{(p)} \end{vmatrix}$$

matrixból alakítható harmadfokú determinánsok mindannyian eltűnjenek, szükséges és elegendő, hogy

$$\begin{aligned} (123)=0, (124)=0, \dots, (12\alpha)=0, \dots, (12\beta)=0, \dots, \\ (12\gamma)=0, \dots, (12p)=0 \end{aligned} \quad (2)$$

legyen.

Világos, hogy e feltételnek csak elegendő voltát kell bebizonyítanunk. Írjuk ki e czélból az

$$(12\alpha)=0, \quad (12\beta)=0, \quad (12\gamma)=0$$

egyenleteket részletesen, akkor az

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)} A + y^{(\alpha)} B + z^{(\alpha)} C &= 0 \\ x^{(\beta)} A + y^{(\beta)} B + z^{(\beta)} C &= 0 \\ x^{(\gamma)} A + y^{(\gamma)} B + z^{(\gamma)} C &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineár egyenletrendszer adódik, melyben az A , B , C kifejezéseket tekintjük ismeretleneknek, ezek közül — feltevésünk szerint — legalább egy van, mely nem zérus; de akkor ismeretes tétel értelmében kell, hogy a homogén lineár egyenletrendszer determinánsa zérussal legyen egyenlő. Ez a deter-

mináns azonban az (1) alatti jelöléseink értelmében $(\alpha\beta\gamma)$, és így csakugyan a (2) feltételekből az

$$(\alpha\beta\gamma) = 0 \\ (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \dots, p)$$

egyenlőségek következnek, a mivel a felállított segédétel helyesége evidenciába lép.

Áttérve a fent kimondott tételeknek bebizonyítására, jegyezzük ide a térbeli görbe tetszésszerűen nem singuláris P pontjához tartozó simulósikjának egyenletét. Ez a következő:

$$\begin{vmatrix} \xi - f_1(t) & \eta - f_2(t) & \zeta - f_3(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & f'_3(t) \\ f''_1(t) & f''_2(t) & f''_3(t) \end{vmatrix} = 0.$$

A térbeli görbe P pontjának környezetében fekvő és az

$$x = f_1(t+h), \quad y = f_2(t+h), \quad z = f_3(t+h)$$

koordináták meghatározta pontjai mindannyian a simulósik ugyanazon oldalára esnek, ha a

$$\Phi(h) = \begin{vmatrix} f_1(t+h) - f_1(t) & f_2(t+h) - f_2(t) & f_3(t+h) - f_3(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & f'_3(t) \\ f''_1(t) & f''_2(t) & f''_3(t) \end{vmatrix}$$

kifejezés előjele függetlenül a h előjelétől állandó; ebben az esetben tehát a P pont simulósikja stationarius. Ha ellenben

$$\text{sgn. } \Phi(h) = \text{sgn. } h,$$

akkor P a görbének rendes pontja és ez a P -hez tartozó simulósikját P -ben átmetszi.

A további vizsgálat tehát a $\Phi(h)$ függvény előjelbeli viszonyainak elemzésére utal. Ezért fejtsük ki $\Phi(h)$ -t h növekedő hatványai szerint. Ezt a kifejtést a h elég magas hatványáig fejlesztvén, az (1) alatti rövidített jelölés felhasználásával így írhatjuk:

$$\begin{aligned} \Phi(h) = (123) \frac{h^3}{3!} + (124) \frac{h^4}{4!} + \dots + (12 \overline{k+3}) \frac{h^{k+3}}{(k+3)!} + \\ + (12 \overline{k+4}) \frac{h^{k+4}}{(k+4)!} + \dots \end{aligned}$$

Ha most már

$$(123)=0, (124)=0, \dots, (12 \overline{k+2})=0, (12 \overline{k+3}) \geq 0, \quad (I)$$

akkor

$$\phi(h) = \frac{h^{k+3}}{(k+3)!} [(12 \overline{k+3}) + \varepsilon],$$

a hol

$$\lim_{h=0} \varepsilon = 0;$$

és így világos, hogy páratlan k esetében

$$\text{sgn. } \phi(h) = \text{sgn. } (12 \overline{k+3}),$$

tehát $\phi(h)$ előjele a h -étől független és ennek következtében a P pont simulósíkja stationarius; ellenben páros k esetében

$$\text{sgn. } \phi(k) = \text{sgn. } h$$

és ennek következtében a P ponthoz rendes simulósík tartozik, a melyet tehát a térbeli görbe P -ben átmetsz.

Hogy tételeink teljesen be legyenek bizonyítva, ki kell most mutatnunk, hogy a

$$\Delta(t)=0, \Delta'(t)=0, \dots, \Delta^{(k-1)}(t)=0, \Delta^{(k)}(t) \geq 0 \quad (II)$$

feltételsorozat, a melyben

$$\Delta^{(\alpha)}(t) = \frac{d^\alpha \Delta(t)}{dt^\alpha}$$

($\alpha=1, 2, 3, \dots$)

egyenlő értékű az (I) feltételsorozattal.

Mutassuk ki először, hogy az (I) feltételsorozat teljesülése maga után vonja azt, hogy az összes (II) feltételek is teljesülnek. A (II) alatti feltételek a $\Delta(t)$ determináns magasabbrendű differenciálhányadosaira vonatkoznak. E magasabbrendű differenciálhányadosok alakítása a determinánselmélet ismeretes szabályai szerint történik és a következő kifejezéseket szolgáltatja:

$$\begin{aligned} \Delta'(t) &= (124) \\ \Delta''(t) &= (125) + (134) \\ \Delta'''(t) &= (126) + 2(135) + (234) \\ \Delta^{IV}(t) &= (127) + 3(136) + 2(145) + 3(235) \\ \Delta^V(t) &= (128) + 4(137) + 5(146) + 6(236) + 5(245) \\ &\dots \end{aligned}$$

E kifejezésekben megnyilvánuló törvényszerűségből további következtetéseink céljaira elegendő annyit felhasználnunk, a mennyit a

$$\Delta^{(g)}(t) = (12 \overline{g+3}) + \Sigma (\alpha\beta\gamma) \quad (3)$$

$(g=1, 2, 3, \dots)$

képletben összefoglalunk, a melyben az összeg jele alatt

$$\alpha < g+3, \quad \beta < g+3, \quad \gamma < g+3.$$

Ha most már az (I) feltételsorozat teljesül, akkor mivel

$$(123)=0, (124)=0, \dots, (12 \overline{k+2})=0,$$

az előrebocsátott segédételünk értelmében

$$(\alpha\beta\gamma) = 0,$$

$(\alpha, \beta, \gamma=1, 2, \dots, k+2)$

de akkor a (3) alatti képlet értelmében

$$\Delta(t)=0, \Delta'(t)=0, \dots, \Delta^{(k-1)}(t)=0$$

és ugyanezen képlet következtében

$$\Delta^{(k)}(t) = (12 \overline{k+3}),$$

és mivel a (I) feltételek közül az utolsó szerint $(12 \overline{k+3}) \geq 0$, azért tehát $\Delta^{(k)}(t)$ is különbözik a zérustól, a mivel állításunk teljesen ki van mutatva.

Hátra van még, hogy az előbbi állítás megfordítását kimutassuk, azaz hogy a (II) sorozat feltételei az (I) relatiókat mint következményeket vonják maguk után. E célra a teljes inductió módszerét használjuk. Tegyük fel, hogy a

$$\Delta(t)=0, \Delta'(t)=0, \dots, \Delta^{(k-2)}(t)=0 \quad (\text{II}^*)$$

egyenletek maguk után vonják az

$$(123)=0, (124)=0, \dots, (12 \overline{k+1})=0 \quad (\text{I}^*)$$

egyenleteket, akkor könnyű szerrel bebizonyíthatjuk, hogy a

$$\Delta(t)=0, \Delta'(t)=0, \dots, \Delta^{(k-1)}(t)=0, \Delta^k(t)=0 \quad (\text{II}^{**})$$

egyenleteknek az

$$(123)=0, (124)=0, \dots, (12 \overline{k+1})=0, (12 \overline{k+2})=0 \quad (\text{I}^{**})$$

egyenletek a következményei. Ha ugyanis az előrebocsátott segéd-tételt az (I*) sorozatra alkalmazzuk, akkor az

$$(a\beta\gamma) = 0 \\ (a, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \dots, k+1)$$

relatiók állanak fenn, de akkor a (3) alatti képlet értelmében

$$\Delta^{(k)}(t) = (12 \overline{k+3}) \quad (4)$$

és így ha a (II**) feltételek mind teljesülnek, (4) alapján a $\Delta^{(k)}(t)=0$ egyenletből az $(12 \overline{k+3})=0$ egyenlet következén, az (I**) alatti egyenletek fennállása következik. Mivel pedig állításunk helyessége a $k=1, 2$ esetekben evidens, annak helyessége most már mindenesetre ki van mutatva.

Az eddigiekben kimutattuk, hogy a (II) sorozat első k feltétele maga után vonja a (I) sorozat első k feltételét. Még ki kell mutatnunk, hogy az utolsó (II) alatti feltétel, a

$$\Delta^{(k)}(t) \geq 0 \quad (5)$$

feltétel maga után vonja (I) utolsó feltételét, az

$$(12 \overline{k+3}) \geq 0 \quad (6)$$

feltételt. De ez most már egyszerűen úgy történik, hogy a már helyesnek bebizonyított

$$(123)=0, (124)=0, \dots, (12 \overline{k+2})=0$$

egyenlőségek sorozatára ismét alkalmazzuk segéd-tételünket. Ez az

$$(a\beta\gamma) = 0 \\ a, \beta, \gamma = (1, 2, \dots, k+2)$$

egyenlőségeket adja, de akkor ismét a (3) alatti képlet-nél fogva

$$\Delta^{(k)}(t) = (12 \overline{k+3})$$

és így csakugyan (5) maga után vonja (6)-ot.

De ezzel az (I) és (II) feltételsorozatok egyenlőértékűsége és ezzel együtt a bevezetésben kimondott két tételünknek helyessége is teljesen be van bizonyítva.

Még ki akarom emelni, hogy fejtegetéseink legvilágosabban mutatják, hogy a térbeli görbék elméletében szereplő sta-

tionarius sík a sík görbék elméletében előforduló inflexiós érintő általánosításának tekintendő, bár geometriai viselkedése tekintetében homlokegyenest ellenkező tulajdonságot mutat. Ugyanis könnyen kimutathatjuk, hogy az inflexiós érintő feltételei a (II) alatti feltételek alakjára hozhatók. Ha

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t)$$

a sík görbe parameteres egyenletrendszere, akkor a jelen dolgozatban használt módszer alkalmazása mutatja, hogy az inflexiós érintőkre vonatkozó következő tétel érvényes:

Arra, hogy a sík görbe bizonyos a t parameter-értékhez tartozó pontja inflexiós pont legyen, szükséges és elegendő, hogy a

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$$

kifejezésnek az illető t helyen az első el nem tűnő differenciálhányadosa páratlan rendű legyen.

Ez a tétel pedig az inflexiós érintő és a stationarius sík feltételeinek teljes formai megegyezését mutatja.

Egyébként úgy az érintőre, mint a stationarius síkra vonatkozó tételek sokkal általánosabb tételeknek speciális esetei, a melyek a jelen dolgozatban alkalmazott módszerek változatlan felhasználásával felállíthatók és bebizonyíthatók.

Ha az

$$x_1=f_1(t), \quad x_2=f_2(t), \dots, x_n=f_n(t)$$

az n -méretű tér valamely görbéjének parameteres egyenletrendszere és e görbe $n+1$ pontján át $(n-1)$ méretű lineár sokaságot átfektetünk, akkor ennek az $n+1$ pontnak a határátmenet alkalmával egy P pontban való összeejtésekor e lineár sokaságnak is általánosságban bizonyos lineár határsokaság fog megfelelni, a melyet a

$$\begin{vmatrix} \xi_1-f_1(t) & \xi_2-f_2(t) & \xi_n-f_n(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & f'_n(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(n-1)}_1(t) & f^{(n-1)}_2(t) & f^{(n-1)}_n(t) \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet határoz meg és a melyet simulósokaságnak nevezünk. Igen egyszerű megfontolások mutatják, hogy e simulósokaság viselkedése az alapul fektetett tér méretétől függ.

Ha a tér páros méretű, akkor a görbe a simulósokaságot a P pontban általánosságban nem metszi, ellenben páratlan méretű tér esetében a görbe P -ben a simulósokaságot általánosságban átmetszi.

Ha páros méretű tér esetében a görbét átmetsző simulósokaságokat, páratlan méretű tér esetében pedig a görbét át nem metsző simulósokaságokat *stationariusoknak* nevezzük, ha továbbá az

$$\begin{aligned} & |x_i^{(j)}| \\ & (i, j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

determinánst ismét $\Delta(t)$ -vel jelöljük, akkor a stationarius simulósokaságokra vonatkozólag megint a következő tétel érvényes:

Arra, hogy a t parameter-értéknek megfelelő P ponthoz tartozó simulósokaság stationarius legyen, szükséges és elegendő, hogy a $\Delta(t)$ -nek legelső a t helyen el nem tűnő differenciálhányadosa páratlan rendű legyen.

E tétel bebizonyítása teljesen azon a módon történhetik, a melylyel ezt az $n=3$ esetben kimutattuk, úgy hogy ezek után világos, hogy az előbb felsorolt tételek mint speciális esetek ez alá foglalhatók.

A FOURIER-FÉLE SORRÓL.

FEJÉR LIPÓT-tól.

(Első közlemény.)

Legyen $f(x)$ az x valós változónak olyan függvénye, mely a zérustól 2π -ig terjedő számközre integrálható és a mely abszolút értékére nézve e számközön belül véges felső határ alatt marad.

Legyen x a szóban forgó számköz valamely helye, a hol $f(x)$ folytonos, és jelöljék

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \quad (1)$$

az $f(x)$ -hez tartozó FOURIER-féle sor részletösszegeit. Ismeretes, hogy általában az (1) sorozat széttartó. Példát adtak erre P. DU BOIS-REYMOND,¹ H. A. SCHWARZ,² újabban E. W. HOBSON³ és H. LEBESGUE.⁴ Doktori értekezésemben⁵ kimutattam, hogy az (1) alatti sorozattól áttérve az

$$s_0, \frac{s_0+s_1}{2}, \dots, \frac{s_0+s_1+\dots+s_n}{n+1}, \dots$$

számtani középértékek sorozatára, egy összetartó sorozathoz jutunk, mely az x folytonossági helyen $f(x)$ -et szolgáltatja

¹ Abhandlungen der bayerischen Akademie. XII. kötet.

² SACHSE-féle dissertatio: Schlömilch's Zeitschrift. Supplement. XXV. kötet.

³ Proceedings of the London mathematical society, second series. 3. kötet, 1905.

⁴ Comptes rendus, CXLI. kötet, 1905. 27. Novembre.

⁵ L. pl. Math. Annalen, 58. kötetének 59. lapján: Hauptsatz stb.

határérték gyanánt. Ha azonban ragaszkodni akarunk magához az (1) sorozathoz, akkor önként merül fel a következő kérdés:

Lehet-e az (1) sorozatból kiragadni az

$$s_{i_0}, s_{i_1}, \dots, s_{i_n}, \dots \quad (2)$$

részletösszegek sorozatát úgy, hogy a (2) sorozat a határozott x folytonossági helyen összetartó legyen és $f(x)$ -et szolgáltatssa határérték gyanánt?

Vagy, a mint HOBSON veti fel a kérdést:

Lehet-e egymásután következő tagcsoportok összevonásával elérni azt, hogy az x folytonossági helyhez tartozó FOURIER-féle sor összetartó, és összege $f(x)$ legyen?

A felelet, mely kétségtelenül bizonyos betekintést ad a FOURIER-féle részletösszegeknek az $f(x)$ függvényértékhez való elhelyezettségére nézve, igenlő.

A következő sorokban a most kimondott tételnek egyszerű bizonyítását adom. Az aritmetikai középértékeknek előbb említett tulajdonságaiból úgyszólván közvetlenül következik.¹

E bebizonyítást az 1903. év elején a göttingai «Mathematische Gesellschaft» több tagjával közöltem.

A föltevés szerint az (1) sorozat széttartó. Jelöljük A -val az (1) sorozat alsó ingadozási határát, és F -vel annak felső ingadozási határát. [A következő négy eset lehetséges: vagy A és F mindkettő véges, vagy $A = -\infty$ és F véges, vagy A véges és $F = +\infty$, vagy végre $A = -\infty$ és $F = +\infty$. A következő fejtegetések a fől sorolt esetek bármelyikére érvényesek.]

Most már legelőbb is azt állítjuk, hogy az

$$s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$$

értékeknek az (A, F) számközön belül eső tagjai ezt mindenütt sűrűen lepik el. Legyen ugyanis (p, q) az (A, F) számköz egy

¹ HOBSON érdekes dolgozatában a bizonyításnál egy HURWITZTÓL eredő relációt vesz igénybe, melyet azonban HURWITZ épen doktori értekezésém idézett tétele alapján bizonyít be. (L. Math. Annalen, Vol. 57, 431. stb. oldal.) HOBSON tehát a szövegben foglaltakhoz képest kerülő úton jut célhoz. A tételt előbb említett dolgozatában H. LEBESGUE is kimondja.

tetszőleges (és nevezetesen tetszőleges kicsiny) subintervalluma, úgy hogy

$$A < p < q < F.$$

Jelölje ε a (p, q) számköz $(q-p)$ hosszúságát. Minthogy a FOURIER-féle sor esetében egy jól ismert RIEMANN-féle tétel szerint

$$\lim_{n=\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a) \cos n(a-x) da = 0,$$

tehát, ha csak n nagyobb egy bizonyos ν egész számnál, két egymásra következő s -nek kölcsönös távolsága mindenestre kisebb $\frac{\varepsilon}{2}$ -nél. De az ingadozási határok értelmezésénél fogva mindenestre található két egészszámú érték N_1 és N_2 úgy, hogy

$$s_{N_1} < p < q < s_{N_2},$$

hol

$$\nu < N_1 < N_2.$$

Ha tehát ehhez hozzávesszük, hogy az

$$s_{N_1}, s_{N_1+1}, \dots, s_{N_2}$$

értékek között bármilyen két egymásra következőnek egymástól való távolsága kisebb mint $\frac{\varepsilon}{2}$, akkor tüstént világos, hogy mindenestre van az N_1, N_2 számok között legalább egy olyan N szám, melyre nézve

$$p < s_N < q.$$

Ezzel kimutattuk, hogy az (1) sorozatnak az (A, F) számközbe eső tagjai ezen számközt mindenütt sűrűen töltik be.

De továbbá azt állítjuk, hogy

$$A \leq f(x) \leq F.$$

Minthogy ugyanis A és F jelölik az (1) számsorozat alsó és felső ingadozási határát, következik, hogy az

$$s_0, \frac{s_0 + s_1}{2}, \dots, \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}, \dots \quad (3)$$

sorozat határértéke nem eshetik ki az (A, F) számközből. Erről egy teljesen elemi meggondolás győzhet meg bennünket, melyet azonban itt nem közlünk. Ámde a (3) alatti számtani közép-értékek határértéke éppen $f(x)$. Tehát a fenti egyenlőtlenségben foglalt állítás is ki van mutatva.

Vége minthogy az (1) sorozatnak az (A, F) számközbe eső tagjai ezen számközt mindenütt sűrűen lelik el, és mint-hogy $f(x)$ is ezen számközben (vagy annak egyik határpontjában) van, tehát az (1) sorozatból mindenestre kiválasztható (és pedig végtelensokféleképen) egy

$$s_{i_0}, s_{i_1}, \dots, s_{i_n}, \dots$$

sorozat, mely $f(x)$ -hez konvergál mint határértékhez. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

HOBSON megjegyzi, hogy azon pontok összessége, melyekre nézve a szóban forgó tagösszevonás nem lehetséges, olyan lineár pontthalmazt alkot, melynek mértéke (measure) egyenlő zérussal. Ez természetes, mert valamely véges és integrálható függvény szakadási helyeinek összessége egy zérus mértékű pontsokaságot alkot.¹

Az előzőekben föltettük, hogy $f(x)$ a $(0, 2\pi)$ számközben abszolút értékére nézve egy véges felső határ alatt marad. Tegyük fel most, hogy $f(x)$ az intervallum bizonyos helyein (melyek véges számban vannak) *végtelenné* válik. Ekkor, mint ismeretes, a FOURIER-féle sor az x folytonossági helyen divergens lehet még akkor is, ha ott pl. a DIRICHLET-féle föltételnek eleget tesz. Ezt a jelenséget mutatja a RIEMANN-féle² példa:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left(x^\nu \cos \frac{1}{x} \right), \quad 0 < x \leq 2\pi$$

$$0 < \nu < \frac{1}{2}.$$

Ilyen esetekben a FOURIER-féle sor széttartását nem az $f(x)$ -nek az x folytonossági helyen való különös viselkedése

¹ L. LEBESGUE: Leçons sur l'intégration, p. 29.

² Gesammelte Werke, 1876. 246. oldal.

okozza, hanem éppen azon körülmény, hogy $f(x)$ a $(0, 2\pi)$ intervallum valamely helyén (a RIEMANN-féle példában az $x=0$ helyen) a RIEMANN-féle példa által jellemzett típus szerint végtelenné válik.

Doktori értekezésemben kimutattam, hogy ilyen esetben is a számtani középértékeknek sorozata minden folytonossági helyen összetartó és $f(x)$ -hez konvergál mint határértékhez. (A RIEMANN-féle példa esetében tehát a (3) alatti sorozat az $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ helyek kivételével mindenütt összetartó, és $\frac{d}{dx} \left(x^v \cos \frac{1}{x} \right)$ határértékkel bír.)

Kérdem azonban, lehet-e most is mindig kiválasztani az (1) sorozatból egy

$$s_{i_0}, \dots, s_{i_n}, \dots$$

sorozatot, mely összetartó és $f(x)$ -et szolgáltatja határérték gyanánt az x folytonossági helyen?

Erre az eddigi módszerek nem adnak fölvilágosítást. A -val és F -fel jelölve megint az (1) sorozat alsó és felső ingadozási határát, ugyan most is igaz, hogy

$$A \leq f(x) \leq F,$$

vagyis a FOURIER-féle részletösszegek végtelenné váló függvény esetében is $f(x)$ körül ingadoznak (ezt a számtani középértékek tétele erre az esetre is kiadja), de a

$$\lim. (s_n - s_{n-1}) = 0$$

tulajdonság már nem áll fenn szükségképen. A RIEMANN-féle példa esetében, a mint azt RIEMANN kimutatja, az

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a) \cos n(a-x) da \sim \\ &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin \left(2\sqrt{n} - nx + \frac{\pi}{4} \right) n^{\frac{1-2v}{4}} \end{aligned}$$

asymptotikus egyenlőség érvényes, a melyből látszik, hogy a RIEMANN-féle példa esetében két, egymásra következő FOURIER-

féle részletösszegnek kölcsönös távolsága abszolút értékben tetszőleges nagy is lehet.

E szerint, míg az bizonyos, hogy a számtani középkepezés művelete ezen nagy ingadozásokat is fölemésztí, addig még bizonytalannak kell tartanunk azt a lehetőséget, hogy alkalmas tagösszevonással végtelenné váló függvény FOURIER-féle sorát is tudjuk összetartóvá tenni minden x folytonossági helyen, és pedig olyan módon, hogy $f'(x)$ -et kapjuk összegképen.

Az előzőkben kizárólag azon helyekkel foglalkoztunk, a hol $f(x)$ folytonos. Természetesen ugyanazon eredményeket kapjuk mindazon x helyekre nézve, a hol a függvénynek elsőfajú szakadása van.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 február 19.-én tartott üléséből.)

BUDAPEST PANNONIAI- ÉS LEVANTEI-KORÚ RÉTEGEI ÉS EZEK FAUNÁJA.

LÖRENTHEY IMRE 1. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

A magy. tud. Akadémia tavalyi közgyűlése tudományos munkálkodásomat azzal volt szives megjutalmazni, hogy levelező tagjai sorába választott. Midőn most e megtisztelő kitüntetésért e helyen is forró köszönetet mondok, alapszabályaink értelmében reám ruházott kedves kötelességemnek akarok eleget tenni azzal, hogy a fönti cím alatt székfoglalómat a tek. III. osztálynak itt bemutatom.

1890-ben jelent meg az első e tárgykörbeli dolgozatom, melyet azóta egész sora követett a pannoniai képződményeket és ezek faunáját tárgyaló értekezéseimnek.

A legújabbban, 1905-ben megjelent *«Adatok a balaton-melléki pannoniai korú rétegek faunájához és sztratigrafiai helyzetéhez»*¹ című munkámban 31 lelethely 69 rétegének faunáját ismertetem meg s egyúttal megállapítom a magyarországi pannoniai képződményeknek sztratigrafiáját.

A pannoniai képződményeknek a Balaton mellékén megállapított szintezését megerősítik s részben kiegészítik az itt tárgyalandó képződményeken észlelt tények.

Kedves kötelességemnek tartom Budapest környékének — még sok tekintetben ismeretlen — geológiai viszonyait s az egyes emeleteken belül ezek faunáját tanulmányozni s meg-

¹ A Balaton tudományos tanulmányozásának eredményei. I. kötet 1. részének paläontológiai függeléke.

ismertetni, hogy így tanítványainkat jól átkutatott s részletesen ismert területen vezethessük be a földtan és őslénytan tudományába.

A budapest-környéki alsópannoniai képződményeket, valamint a felsőpannoniai emeletnek legalsó szintjét s ezeknek faunáját már 1902-ben közöltem «*Die pannonische Fauna von Budapest*»¹ czimű munkámban. Székfoglaló értekezésem ennek befejező része, mely a felsőpannoniai emelet többi szintjét, azonkívül a levantei emeletet s ezek faunáját tárgyalja, melynek rövid kivonatát a következőkben van szerencsém előterjeszteni.

Ha e képződményre vonatkozó eddigi ismereteink fejlődését nézzük, elmondhatjuk, hogy e képződmények napjainkig ismeretlenek voltak úgy a faunájukat, mint a sztratigrafiai viszonyait illetőleg. Daczára annak, hogy HALAVÁTS több értekezésben foglalkozik a fiatalabb harmadkorú képződményekkel, SZABÓ-nak 1856-ban megjelent első e tárgyú értekezése óta ismereteink alig gyarapodtak.

A Budapest geológiai viszonyaival foglalkozó BEUDANT F. S.-nak 1822-ben,² BARRA ISTVÁN-nak 1839-ben³ megjelent munkáiról s SZABÓ JÓZSEF-nek a természettudományi társulat és földtani társulat egyes ülésein bemutatott apróbb megfigyeléseiről, valamint «*Die geologischen Verhältnisse Ofen's*»⁴ és «*Budapest területének földtani fejlődése*»⁵ czimű munkáiról itt nem is akarok szólni, mivel a szóban forgó képződményekkel úgyszólván nem is foglalkoznak.

PETERS KÁROLY 1857-ben «*Die Umgebung von Ofen*»⁶ czimű értekezésében ír a neogén képződményekről, hivatkozva SZABÓ JÓZSEF-nek Bécsben a német orvosok- és természetvizs-

¹ Palæontographica. Bd. XLVIII. Stuttgart. 1902.

² Voyage minéralogique et géologique en Hongrie, pendant l'année 1818.

³ Tekintetes Nemes Pest-Pilis és Solt törvényesen egyesült vármegyéknek természet-tudományi leírása.

⁴ Erster Jahres-Bericht d. k. k. Ober-Realschule der kgl. freien Hauptstadt Ofen. 1856.

⁵ Magyar Akadémiai Értesítő. XVI. Évf. 1856. 323. lap.

⁶ PETERS K. Geologische-Studien aus Ungarn. I. Die Umgebung von Ofen. (Jahrbuch d. k. k. geol. R. A. Bd. VIII. P. 308.)

gálók vándorgyűlésén 1856-ban tartott előadására. A neogenbe számítja a svábhegyi (Széchenyi-hegy) homokot és homokkővet, melyből az *Aceratherium incisivum*, KAUP-ot említi; sőt ide veszi már a felette lévő édesvízi meszet is, belőle *helix*, *planorbis* és *limnaeus*-t említve, a *planorbis* szerinte a *Pl. pseudo-ammonius*, SCHL.-hoz hasonló.

PETERS az *Aceratherium*-tartalmú homokkővet egyenlő értékűnek veszi a Belveder-kavicssal (bár e kövület szerinte meg van az inzersdorfi agyagban is), sőt még a lorettomi lajtamész-szel is, melyet a Belveder-kavics tengeri faciesének tart. (!) Szól azután e képződmény kifejlődéséről és elterjedéséről. Helyesen elkülöníti ezt a széchenyihegyi édesvízi mészkövet a józsefhegyitől, kisczellitől, várhegyitől, gellérthegyitől és rókushegyitől, melyeket SZABÓ JÓZSEF még később is együtt tárgyal és valamenynyit diluviálisnak tartja.

SZABÓ JÓZSEF 1858-ban «*Die Beziehungen des Trachyts zu den Sedimentgesteinen bei Buda-Pest*»¹ című értekezésében a «Congeria-agyag»-ról azt mondja, hogy a «durvamész»-re (Grobkalk) telepszik, de nem közvetlenül, mivel többnyire «régi kavics»-nak vékony rétege telepszik a kettő közé. Egyébként az e képződményben található *cardium*-okról és *congeriák*-ról azt írja — igen helyesen —, hogy helyenként az egész képződményben elszórva vannak, majd más lelethelyen egyes, többnyire homokos rétegekre szorítkoznak.

SZABÓ JÓZSEF 1858-ban «*Pest-Buda környékének földtani leírása*» című munkájában² a «congeria agyag» elterjedéséről és ennek petrographiai minőségéről ír. Mint lelethelyeket említi: a Naphegy-et, Diósd (Óras)-ot, Tétény-t, Promontor-t, Csepel-sziget-et (Csepel falutól ÉK-re), a mai *erzsébetfalvi* (akkor gubacsi) *téglagyár* gödrét, *Szt.-Lőrincz*-et, a *Szarvascsárdá*-t, *Pest-Kőbányá*-t, *Rákos*-t, *Czinkolá*-t és *Csömör*-t. Kiemeli, hogy az agyag tömege mindenhol réteges, mely rétegek élesen külö-

¹ Amtlicher Bericht über die zweiunddreissigste Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Wien im Sept. 1856.

² A magyar tud. akadémia által Nagy Károly-díjjal koszorúzott pályairat.

nülnek el egymástól és igen csendes lerakódásra mutatnak. «Márgagömbök minden szoros települési rend nélkül a téglavetők nem legnagyobb örömére csaknem mindenütt előfordulnak.» Ez agyagokból «*Congeria triangularis*»-t említ itt is, melyeknek gyakran «mindkét felet összecukódva együtt találni». Ez agyag helyenként közvetlenül a szarmatamészre települ, máshol a kettő között vékony trachyt nélküli kavicsréteg van.

A Nagy-Svábhegy tetején lévő édesvízi mészkőről azt mondja, hogy miután az «alsó vagy tengeri agyag»-ra (kisczei agyag) telepszik, ennél fiatalabb; mivel azonban fiatalabb rétegekkel sehol sem érintkezik, a neogen-csoport többi tagjával párhuzamba nem állítható. «A harmadkori képletek közé» pedig csak ideiglenesen számítja, míg kövületek vagy a rétegzési viszonyok alapján a pontos helye a sztratigrafiai geológiában meg nem állapítható. Szerves testekből édesvízi és szárazföldi csigák vannak benne.

SZABÓ JÓZSEF 1879-ben «*Budapest és környéke geologiai tekintetben*»¹ című munkájában az e rétegeket tárgyaló fejezet címe «Pontusi rétegek. *Congeria*-rétegek.» Először emeli ki e munkájában, hogy a Széchenyi-hegy tetején több helyen vízszintes településű congeriás-homok van. A rákosi téglagyár (Kőszén és Téglagyártársulat) agyagbányájának rétegeiből itt már 5 kövületet említ, úgymint: *Congeria triangularis*, PARTSCH., *Cong. Szabói*, MUNIER-CHALMAS., *Cardium apertum*, MÜNST., *Card. conjungens*, PARTSCH., *Card. hungaricum*, HÖRN., *levél-lenyomatok*, *kövült fadarabok* vagy *csontok töredékei* stb.

Kőbányáról az ottani téglagyári föltárásokból: *Cardium carnuntinum*, PARTSCH., *Valenciennesia sp.* és *Castor*-féle csontdarabokat említ.

Kiemeli, hogy az agyag tömege felül mindkét helyen sárgás, míg alul kékes, továbbá, hogy a fedője negyedkori kavics, a fekvője pedig cerithiumos durvamész. Azt a kavicsréteget azonban, melyet az előbb említett értekezéseiben említ Promontorról, mint a szarmatamész és «congeria-agyag» közé települt

¹ Budapest és környéke természetrajzi, orvosi és közmívelődési leírása.

vékony réteget, innen nem emliti, holott igen szépen van kifejlődve.

Gubacspusztáról, a pest-soroksári országút és a Duna között, a soroksári Duna-ág elzáró gátja mellett délre lévő — a mai erzsébetfalvai — téglagyár agyabányájának rétegeiből *Conger*a-t és *Cardium*-ot említ csak, minden közelebbi (faji) meghatározás nélkül. Kiemeli, hogy feltűnően sok itt a pyrit, különösen a kékes, iszapfinomságú agyagban. Megemlíti itt SZABÓ, hogy az előbb említett értekezésben tévesen a Csepel-sziget északi részéről is említi e képződményt, holott ott nincs meg, s a téglát alluviális-agyagból égetik.

Szerinte Diósd (Óras)-nál is tetemes elterjedésű e képződmény, bár föltárva nincs.

A Nagy-Svábhegy déli és délkeleti oldalán lévő bányák homokkőanyaga — szerinte — ugyancsak a «congeria-képlethez» tartozik. Ebben a homokkőben talált báró EÖTVÖS JÓZSEF egy *Aceratherium incisivum* állkapocs-töredéket.

Ugyancsak a Nagy-Svábhegy-ről a Disznófő közelében föltárt édesvízi márgából dr. HOFMANN KÁROLY meghatározása nyomán a következő kövületeket emliti: *Melanopsis Sturi*, FUCHS., *Neritina radmanesti*, FUCHS., *Planorbis corneus*, BRONGT., *Fl. cfr. applanatus*, THOMÆ., *Hydrobia* (illetve *Paludina*) *acuta*, DRAP., *Helix* sp. stb.

A Farkas- és Budaörsi-hegy között lévő útszorostól délre említ édesvízi mészből: *Helix* sp.-t és *Conger*a cfr. *spathulata*, PARTSCH-t.

A pesti oldalon megvan még e képződmény Csömör-nél, Czinkotá-nál és a pusztaszentlőrinci Szarvascsárda mellett, itt csekély barnaszén-ér is van SZABÓ szerint, sőt innen KRENNER J. *Mastodon* sp. valószínűleg *M. arvernensis*, CROIZ és JOB. zápfogat is említ (Földtani Közlöny 1873, 142. lap.) hét öl mélységből.

A budai oldalon, Nagy-Svábhegyen elterült édesvízi mészkőről itt azt mondja SZABÓ JÓZSEF, hogy e mész sajátzerűen tömött, néha szürkésbarna s ilyenkor bitumenes (büdöskő), mely sekély tóban, igen csendes körülmények között ülepedett le. Ezt sztratigrafiai helyzeténél fogva «tán úgy tekinthetjük,

mint a levantei emelet képviselőjét Budapest környékén». FUCHS TIVADAR meghatározása nyomán ebből: *Helix reinensis*, GOBANZ.-t, *Limnaeus* sp.-t és *Planorbis* sp.-t (hasonló az eocen *Pl euomphalus*, Sow-hoz) említ. Megemlíti végre, hogy Ó-Budán a hidegkúti úton oolitos szövetű édesvízi meszet talált *Melanopsis* sp.-el.

A pannoniai rétegeket fedő és ezekkel egykorú «trachyt-tartalmú» kavicsokat, melyek Promontoron, Ó-Budán, Kőbányán, Csömörön, Czinkotán, Szt-Lőrinczen, Keresztúron, Soroksárnál, Gubacson stb. vannak föltárva, az eddigi munkáiban SZABÓ diluvium-korszakbelinek veszi. Szerinte¹ «saját szerves zárványai e képletnek nincsenek; találni azonban benne nagyobb osztrigákat igen gömbölyűre kopva, nagyobb pectenek töredékeit szintén kopott élekkel, végre a congeriák vastagabb részeit. A két első valószínűleg a mediterrankavicsból, az utolsó a congeria-rétegekből származik.»² Itt-ott csontokról is hallottam említést, különösen a szentlőrinczi kavicsbányában vastagbőrűek csontmaradványát találták, de magam nem láttam semmit».

E kavicsok egy részének zavart települését már SZABÓ is említi itt (37. lap), sőt magyarázatát is iparkodik adni. Ugyanis azt mondja: «a magaslatokon (Kőbányán, Csömörön, Promontoron, Ó-Budán) zajos lerakodás nyomai látszanak,³ sőt nemcsak hogy a legnagyobb darabok nincsenek a kisebbektől, sőt a homoktól elválva, hanem gyakran látni, hogy lapos darabok élőkön állanak». Az azonban ma már nem felel meg a valóságnak, a mit SZABÓ mond, hogy «ellenkezöt tapasztalunk távol a magaslattól a rónán, s jellemzőbb helyet alig mutathatnék ki, mint Szt.-Lőrinczet, itt az iszapolás a legnagyobb rendben ment háborítatlanul véghez: külön rétegben vannak a nagyobb, különben a kisebb darabok, s a laposak mind oldalaikon fekszenek».

¹ Budapest és környéke geológiai tekintetben. 38. lap. 1879.

² Tévesen szármata-réteget említ «congeriás réteg» helyett, az 1858-ban megjelent munkájában helyesen így is említi.

³ Az 1858-ban megjelent «Pest-Buda környékének földtani leírása» című munkájában (24. lap) még ezt mondja: «zajos lerakodás vagy emelkedés előidézte zavar nyomai látszanak».

nek»: a mennyiben felül itt is rendetlen a település s csakis az alsóbb rétegek települnek zavartalanul, vízszintesen.

SZABÓ JÓZSEF az 1883-ban megjelent «*Geologia*» című tankönyvében az első szelvényét közli a pannoniai emelet rétegeinek Budapest-Kőbányáról, a «Drasche»-féle téglagyárból. Ő e szelvényben a dült szarmatakorú meszekre vízszintesen települve — tehát discordansan — rajzol 14 pannoniai-korú réteget, melyek fölé homok és kavics (diluviális?) s végre humusz települ. A pannoniai rétegekben szerinte «*Congeria triangularis*», «*Cardiumok*» és «*Valenciennesia*» található.

INKEY BÉLA 1892-ben «*Pusztai-Szt.-Lőrincz (Pest-m.) vidékének talajtérképezése*»¹ című munkájában részletesebben szolt a pannoniai-korú, vagy a mint ő nevezi, «pontusi emelet» rétegeiről s az e fölé települő levantei kavicsokról. A pannoniai rétegek itt szerinte, a temesvári vasut-vonalnak bevágásától eltekintve — hol már begyepesedett —, két téglagyárban vannak föltárva: a *Souheitt*-féleben és a *Magyar általános hitelbank* szt.-lőrinczi téglagyárában. (SZABÓ e föltárást, mint a szarvasesárdai előfordulást. már 1858-ban említi.) INKEY az elsőről nem ír semmit, míg az utóbbiról szelvényt is közöl, melyben a pannoniai rétegek 20 m. vastagon vannak föltárva s ezek fölött 0.50—0.60 m. diluviális réteg van, a kettő közé egy helyen itt szerinte (3. ábra) kiékelődően felső-pliocén kavics telepszik. INKEY említi először, hogy itt a rétegek nem vízszintesek, hanem 4—5 fokkal dőlnek KDK (h 7.5) felé, a rétegekből pedig a következő molluscumokat említi: *Melanopsis Bouéi*, FÉR., *Neritina radmanesti*, FUCHS., *Planorbis* sp., *Unio* sp. (töredékek) és *Helix* cfr. *robusta*, REUSS.

A pannoniai agyag és homoknál fiatalabb kavicsképződmény vastagságát, mely kelet és nyugat felé kiékelődik, 20 m.-re teszi. E folyami kavicsüledék felső részében látható zavarodásokról és tölcsekről részletesen ír. A zavarokat szerinte csekély emelkedésekkel kapcsolatos csuszamlások idézheték elő. A kavicsokban talált *Mastodon Borsoni*, KAYSER., *Mast. arvernensis*, CROIZ. és JOB. és *Rhinoceros* sp. alapján az egész kavicsképződményt a felső-pliocénbe (tracziái emelet) tartozónak

¹ A magy. kir. földtani intézet Évkönyve. X. kötet. 1892—94.

veszi. SZABÓ az ötvenes években a felső-harmadkorba helyezte, míg a földtani intézet későbbi felvételein diluviális kavicsként szerepelnek; a mi INKEY szerint helyes is, «ha a mélyebben fekvő hatalmas kavicsüledéket nem zavarjuk össze a felszín kavicsával».

Mig INKEY munkájában több érdekes új, a Budapest-környéki pliocén-képződményekre vonatkozó, geológiai adat van, különösen pedig a levantei kavicsot illetőleg: addig HALAVÁTS-nak három évvel később, 1895-ben megjelent: «*Az Alföld Duna-Tisza közötti részének földtani viszonyai*» című munkájában¹ — e képződményekre vonatkozólag — semmi újat sem találunk. Mindössze a régi *Congerina triangularis* elnevezést javította ki *Congerina ungula-caprae*, MÜNST.-re (melyet azonban azóta már *Congerina Hörnesi*, BRUS.-ra változtatott); azonkívül pedig a rákosi téglagyárból említi mint újakat a *Limnocardium Penslii*, FUCHS. sp.² és *Limnocardium secans*, FUCHS. sp. fajokat.

A levanteinek vett kavicsokat pedig a Duna hordalékának, kavicskúpjának mondja. A kavicsok és a pannoniai homok felső részében észlelhető zavarodásokról pedig mint gyűrődésekről beszél.

HALAVÁTS 1898-ban «*A Budapest-vidéki kavicsok kora*» című értekezésében (Földtani Közlöny XXVIII. kötet) megerősíteni véli FUCHS TIVADAR-nak ama megfigyelését,³ hogy a *Mastodon arvernensis* és az *Elephas meridionalis* két különböző emlős-faunához tartozik; továbbá, hogy a *Mastodon arvernensis* tartalmazó rétegek a *congeria-rétegek*hez, az *Elephas meridionalis*-t tartalmazók pedig a negyedkori képződményekhez so-

¹ A magy. kir. földtani intézet Évkönyve. XI. kötet.

² HALAVÁTS e fajokat helytelenül írja, miután FUCHS nem írt le *Limnocardium*okat, hanem *Cardium*okat s így a *Limnocardium Penslii* névben csakis a faj közös FUCHS-nál és HALAVÁTS-nál, miért is a szerző neve vagy zárjelbe teendő, vagy a mi czélszerűbb, utána teendő «sp.», jelölés annak, hogy FUCHS csakis a fajnevet használta és más nemi nevet.

³ Über neue Vorkommnisse fossiler Säugethiere von Jeni Saghra in Rumelien und von Ajnácskö in Ungarn, nebst einigen allgemeinen Bemerkungen über die sogenannte «pliocäne Säugethierfauna» (Verhandlung d. k. k. geol. R. A. Jahrg. 1879. P. 49.).

rakoznak szorosan. A mastodonok HALAVÁTS szerint is előfordulnak a pannoniai és levantei rétegekben egyaránt. A Budapest-környéki mastodonos-kavicsok koráról mégis azt mondja, hogy «nagy valószínűséggel a levantei korban» képződtek. Bizonyítékul hivatkozik arra, hogy sikerült felfedeznie a pannoniai üledék felső részében olyan réteget, mely bár még pannoniainak veendő, de már faunájában levantei alakok is találkoznak s így a pannoniai emelet legfelső rétegének veendő. «S miután a kavics ezen fekszik... még jogosabban tekinthető levantei-korúnak.»

Én ilyen levantei alakokat tartalmazó réteget nem ismerek Szt.-Lőrincz környékén, az pedig, hogy az *Elephas meridionalis*-tartalmú rétegek diluviálisak-e, éppen a HALAVÁTS-nál idézett ercsii és aszódi előfordulások alapján még nagyon kérdéses.

Mint új, még eddig irodalmilag ismeretlen kövületet említi a *Quercinum Staudi*, FELIX-t. Az ugyanitt HALAVÁTS-tól «Pusztaszt.-Mihály»-ról említett «levantei» kavicsokról már kimutatam, hogy alsó-mediterraniak.¹ Ugyanez értekezésem keretében CHOLNOKY JENŐ ama nézetét fejezi ki, hogy e Budapest-környéki mastodonos-kavicsokat nem tartja a Duna hordalékának — mint HALAVÁTS állítja —, hanem «inkább időszakos vízmosások hordhatták össze valami régibb kavicsokból».

SCHMIDT SÁNDOR 1893-ban «Czinkota geológiai viszonyairól»² című értekezésében szólt a pannoniai rétegeknek Czinkota körüli elterjedéséről, azok petrográfiai kifejlődéséről. A jégvermek alapozásával kikerült anyagból említ: *Congeria?* cfr. *spathulata*, PARTSCH-t és *Congeria?* *subglobosa*, PARTSCH-t, melyek azonban — a mint erről meggyőződtem — a *Congeria Partschii*, ČŽŽEK fiatal példányai. A falu ÉK sarkán levő urasági téglavetőből a következőket említi: «*Cardium apertum*, MÜNSTER (sok), *Planorbis radmanesti*, FUCHS, *Congeria* sp. (sok), *Zagrabica* sp., *Cardium* sp. és *Hydrobia* sp.»

Miután Budapestnek 1871-ben megjelent 1:144.000-es földtani térképe, sőt ennek második kiadása is elfogyott, 1901-

¹ LÖRENTHEY. «A rákosszentmihályi Sashalom kavicsainak koráról.» (Földtani Közöny XXXIV. kötet. 1904.

² Földtani Közöny. XXIII. kötet. 336—339. lap.

ben a magy. kir. földtani intézet kiadta a legújabb 1:75.000 reambulált — de sok hibát tartalmazó — térképet, melynek északi felét dr. SCHAFARZIK FERENCZ, a délit HALAVÁTS GYULA reambulálták. Ugyanők írtak hozzá magyarázó szöveget is.¹ SCHAFARZIK FERENCZ a teljes irodalom tekintetbe vételével mintaszerű térképmagyarázó szövegében szól — SCHMIDT nyomán — a *Czinkota*-környéki pannoniai rétegekről is, valamint e képződménynek a *Svábhegyen* való előfordulásáról, mint tavi üledékekről; végre a levantei-korú mastodonos-kavicsokról. Ilyen levantei korúaknak tartja — valószínűséggel — a csömöri, czinkotai és rákosszentmihályi kavicsokat. A szentmihályiakról azóta kimutattam (Rákosszentmihályi Sashalom kavicsainak koráról, 1904.) palaeontologiai leletek és a geológiai viszonyok alapján, hogy alsó-mediterrán-korúak; úgy hogy SCHAFARZIK vizsgálataim nyomán e térkép német magyarázó szövegében a szentmihályi kavicsokat már alsó-mediterrániaknak mondja. A levantei kavicsaink felső részében észlelhető zavarokat — miket HALAVÁTS gyűrődéseknek mondott — CHOLNOKY saját megfigyelései alapján a szárazzá lett kavicsfelület időnkinti záporok által való wadi-szerű felbarázdáltatásának hajlandó tartani.

HALAVÁTS déli lapján a fiatal harmadkori képződmények sokkal hatalmasabb kifejlődésűek, és bár napról-napra mindig jobban és jobban tárják föl e képződményeket, részben téglagyártás, részben pedig kavicsnyerés céljából, mindamellett sem a térkép, sem a magyarázó szöveg nem mutat régi ismereteinkhez képest haladást, úgy hogy a mai föltérési viszonyokhoz és a tudomány mai állásához (1902) viszonyítva nagyon hiányos és hibás. A pannoniai képződményeket pl., melyek évtizedek óta HALAVÁTS specziális tanulmányainak tárgyát teszik, a terület bejárása nélkül — tehát reambulatio nélkül — jegyezte be a térképbe; a magyarázó szövegben pedig — a mint mindjárt

¹ Dr. SCHAFARZIK FERENCZ. Budapest és Szent-Endre vidéke. 15. zóna/XX. rovat jelű lap (1:75.000.) (Magyarázatok a magyar korona országainak részletes földtani térképéhez). 1902. HALAVÁTS GYULA. Budapest és Tétény vidéke 16. zóna/XX. rovat jelű lap (1:75.000). Ugyanott, 1902.

látni fogjuk — csakis a régi irodalmi adatokat ismétli s néha ezt is hibásan teszi. Itt nem akarom HALAVÁTS térképének hibáit felsorolni — a mennyiben ezt már részben meg is tettem¹ —, hanem csak ez értekezésem tárgyát tevő pannoniai és levantei rétegekre vonatkozó adatait akarom fölemlíteni.

Azt mondja, hogy «a szarmata-mészre közvetlenül és konkordánsan» települnek a pannoniai rétegek. A szarmata-mész szerinte — a lajtamésszel együtt — 5 fokkal dől DNy felé, akkor tehát a pannoniai rétegeknek is 5 fokkal kellene DNy felé dőlni, holott már INKEY kimutatta, hogy ezek «4—5 fokkal dőlnek KDK (h. 7·5) felé», tehát éppen ellenkező irányban. Különben már SZABÓ J. is észrevette és kiemelte a szarmata és pannoniai rétegek közötti discordantia-t, csakhogy ő a DNy-ra dőlő szarmatamészre vízszintesen rajzolja a pannoniai rétegeket. Kevés helyen telepszik e két képződmény konkordánsan. A kőbányai és rákosi téglagyárak agyaggödreiben föltárt rétegekről ezt írja: «átaljában meddő, egyik mélyebb rétege azonban sok *Congerina Hörnesi*, BRUS. teknőt zár magába». Ezzel szemben én eddig Rákosról e rétegekből 35, Kőbányáról pedig 31 molluscumot írtam le; az alábbiakban pedig még sokkal többet fogok említeni.

Ebből az agyagból való HALAVÁTS szerint a Magy. Nemzeti Múzeumban lévő *Dinotherium giganteum*, KAUP. zápfog. Ez

¹ Kimutattam, hogy míg HALAVÁTS-nál semmi nyoma a mediterrán-kori vulkánosság termékeinek, addig a rákosi királyvágány mentén a lajtamész alatt és a lajtamészben rhyolithtufa van. (A rákosszentmihályi Sashalom kavicsainak koráról, 1904.) Ez a tufa közvetlenül az alsó mediterráni konglomerátumra és kavicsokra, sőt egy padja a lajtamészbe települ; a miből kitűnik, hogy itt az eruptio az alsó-mediterráni kor végén kezdődött s a felsőben is folytatódott. Tufa-darabok a felette lévő szarmatamészben is gyakoriak. A rhyolithtufa ott, a hol tetemesebb vastagságú, felül mindenhol igen meszes (mészkőszerű). HALAVÁTS nem ismeri a bryozoásmészkövet sem, holott ez Budafokon megvan. SCHAFARZIK ezt az északi lapon külön színnel jelölve tünteti föl. (LŐRENTHEY. Paläontologiai tanulmányok a harmadkorú rákok köréből. Math. és Természettudományi Értesítő. XXII. kötet 3. füzet. 1904.) A bryozoásmésszel egyenrangú bryozoás szirtképződmény van Budapest-Rákoson is, melynek ismertetése legközelebb megjelenik.

azonban csak föltevés, a mennyiben a példány mellett lévő czédulán ez van, hogy ZEILINGER JÓZSEF ajándéka s lelethelye Pest-Kőbánya (1845).

HALAVÁTS-nál egyetlen új adat *Pusztá-Szt.-Lőrinczről* az *Unio Wetzleri*-s homok, melyből ezenkívül *Pisidium priscum*, EICHW., *Melanopsis* cfr. *praemorsa*, L., *Mel. sp.* és *Vivipara Semseyi*, HALAV.-t említ. Közvetlenül ezután azt mondja, hogy «e homoküledékben találták *Kőbányán* az intézetünkben (földtani intézet) lévő *Mastodon arvernensis*, CR. és JOB. zápfogat»; holott Kőbányáról az *Unio Wetzleri*-s homok a mai napig ismeretlen

Megemlékezik az érdi *Unio Wetzleri*-s homokról s azt mondja, «innét való» a nemzeti múzeumi és egyetemi *Mastodon Borsoni*, KAYS. A SCHAFARZIK északi lapján lévő sváb-hegyi előfordulásról is megemlékezik s a PETÉNYI S. JÁNOS-tól meghatározott és már 1857-ben PETERS-től, majd 1879-ben SZABÓ JÓZSEF-től említett *Aceratherium incisurum*, KAUP.-ot *Anthracotherium magnum*, Cuv.-nak nevezi el. E fölé a sváb-hegyi pannoniai rétegek fölé települő édesvizi mészkőből meghatározásra alkalmatlan *congeria*, *planorbis*, *limnaeus* és *helix* házakat említ.

A pusztaszentlőrinczi és rákoskeresztúri úgynevezett mastodonos (levantei) kavicsokat a Duna hordalék-kúpjának tartja, melyet ez az Alföld nagy medencéjét kitöltő édesvizü tóban rakott le. E kavicsok koráról azt mondja, hogy a sztratigrafiai helyzet — a mennyiben a legfelső pannoniai réteg fedőjében fordulnak elő — s a belőlük kikerült *Mastodon arvernensis*, CROIZ. és JOB. és *Mastodon Borsoni*, KAYS.-fogak alapján mondotta már régebben levantei korúnak.

Ezekkel szemben meg kell jegyeznem, hogy a Duna meder-változásainak tanulmányozásával foglalkozó CHOLNOKY JENŐ e kavicsokat — vizsgálatai alapján — nem tartja a Duna hordalékának, s e nézetét én is osztom; nem azért ugyan, mivel e kavics szemei sokkal gömbölyűbbek, mint ilyen nagy folyam kavicsa lehet, a mennyiben ez már koptatva kerülhetett be a Dunába; hanem talán azért is, mert a Duna visegrádi áttörésétől ÉNy-ra tudtommal sehol sem képviseli sem a

mioczént, sem a régebbi plioczént olyan kavics, melyből e kavicsokat a Duna hozhatta volna. A kavicsok korára pedig a *Mastodon arvernensis* és *Mastodon Borsoni* előfordulásából legkevésbé sem lehet következtetni, a mennyiben — a mint láttuk — maga HALAVÁTS e fajokat a Budapest-környéki mélyebb pannoniai rétegekből is említi, később pedig magam is fogom említeni. Hogy e kavicsok a legfelső pannoniai rétegek fölé települtek, a HALAVÁTS-nál mondottakból nem tűnik ki, miután a pannoniai emelet szintjeiről említést sem tesz.

Az eddig említett értekezések szerzői csakis a pannoniai s levantei képződmények Budapest körüli elterjedésére és anyaguk petrográfiai minőségének megismertetésére fektették a súlyt, figyelmen kívül hagyva e képződmények gazdag faunáját és az ezek alapján megállapítható sztratigrafiai vonatkozásokat. Az 1900-ban megjelent «*Foraminiferen der Pannonischen Stufe Ungarns*» (Neues Jahrb. f. Min. Geol. u. Paläont. 1900. Bd. II. P. 102.) című értekezésemben ismertetem ama felfedezésemet, hogy a pannoniai korszakbeli — majdnem teljesen édesvízi — tavainknak is voltak autochton foraminiferái. Itt a budapest-kőbányai disznóhizlalda kútjából kikerült anyagból megismertetem a *Rotalia Beccarii*, L., *Nonionina depressa*, W. és J. sp. (= *Granosa*, D'ORB.), *Polystomella striatopunctata*, F. és M. sp. (= *Listeri*, D'ORB.) és *Polystomella macella*, F. és M. sp. fajokat.

Ebben az értekezésemben fölújítom egyszersmint s újra használom a már csaknem feledésbe ment «pannoniai fauna» elnevezést, a helytelenül alkalmazott és kétértelmű «pontusi fauna» elnevezés helyett.¹

Én kezdettem először e képződmények kövületeit gyűjteni s így faunáját tanulmányozni. 1902-ben «*Die pannonische Fauna von Budapest*» című, Stuttgartban megjelent munkámban Budapest területéről két gazdag faunát ismertetek meg. Az egyik Budapest-Kőbányáról az Eigel-féle sertéshizlalda kútjából való s a következő 42 fajból áll:

¹ Értvén egyszersmint alatta a Fekete-tengernek (Pontus Euxinus-nak) faunáját is.

Rotalia Beccarii, L. sp., *Nonionina granosa*, D'ORB., *Polystommella Listeri*, D'ORB., *Polystomella macella*, F. és M., *Congeria Gitneri*, BRUS., *Cong. scrobiculata*, BRUS., *Cong. scrobiculata*, BRUS. var. *carinifera*, LÖRENT. nov. sp., *Cong. Mártonfii*, LÖRENT., *Cong. Mártonfii*, LÖRENT. var. *pseudoauricularis*, LÖRENT., *Limnocardium minimum*, LÖRENT. nov. sp., *Limn. Halavátsi*, LÖRENT. nov. sp.? *Limn. sp. ind.*, *Limn. (Pontalmyra) Andrusovi*, LÖRENT. nov. sp., *Limn. (Pontalmyra) Andrusovi*, LÖRENT. var. *spinosum*, LÖRENT. nov. f.? *Monodacna (Pseudocatillus) pannonica*, LÖRENT. nov. sp., *Papyrotheca gracilis*, LÖRENT. nov. sp., *Planorbis (Tropodiscus) Sabljari*, BRUS., *Pl. verticillus*, BRUS., *Planorbis (Armiger) ptycophorus*, BRUS., *Pl. (Gyraulus) solenoëides*, LÖRENT. n. sp., *Ancylus illyricus*, NEUM., *Orygoceras Fuchsi*, KITTL. sp.,¹ *Or. filocinctum*, BRUS., *Or. cultratum*, BRUS., *Melania (Melanoides) Vásárhelyii*, HANTK. sp., *Melanopsis rarispina*, LÖRENT. nov. sp. *Melanopsis (Lyrcaea) Martiniana*, FÉR., *Mel. (Lyrcaea) impressa*, KRAUSS, *Mel. (Lyrcaea) impressa*, KRAUSS var. *Bonellii*, E. SISMD., *Mel. (Lyrcaea) impressa*, KRAUSS var. *carinatissima*, SACCO, *Mel. (Lyrcaea) Matheroni*, MAYR., *Mel. (Lyrcaea) vindobonensis*, FUCHS, *Hydrobia (Caspia) Vujići*, BRUS., *Hydr. (Caspia) Krambergeri*, LÖRENT. nov. sp., *Baglivia sopronensis*, R. HOERN., *Micromelania? cylindrica*, LÖRENT. nov. sp., *Prososthenia Zitteli*, LÖRENT. nov. sp., *Pros. sepulchralis*, PARTSCH sp., *Bithynia Juri-naći*, BRUS., *Valvata balatonica*, ROLLE, *Neritina (Clithon) Pilari*, BRUS., *Ner. (Clithon) cfr. Cunići*, BRUS. továbbá halcsont-ok és ostracoda-k.

A második fauna, melyet eme értekezésemben ismerttettem, a magasabb *Congeria ungula-caprae*, MÜNST. tömeges föllépésével jellemzett szintből való. E faunát két lelethelyről ismer tettem, Budapest-Rákosról és Budapest-Kőbányáról.

A budapest-rákosi «Köszén- és téglagyár társaság» agyag-gödreből, honnan eddig SZABÓ nyomán 5 faj molluscumot ismer tünk, gyűjtéseim alapján én 27-et ismerttettem.

Úgy mint: *Congeria ungula-caprae*, MÜNST., *Cong. ungula-*

¹ Az eredetiben *Orygoceras corniculum*, BRUS. néven.

caprae, MÜNST. var. *rhomboformis*, LÖRENT. nov. form., *Cong. Partschi*, ČŽŽEK, *Cong.?* *Gitneri*, BRUS.?, *Cong.?* ind. sp., *Dreissensia* ind. sp., *Dreissensiomya intermedia*, FUCHS?, *Limnocardium Penslii*, FUCHS sp., *Limn. secans*, FUCHS sp., *Limn. Steindachneri*, BRUS. sp., *Limn. subdesertum*, LÖRENT. nov. sp., *Limn. budapestiniense*, LÖRENT. n. sp., *Limn. fragile*, LÖRENT. nov. sp., *Phyllicardium complanatum*, FUCHS sp., *Iberus Balatonicus*, STOL., *Planorbis tenuis*, FUCHS, *Pl. porcellanea*, LÖRENT. nov. sp., *Pl. ind. sp.*, *Melanopsis pygmaea*, PARTSCH., *Pyrgula incisa*, FUCHS, *Micromelania?* *Fuchsiana*, BRUS., *Micr.?* *laevis*, FUCHS sp., *Valvata kupensis*, FUCHS, *Valv. minima*, FUCHS, *Valv. subgradata*, LÖRENT. nov. sp., *Hydrobia scalaris*, FUCHS, *Bithynia?* *proxima*, FUCHS, *Otolithus-ok* és *Ostracoda-k*.

Innen ismertette GORJANOVIĆ-KRAMBERGER KÁROLY a *Clupea hungarica*, KRAMB.-GORJ. n. sp. nevű új halat 1902-ben «*Palaeoichthyologiai adalékok*» című munkájában.¹

A *Budapest-kőbányai* «Budapesti gőztéglagyár-társaság» agyagbányájából, a honnan SZABÓ JÓZSEF 3 fajt említ, én a következő 31 molluscumot ismertetem meg, gyűjtéseim alapján: *Congeria ungula-caprae*, MÜNST., *Congeria ungula-caprae*, Münst. var. *rhomboformis*, LÖRENT. nov. form., *Congeria ungula-caprae*, MÜNST. var. *crassissima*, LÖRENT. nov. form., *Cong. Partschi*, ČŽŽEK, *Cong.?* *Gitneri*, BRUS.?, *Dreissensia bipartita*, BRUS., *Dreiss. ind. sp.*, *Dreissensiomya intermedia*, FUCHS, *Limnocardium Penslii*, FUCHS sp., *Limn. secans*, FUCHS sp., *Limn. Steindachneri*, BRUS. sp., *Limn. subdesertum*, LÖRENT. nov. sp., *Limn. budapestiniense*, LÖRENT. nov. sp., *Phyllicardium (Limn.) complanatum*, FUCHS sp., *Limnaea* sp. cfr. *paucispira*, FUCHS, *Valenciennesia* sp., *Planorbis tenuis*, FUCHS, *Pl. porcellanea*, LÖRENT. nov. sp., *Pl. solenooides*, LÖRENT. nov. sp., *Melanopsis pygmaea*, PARTSCH, *Pyrgula incisa*, FUCHS, *Micromelania?* *Fuchsiana*, BRUS., *Micr.?* *laevis*, FUCHS sp., *Valvata kupensis*, FUCHS, *Valv. minima*, FUCHS, *Valv. subgradata*, LÖRENT. nov. sp., *Valv. varians*, LÖRENT. nov. sp., *Hydro-*

¹ A magy. kir. földtani intézet Évkönyve XIV. köt. 1. füzet.

bia scalaris, FUCHS sp., *Bithynella* sp. ind. *Bithynia?* *margaritula*, FUCHS, *Bith.?* *proxima*. FUCHS és *Ostracoda*-k.

Ez értekezésemben 42 fajból álló fauna alapján kimutatom a Budapest területéről eddig ismeretlen alsó-pannoniai emeletet. Ugyancsak itt megállapítom, hogy az irodalomban eddig innen (Budapest-Kőbánya és Budapest-Rákos) ismertetett 7 mol-luscum-mal képviselt fauna — melyet én 35-re emeltem — a felső-pannoniai emeletnek legalsó, *Congeria ungula-caprae*, MÜNSTR. és *Congeria Partschi*, ČIZŽEK. tömeges föllépésével jellemzett szintjébe tartozik.

Megemlítem végre, hogy Budapest-Kőbányán, a «Budapesti gőztéglagyár-társaság» területén, ez utóbb említett rétegek fölött találtam durva homok- és finom kavics-réteget, melyben a tipusos *Congeria triangularis*, PARTSCH van nagy mennyiségben. Tehát a felső-pannoniai emeletnek egy magasabb — Budapest területéről még eddig ismeretlen — szintje ez, melynek faunája azonban még nincs tanulmányozva.

E munkám megjelenése után folytattam pannoniai rétegeinknek tanulmányozását s kezdettem nyomozni az alsó-pannoniai emeletet és a felső-pannoniai emeletnek imént említett *Congeria triangularis* jellemezte szintjét. A «Budapesti gőztéglagyár-társaság» Kőbányán lévő föltárása e szint kövületeinek a gyűjtésére nem alkalmas, a mennyiben egyrészt e vasrozsdás laza homokban a kövületek erősen ki vannak lugoza, másrészt pedig a kis feltárás erősen be van füvel növe, sőt a vékony kis réteg anyaga azóta javarészből el is hordva.

A rétegek DK-i dőléséből következően, ennek a magasabb szintnek is, mint a többi magasabb szintnek, DK felé kell kifejlődve lennie, míg az alsó-pannoniai emelet rétegeit, ha egyáltalában megvannak, nyugaton kell keresni. Elővettem tehát a geológiai térképet és ennek nyomán kezdettem e feltárásokat — bányákat — meglátogatni és átvizsgálni. E kutatásaimat nem várt siker koronázta.

Egyrészt kiderült, hogy a legújabb kiadott geológiai térképen a pannoniai rétegeknek több előfordulása helyén futó-homok vagy zsombék van jelölve, másrészt pedig kitűnt, hogy ezek, a HALAVÁTS-tól meddőnek nevezett rétegek, Magyarország

kövületben leggazdagabb és legérdekesebb lelethelyei közé tartoznak. Úgy hogy kövületek alapján kimutathatom a pannoniai emelet balatonmelléki klasszikus rétegsorozatának valamennyi szintjét, holott eddig szinteket senki sem tudott itt megkülönböztetni.

A legnyugatibb föltárásokban, mint a melyek legközelebb vannak a sertéshizlaldához, az alsó-pannoniai emelet Lyrcaea-dus rétegeit kerestem, azonban nem találtam meg sehol.

E célból áttanulmányoztam a kőbányai Kápolnatér közelében lévő VIRAVA, SEIFERT és HOFHAUSER-féle téglagyárak agyagbányáit, a melyek — miként a többi föltárás — irodalmilag eddig még teljesen ismeretlenek.

A VIRAVA-féle téglagyár bányájában a humusz alatt 4 m. zsákoskavics (sok kopott osztaréval), majd ez alatt 10—12 m. vastag és homokkal váltakozó pannoniai agyag van, s ez alatt a szarmatamész. A homokosabb padokban az *ostracoda*-kon kívül eddig

Congeria ungula-caprae, MÜNST.

Congeria ind. sp.

Limnocardium ind. sp.

„ *subdesertum*, LŐRENT.

Planorbis tenius, FUCHS.

Pyrghula incisa, FUCHS.

Micromelania? *Fuchsiana*, BRUS.

Valvata varians, LŐRENT.

Otolithus (Sciena) és ezek fogai valamint

Mastodon sp. (arvernensis CROIS és JOB?)-t gyűjtöttem.

A közvetlen szomszédságban lévő SEIFERT-féle téglagyár bányájában felül a humusz alatt ugyancsak 4 m. vastag zsákoskavics, majd 16 m. vastag, homokkal váltakozó pannoniai agyag s ez alatt a szarmatamész van. A rétegekifejlődés teljesen egyezik az előbbi bánya rétegeivel, a különbség csak az, hogy itt a legalsó vastagpadú kék agyag — a 7. számú réteg — nem 5—6, hanem 7—8 m. vastag. Az egyik homokpadból *ostracoda*-kon kívül a következőket gyűjtöttem:

- Congerina ungula-caprae*, MÜNST.
Congerina ind. sp.?
Limnocardium Penslii, FUCHS sp.
 " *subdesertum*, LÖRENT.
 " *Steindachneri*, BRUS.
Limnocardium sp. ind.
Planorbis tenuis, FUCHS.
 " *porcellanea*, LÖRENT.
Melanopsis pygmaea, PARTSCH.
Micromelania? Fuchsiana, BRUS.
 " *? laevis*, FUCHS sp.
Pyrghula incisa, FUCHS.
Hydrobia scalaris, FUCHS.
 " *sp. ind.*
Bithynia? proxima, FUCHS.
Valvata minima, FUCHS.
 " *kupensis*, FUCHS.
 " *varians*, LÖRENT.
Otolithus (Scenidae) sp. ind.
 " " *irregularis*, KOK. var.
 angularis, SCHUB.

A kevéssel délre lévő HOFHAUSER-féle abbanhagyott téglagyár bányájában a humusz alatt 1—1·5 m. zsákoskavics, majd 3—3·5 m. kékes pannoniai agyag *Congerina ungula-caprae*, MÜNST.-vel és ez alatt szarmatamész van.

Tektonikai szempontból is igen érdekes a budapest-rákosi föltárások közül az ÖRLEY téglagyár agyagbányája. Ebben ugyanis a fekvő réteget tevő szarmatamésznek egyik elvetődése tanulmányozható igen szépen. Ugyanis itt van egy ÉD-i vetődés, mely 5 m-rel veti el a mészkövet.

A rákosi LECHNER-féle téglagyár agyagbányájában az 1 m. humusz alatt 1 m. zsákoskavics, majd 10 m. pannoniai homok s főleg agyag van, melyben 3 kövületes réteg észlelhető. Az agyag alján igen finoman elváló márga, majd rozsdás kavics van, mely közvetlenül a 9 fokkal délre dőlő szarmatamészköre telepszik. E rozsdás kavicsban a *Congerina Partschi*, CŰSZÉK ritka.

Az agyagba települt alsó kővületes rétegből eddig a következőket gyűjtöttem az *ostracoda*-kon kívül:

Congeria ungula-caprae, MÜNST.

Congeria ind. sp.

Limnocardium Penslii, FUCHS *sp.*

„ *banaticum*, FUCHS *sp.?*

„ *subdesertum*, LÖRENT.

Planorbis tenuis, FUCHS.

„ *porcellanea*, LÖRENT.

Melanopsis pygmaea, PARTSCH.

Pyrgula incisa, FUCHS.

Micromelania? Fuchsiana, BRUS.

„ *?lavis*, FUCHS *sp.*

Valvata varians, LÖRENT.

„ *subgradata*, LÖRENT.

A rákosi ÖRLEY-féle téglagyári bányában az 1 m-es humusz alatt 3 m. zsákoskavics, majd 20 m. vastag, homok-erekkel változó pannoniai agyag van s benne két kővületes ér, illetve lencse, alatta az 5 m-rel elvetődött szarmatamész, melyre rozsdás kavics települ, mint a felső-pannoniai emeletnek legalsó rétege. Ebből a kavicsból eddig a következőket gyűjtöttem:

Congeria Partschi, ČŽŽEK.

Congeria subglobosa, PARTSCH.

Limnocardium Penslii, FUCHS *sp.*

„ *Steindachneri*, BRUS. *sp.*

„ *subdesertum*, LÖRENT.

Valvata subgradata, LÖRENT.

Planorbis ind. sp.

Az agyagba települt legalsó kővületes homokpadból pedig eddig a következőket gyűjtöttem:

Congeria ungula-caprae, MÜNST.

„ *Partschi*, ČŽŽEK.

Congeria ind. sp.

Limnocardium subdesertum, LÖRENT.

Planorbis tenuis. FUCHS.

Pyrgula incisa, FUCHS.

Micromelania? *Fuchsiana*, BRUS.

Bithynia? *proxima*, FUCHS.

Valvata subgradata, LÖRENT.

A «Budapesti göztéglagyár r.-t.» rákosi téglagyári bányájában az 1 m. humusz alatt 1—3 m-ig változó zsákoskavics, majd ez alatt 26—28 m. homoklencséket tartalmazó pannoniai agyag van, melynek alsó kövületes padjából eddig a következőket gyűjtöttem az *ostracoda*-kon és halfogakon kívüli:

Congeria ungula-caprae, MÜNST.

“ “ “ *var. rhombiformis*, LÖRENT.

“ *Partschi*, ČJŽEK.

“ *sp. ind.*

Limnocardium Penslii, FUCHS *sp.*

“ *subdesertum*, LÖRENT.

“ *Steindachneri*, BRUS.

“ *secans*, FUCHS.

“ *sp. ind.*

Phyllicardium complanatum, FUCHS *sp.*

Planorbis tenuis, FUCHS.

“ *porcellanea*, LÖRENT.

“ *parvulus*, LÖRENT.

Micromelania? *Fuchsiana*, BRUS.

Pyrgula incisa, FUCHS.

Bithynia? *proxima*, FUCHS.

Valvata, subgradata. LÖRENT.

“ *varians*, LÖRENT.

Neritina (Clithon) sp.

Otolithus (Sciema) ind. sp.

Ez alatt, a szarmatamész fedőjében, 0·5—0·15 m. finomabb és durvább rozsdás kavics van, sok kövülettel, melyből a következőket gyűjtöttem:

Congeria Partschi, ČJŽEK.

Limnocardium Penslii, FUCHS *sp.*

“ *secans*, FUCHS *sp.*

Limnocardium subdesertum, LÖRENT.

« *Steindachneri*, BRUS. sp.

Az ezektől DK-re lévő kőbányai «Magyar keramiai gyár részvénytársaság» téglagyárának bányájában a szarmatamészre települt pannoniai rétegek 30—32 m. vastagok. A humusz alatt homokos sárga agyag, majd lejobb zsirosabb, itt-ott vékonyabb-vastagabb homokérrel váltakozó kék agyag következik. A felülettől 18—19 m. mélyen van egy kővületes agyagréteg, melyből *ostracoda*-kon és *scienid*-hal fogakon kívül a következőket gyűjtöttem:

Heterolepa Dutemplei, D'ORB.

Cristellaria sp. ind.

Congerina ungula-caprae, MÜNST.

« « « « var. *rhombiformis*,
LÖRENT.

« « « « var. *crassissima*,
LÖRENT.

« sp. ind.

Dreissensia sp. ind.

Dreissensiomya sp.

Phyllicardium complanatum, FUCHS sp.

Limnocardium Penslii, FUCHS sp.

« *secans*, FUCHS sp.?

« sp. (cfr. *Steindachneri*, BRUS.)

Planorbis parvulus, LÖRENT.

« *porcellanea*, LÖRENT.

« *tenuis*, FUCHS.

Melanopsis pygmaea, PARTSCH.

Micromelania ? *laevis*, FUCHS sp.

« ? *Fuchsiana*, BRUS.

Pyrgula incisa, FUCHS.

Prososthenia Zitteli, LÖRENT. var. *similis*, LÖRENT.?

Bithynia ? *proxima*, FUCHS.

Valvata balatonica, ROLLE.

« *minima*, FUCHS.

« *kúpensis*, FUCHS.

Valvata varians, LÖENT.

« *subgradata*, LÖRENT.

Néhány méterrel e kövületes réteg alatt egy araszos finom táblákra való márgás réteg van, mely fél méterrel lejjebb ismétlődik. Közvetlenül a szarmatamészkö fölött itt nem kavics van, mint a többi rákosi és kőbányai téglagyár bányáiban, hanem meszes agyag, mely itt is telve van *Congeria Partschi*, CŽŽEK.-val.

E bányában tehát még mindig nem a *Congeria triangularis*, hanem a *Congeria ungula-caprae* jellemezte ugyanazt a mélyebb szintet találtam meg, mely Budapest-Rákoson és a kőbányai nyugatibb bányákban föl van tárva. Érdekes az itt gyűjtött faunában az, hogy a felső pannoniai emelet e legmélyebb szintjében itt találtam az első *foraminiferákat*; bizonyosságául ama megfigyelésemnek, hogy a pannoniai emelet valamennyi szintjének megvan a maga szegényes autochton foraminifera-faunája.

Tovább keletre az *Egyesült téglá- és csementgyár részvénytársaság kőbányai téglagyárának* két agyaggödrében már a magasabb *Congeria triangularis* jellemezte szint rétegei vannak föltárva. És pedig 16 kövületes, egymással váltakozó, homok, homokkő, homokosagyag, agyag és lignit réteg. A 11. sz. homokrétegből eddig a következő 37 molluscumot, 3 halat és ostracoda-kat gyűjtöttem:

Congeria triangularis, PARTSCH.

« *balatonica*, PARTSCH.

« *chilotrema*, BRUS.

« *subrhomboidae*, ANDR.

Dreissensia auricularis, FUCHS var. *simplex*, FUCHS.

Dreissensiomya sp. ind.

Anodonta inflata, LÖRENT.

Unio Halavátsi, BRUS.

Limnocardium pseudo-banaticum, GORJ.-KRAMB.

« *banaticum*, FUCHS sp.

« *Penslii*, FUCHS sp.

« *decorum*, FUCHS sp.

Limnocardium árpádense, M. HÖRN. var. *diprosopum*, BRUS.

“ *platypleura*, BRUS?

“ *Schedelianum*, PARTSCH.

“ *zagrabiense*, BRUS.

“ *scabriusculum*, FUCHS sp.

Planorbis tenuis, FUCHS.

“ *varians*, FUCHS.

Melanopsis (Lyrcaea) caryota, BRUS.

Hydrobia? atropida, BRUS.

Bithynia? margaritula, FUCHS.

“ ? *proxima*, FUCHS.

Pyrgula bicincta, LÖRENT.

Micromelania? laveis, FUCHS sp.

“ ? *Fuchsiana*, BRUS.

“ *Bielzi*, BRUS. sp.

“ *radmanesti*, FUCHS sp.

“ ? *Schwabenau*, FUCHS sp.

Valvata variabilis, FUCHS.

“ *balatonica*, ROLLE.

“ *tihanyensis*, LÖRENT.

“ *varians*, LÖRENT.

“ *Kochi nov. sp.*

“ (*Aphanotylus*) *adeorboides*, FUCHS.

Vivipara Lóczyi, HALÁV.

“ *Semseyi*, HALÁV.

Otolithus (Sciena) compactus, SCHUB.

“ “ *irregularis var: angulata*, SCHUB.

“ “ *sp. ind.*

Ostracoda-k.

Ez a réteg a magyarországi pannonai emeletnek egyik kövületekben leggazdagabb rétege, nem ugyan a faj, hanem inkább az egyedszámot illetőleg. Így pl. a *Congerina triangularis*, PARTSCH, *Dreissensia auricularis var. simplex*, FUCHS, *Limnocardium Penslii*, FUCHS sp., *Limn. zagrabiense*, BRUS., *Micromelania? laevis*, FUCHS sp., *Valvata balatonica*, ROLLE

és *Vivipara Lóczyi*, HALAV. százával gyűjthető a legkitünőbb megtartású példányokban.

Fölfelé haladva agyag, homok és homokkő váltakozik. Minden rétegnek megvan a maga faunája, ha nem is olyan gazdag és változatos, mint ez a 11. és a 2. számú réteg. Fölfelé haladva fogy a *Congeria triangularis*, PARTSCH és nő a *Congeria balatonica*, PARTSCH. száma, úgy hogy míg a 11. sz. rétegből 450 *Congeria triangularis*-t és 3 *Cong. balatonica*-t, addig a felső 2. számúból 150 *Cong. balatonica*-t és csak 10 *Cong. triangularis*-t gyűjtöttem. A képződmény felső részében a 6., a 4. sőt a 2. számú réteg alján is vannak egyes fészkek, vékonyabb rétegek, melyek telve vannak vivipara-val, egyikben a *Vivipara Sadleri*, PARTSCH., másokban a *Vivipara Lóczyi*, HALAV. van túlsúlyban.

Egyike a legkövületdúsabb rétegeknek a bánya legészakibb részén, a triangulacziói pont alatt föltárt 2. számú rozsdás homok, melyből *ostracoda*-kon kívül eddig a következő 39 fajt gyűjtöttem:

Congeria balatonica, PARTSCH.

„ *chilotrema*, BRUS.

Congeria labiata, ANDR.

„ *triangularis*, PARTSCH.

Dreissensia Dobrei, BRUS.?

„ *auricularis*, FUCHS var. *simplex*, FUCHS.

„ *serbica*, BRUS.

Dreissensiomya ind. sp.

Pisidium sp. ind.

Anodonta Brandenburgi, BRUS.?

Unio sp. ind.

Plagiodacna Avingeri, FUCHS sp.

Limnocardium apertum, MÜNST. sp.

„ *secans*, FUCHS. sp.

„ *árpádense*, M. HÖRN, var. *diprosopum*, BRUS. sp.

Planorbis varians, FUCHS.

„ *tenuis*, FUCHS.

Melanopsis decollata, STOL.

- Melanopsis gradata*, FUCHS.
 " (*Lyrcaea*) *cylindrica*, STOL.
 " " *Petrovići*, BRUS.
Micromelania monilifera, BRUS.
 " *Bielzi*, BRUS. sp.
 " ? *Schwabenau*, FUCHS. sp.
 " ? *laevis*, FUCHS. sp.
 " ? *Fuchsiana*, BRUS.
 " *Haidingeri*, STOL. sp.
Pyrgula incisa, FUCHS var. *pannonica*, LÖRENT.
 " *bicincta*, LÖRENT.?
Bithynia ? *proxima*, FUCHS.
Vivipara Sadleri, PARTSCH.
 " *Lóczyi*, HALÁV.
Valvata balatonica, ROLLE.
 " *variabilis*, FUCHS.
 " *simplex*, FUCHS var. *bicincta*, FUCHS.
 " (*Aphanotylus*) *küppensis*, FUCHS.
Neritina (Clithon) ind. sp.
Otolithus (Sciema) sp. ind.
 " " *sp. ind.*

Ez a 16 réteg összefüggő réteggkomplexust formál, mely azonos a balatonmelléki (Tihany, Fonyód) és radmanesti *Conger* *triangularis* és *Cong. balatonica* tömeges föllépésével jellemzett szintjével a felső-pannoniai emeletnek. Az, hogy itt e két fajjal jellegzett rétegek közül a *Cong. balatonica* tömeges föllépésével jellemzett magasabban van, mint a *Cong. triangularis*-ban bővelkedő: csakis helyi jelenség, a mi a sztratigrafiai beosztáson mitsem változtat.

Kevéssel DK-re van a *P.-Szt.-Lőrincz*-hez tartozó SOUHEITEL-féle *téglagyár*. Ez az, melyet SZABÓ JÓZSEF is kijelöl a térképen a pannoniai rétegek színével, INKEY BÉLA pedig e néven említi is e bányát. Rétegeiről és rendkívül gazdag faunájáról azonban senki sem tesz említést, úgy hogy az irodalomban mai napig ismeretlen.

Itt szintén több mint hét kövületes réteg van, melyek

közül csakis a kövületekben gazdag rétegeket említem. Így az alsó homokkőpadra települt agyagos homokból eddig az *ostracoda*-kon kívül a következő 20 fajt gyűjtöttem :

- Congeria Neumayri*, ANDR. ?
Dreissensia serbica, BRUS.
Dreissensiomya unioides, FUCHS.
Anodonta inflata, LÖRENT.
 " *sp.* (*Brandenburgi*, BRUS. ?)
Unio Halavátsi, BRUS.
Limnocardium decorum, FUCHS. *sp.*
Planorbis varians, FUCHS.
Melanopsis decollata, STOL.
 " (*Lyrcaea*) *cylindrica*, STOL.
Micromelania ? *laevis*, FUCHS. *sp.*
 " *Haidingeri*, STOL. *sp.*
Bithynia sp. (fedő).
Vivipara Sadleri, PARTSCH.
 " *Lóczyi*, HALAV.
Valvata (*Aphanotylus*) *kúpensis*, FUCHS.
 " " *aderoboïdes*, FUCHS.
Neritina (*Clithon*) *sp.*
 " " *sp.*
Otolithus (*Sciema*) *ind. sp.*

A növényországot egy *chara* termés képviseli.

E faunában uralkodó alakok — gyakoriságuk sorrendjében — a következők: *Micromelania* ? *laevis*, FUCHS. *sp.* *Limnocardium decorum*, FUCHS. *sp.*, *Unio Halavátsi*, BRUS., *Melanopsis* (*Lyrcaea*) *cylindrica*, STOL. és *Melanopsis decollata*, STOL. Följebb következik egy csillámdús homokréteg, mely telve van *vivipara*-kkal, ebből eddig a következőket gyűjtöttem:

- Vivipara Sadleri*, PARTSCH.
 " *Lóczyi*, HALAV.
Melanopsis (*Lyrcaea*) *cylindrica*, STOL.
 " *decollata*, STOL.
Micromelania ? *laevis*, FUCHS. *sp.*
Limnocardium decorum, FUCHS. *sp.*

Dreissensia serbica, BRUS.

„ *auricularis*, FUCHS *var. simplex*, FUCHS.

Majd közvetlen e fölé sárgás, rozsdás homok települ, mely telve van *Congeria balatonica*-val. Ebből eddig a következőket gyűjtöttem :

Congeria balatonica, PARTSCH.

„ *triangularis*, PARTSCH.

Dreissensia serbica, BRUS.

„ *auricularis*, FUCHS *var. simplex*, FUCHS.

Limnocardium Penslii, FUCHS, *sp.*

„ *opertum*, MÜNST. *sp.*

Plagiodacna Auingeri, FUCHS, *sp.*

Planorbis tenuis, FUCHS.

Micromelania monilifera, BRUS.

„ *coelata*, BRUS.

„ *Haidingeri*, STOL.

„ ? *laevis*, FUCHS, *sp.*

„ ? *Fuchsiana*, BRUS.

„ *Bielzi*, BRUS. *sp.*

Pyrgula bicincta, LÖRENT.

Bithynia ? *proxima*, FUCHS.

Hal-fog, *ostracoda*-k és *chara*-termés.

E réteg fölött a humusz alatt 6—8 m. mélyen van egy félméteres sötét agyag, telve elszenesült mocsári növényekkel. Ebben találtam a

Hipparion gracile, KAUP. *sp.* végtag csontjait.

A SOUHEITEL-féle téglagyár agyagbányájában föltárt rétegek tehát ugyancsak a felső-pannoniai emeletnek *Congeria triangularis* és *Cong. balatonica* jellemezte szintjébe tartoznak még. E szinten belül itt is van egy unio-dús réteg, mint Tihanyban (a Fehérpart II. rétege) és egy vivipara-dús réteg, mint a kőbányai egyesült téglá- és cementgyár északi bányájában. E föltárás alapján megvan egyszersmind állapítva, hogy Budapest környékén mikor jelent meg a *Hipparion gracile*, KAUP. *sp.*

A SouHEITEL-féle téglagyártól D-re van a *Magyar Általános Hitelbank szt.-lőrinczi téglagyára*. Ez már SZABÓ JÓZSEF térképén is szerepel, mint a Szarvas-csárda melletti előfordulás. INKEY BÉLA pedig említett munkájában e bánya rétegszelvényét is közli. INKEY kilencz réteget említ, úgy hogy a felső 0·5—0·6 m. vastag diluviumot leszámítva 20 m. vastagon volt 1902-ben föltárva a pannoniai üledék, melynek rétegei 4—5 fokkal dőlnek KDK-felé. Kövületet csakis a 4. számúból említ, a «*Helix cfr. robusta*, ROSS.»-t és a 7.-ből a *Melanopsis Bouéi*, FER., *Neritina radmanesti*, FUCHS, *Planorbis sp.*, és *Unio sp.* töredéket. Azóta mélyesztették a bányát körülbelül 6 méterrel, úgy hogy most 15 réteg van föltárva, melyek közül a 14.-ből sok *Helix (Tacheocampylaea) Doderleini*, BRUS.-t gyűjtöttem.

A bányairodában rendkívül becses emlős-csontokat kaptam, melyek INKEY 8. számú rétegéből a szivós réteges, feketés-kékes agyagból valók. Ezek a következők:

Hipparion gracile, KAUP, sp.

Tragocerus LÓCZYI, nov. sp.

Cervus sp. ind. (nov. sp.?)

Mastodon sp. ind. (arvernensis, CZROIZ és JOB.?)

Innen említ KRENNER JÓZSEF 7 öl (13·25 m.) mélységből *Mastodon sp.* fogat. Ez a mélység megfelel INKEY 4. számú rétegének, melyből ő a *Helix cfr. robusta*-t említi, mely valószínűleg azonos a *Helix (Tacheocampylaea) Doderleini*-vel, melyet én a 14. számú rétegből több példányban gyűjtöttem. INKEY 2. és részben 3. számú rétegéből elég gazdag faunát sikerült gyűjtenem, melyből kitűnt, hogy ez a legfelső réteg a felső-pannoniai emeletnek legmagasabb szintjét, az *Unio Wetzleri* tömeges fellépésével jellemzett szintet formálja. Ebből eddig a következőket gyűjtöttem:

Unio Wetzleri, DUNKER.

Congerina Neumayri, ANDR.

Pisidium sp. ind.

Planorbis (Coretus) cornu. L.

Helix (Tachea) baconicus, HALAY.?

“ (*Tacheocampylaea*) *Doderleini*, BRUS.?

Vivipara Fuchsi, NEUM.

Melanopsis praemorsa, L.

“ *Entzi*, BRUS.

“ *sp. ind.*

Valvata Entzi nov. sp.

“ *Entzi*, LÖRENT. var. *tricarinata*, nov. form.

Neritina (Clithon) sp. ind.

Ez a föltárás egyike a legérdekesebbeknek, a mennyiben a rétegek zömét a *Helix (Tacheocampylaea) Doderleini* jellemzi, melyet eddig csakis a felső-pannoniai emeletnek *Congeria rhomboidea* jellemezte szintjéből ismerek. Így ez a réteg jól illeszkedik az alája dülő *Congeria triangularis* és *Cong. balatonica* szintje, valamint a fölé települő *Unio Wetzleri* szintje közé. Érdekes ez a föltárás még annyiból is, hogy a bánya ÉK sarkában látni a kiékelődő mastodonos-, illetve zsákos-kavicsnak a pannoniai emelet legfelső rétegeire való települését.

A pannoniai rétegeknek — ezek dőléséből ítélve — itt kell a legvastagabbnak lennie, legalább 80 m. vastagnak.

A geológiai térkép tanúsága szerint — az eddig fölsoroltakon kívül — a pannoniai emelet rétegei itt a Duna balparti részén csakis az erzsébetfalvi téglagyár bányáiban vannak még föltárva. A ki azonban Pusztá-Szt.-Lőrinczre kerül, annak rögtön szemébe tűnnek a lajosmizsei vasutvonal mentén látható kispesti téglagyári kémények. E helyet fölkeresve, tényleg a pannoniai emelet rétegeit találjuk föltárva, holott a térképen zsombék és futóhomok van jelölve. Ez a *kispesti téglagyár*, mely Kispesttől D-re, Pusztá-Szt.-Lőrincztől Ny-ra, a *Gubacs-pusztától* pedig É-ra van.

Itt a 0.5 m. vastag fekete humusz alatt (1. sz.) finom, helyenként durvább, réteges, sárgás-szürke homok van, 3 m. vastagságban (2. sz.), majd 2 m. vastag álrétegzésű hullámos kavics, kopott *Ostrea*-töredékekkel és *Congeria ungula-caprae* bubrészzeivel (3. sz.) Ez alatt 1 m. csillámos, homokos, sötét-kék agyag kövületekkel (4. sz.), majd $\frac{1}{4}$ m. hullámos, mar-

kasitgumókkal telt fekete agyag (5. sz.) és legalul 3—4 m. vastagon föltárt kék csillámos, homokos agyag (6. sz.), melynek különösen az alján nagy mennyiségben gyűjthetők a következő molluscumok:

- Congeria Neumayri*, ANDR.
Dreissensia serbica, BRUS.?
 " *sp. ind.*
Limnocardium decorum, FUCHS, *sp.*
Pisidium sp. ind.
Micromelania ? *laevis*, FUCHS, *sp.*
 " *Schwabenau*, FUCHS, *sp.*
Pyrgula bicipuncta, LÖRENT.
Valvata balatonica, ROLLE.
 " *fossaruliformis*, BRUS.
Melanopsis gradata, FUCHS.
 " *oxyacantha*, BRUS.
 " *ind. sp.*
 " *decollata*. STOL.?
 " (*Lyrcaea*) *cylindrica*, STOL.
 " " *Petrovići*, BRUS.
Vivipara Fuchsi, NEUM.
Neritina (Clithon) radmanesti, FUCHS.

E föltárás legfelső rétege és talán az alatta lévő 2. számú alluviumnak, a 3. számú diluviumnak tekinthető, míg a 4. számútól kezdve lefelé a többi pannoniai emeletbelinek. Lehet azonban, hogy a 2. sz. már diluvialis, a 3. sz. pedig levantei korú. A 4—6. számú réteg faunája egyező, miért is mind a három réteget a felső pannoniai emelet *Congeria rhomboidea* szintjébe helyezem és egykorúnak tartom a magyar általános hitelbank pusztá-szt.-lőrinczi téglagyárában föltárt ama rétegekkel, melyek az *Unio Wetzleri* dús rétegek alatt vannak.

A pannoniai emelet Duna balparti föltárásai között legnyugatibb az *erzsébetfalvai*, mely SZABÓ JÓZSEF térképén mint «Gubacsi téglagyár» szerepel. Itt a «Kőszén- és téglagyár társaság» agyagbányájában 20 m. vastagon vannak a rétegek föltárva.

Az 1—1·5 m. vastag humusz alatt 4—5 m. vastag zsákoskavics van (wadischer képződmény), kövült fákkal és állítólag nagy állatok lábsontjaival. (?) Ez a kavics teljesen olyan, mint a pusztaszt. lőrinczi és rákos-keresztúri levantei kavicsok felső részét tevő zsákoskavicsok (tölcsérekkel). Lehet, hogy ezek még szintén levantei korúak, nem lehetetlen azonban, hogy már diluviálisak vagy esetleg alluviálisak. Ez alatt 12—13 m. vastagon, vékony homok betelepülésekkel váltakozó, pannoniai kékes, majd feketés agyag van föltárva, melyből a téglát égetik. A rétegek 4—5 fokkal dőlnek DK felé.

Közvetlenül a zsákoskavics alatt 0·5 m.-es finom kvarchomok van, a mely délnyugat felé vastagodik 2·5 méterig. Ebből eddig a következő rossz megtartású molluscumokat gyűjtöttem:

Dreissensiomya sp.

Limnocardium Penslii, FUCHS sp.

„ sp. (cfr. *Rogenhoferi*, BRUS.)

Planorbis tenuis, FUCHS.

Micromelania? *laevis*. FUCHS sp.

„ *Bielzi*, BRUS sp.

Valvata variabilis, FUCHS.

„ *balatonica*, ROLLE.

Bár ebben a kis faunában semmi szintjelző alak sincs, mindamellett nem tartom lehetetlennek, hogy e homokréteg már a felső-pannoniai emelet *Congerina triangularis*-szintjébe tartozik, az alatta lévő s most föltárt réteggkomplexus pedig egész tömegében a mélyebb *Congerina ungula-caprae*-s szintbe. Ennek egy homokpadjából eddig a következő molluscumokat gyűjtöttem:

Congerina ungula-caprae, MÜNST. (igen sok.)

Dreissensiomya ind. sp. (gyakori.)

Phyllicardium complanatum, FUCHS sp. (1 drb.)

Limnocardium Penslii, FUCHS sp. (gyakori.)

„ *Steindachneri*, BRUS. sp. (1 töredék.)

Egyike a legérdekesebb leleteknek egy az agyag alsó részéből, 12 m. mélységből származó

Mastodon arvernensis, CR. és JOB.

jobb oldali állkapcsa két foggal, mely tavaly került a magyar kir. földtani intézetbe. Ez az eddig ismert legrégebb *Mastodon arvernensis*-lelet Budapest környékéről, amennyiben a felső-pannoniai emelet legmélyebb szintjéből, a *Congeria ungula-caprae szintjéből* való.

Mielőtt áttérnék a Duna jobb oldalán levő pannoniai képződmények megismertetésére, még két távolabbi lelethelyről akarok megemlékezni.

Az egyik a *Rákos-Keresztúrtól* délre lévő *Fuchs-féle tanya* melletti föltárás, melynek ugyancsak semmi nyoma a geológiai térképen. Itt körülbelül 14 év előtt nyitottak téglagyárat, melyet azonban újabban beszüntettek. Az agyagbányában a futóhomok alatt 1—2 méterre, pár méter vastag pannoniai korú sárgás homokos és kékes agyag van föltárva, melyben kövületeknek nyoma sincs.

A másik föltárás *Csömörön* van. Ezt a kerepesi viczinális építése alkalmával tárták föl 1903-ban, a csömöri állomástól kevéssel K-re, a vasútbevágást áthidaló kocsitút alatt. Ma azonban már teljesen be van növe füvel s így nem látható. Itt gyűjtöttem kemény kék agyagból a gyakori

Congeria Partschi, ČJŽEK példányait s a
Limnocardium több fajának rossz példányát.

A felső pannoniai emeletnek tehát ugyanaz a szintje van itt, melyet SCHMIDT és nyomán SCHAFARZIK említ Czinkotáról, azaz a legalsó szintje, melyet a budapest—rákosi téglagyárban a szarmata mészkőre települt rozsdás, durva homok s részben a fölé települő agyag képvisel.

Ezzel teljesen egyező kifejlődése van a pannoniai képződménynek a Duna jobb partján *Diósd (Óras)*-nál. Itt a falutól DNy-ra lévő téglagyár agyaggödreiből ugyancsak a

Congeria Partschi, ČJŽEK és
Limnocardium-ok rossz megtartású példányait gyűjtöttem.

Budafoknál a hegység keleti lábánál csak két kis foltja van a pannoniai képződményeknek, melyek az idő vasfogával daczolva még el nem mosattak. Így a *sőrőzdétől* kevéssel északra

lévő kis fónsikon — homokgödrökben — ugyancsak a pannoniai rétegek vannak föltárva. Itt az 1 m. vastag andesitrögöket és kopott ostreákat magába záró alluviális(?) kavics alatt 2 m. réteges, rozsdás, majd szürke kvarcshomok van sok rossz megtartású

Dreissensia auricularis, FUCHS-al.

Majd ezalatt legalább 6 m. csillámos, sárga, homokos, repedezett agyag, ugyancsak rossz megtartású

Limnocardium Penslii, FUCHS sp. és

Melanopsis ind. sp.-el.

Ez már a szarmata mészkövön fekszik, melybe a pinczék vannak mélyesztve.

Eme rétegsorozat nem tartalmaz semmi szintjelző kövületet, úgy hogy pontos korát — a felső pannoniai emeleten belül — ez idő szerint megállapítani nem lehet. Annyi azonban tény, hogy elegyesvízi.

Ezeiktől a diósi és budafoki pannoniai képződményektől teljesen eltérő kifejlődésűek a *Széchenyi-hegy* É-i végén és a *Pozsonyi hegy*-től D-re lévő *Háromkút-hegyen* 400—450 m. magasságban található pannoniai üledékek. Ezek 10—12 m. vastagok, alul agyagból, homokból és homokkőből állanak s több bányában vannak föltárva. Egy durvább és finomabb szemű homokkőpad határáról való a nemzeti múzeumban lévő s PETÉNYI S. JÁNOS-tól *Aceratherium incisivum*, KAUP.-nak meghatározott s HALAVÁTS-tól rosszul *Anthracotheium magnum*, CUV.-nak nevezett fogsor. Fölülről a Disznófő közeléből, a régi Vasváry-féle villa melletti útról, laza sárgás márgából való az a fauna, melyet HOFMANN KÁROLY meghatározásai nyomán SZABÓ J., SCHAFARZIK és HALAVÁTS említ. Ez saját gyűjtésemet hozzávéve a következő: *Melanopsis Entzi*, BRUS. (az irodalomban *acicularis*, non FÉR.), *Mel. Sturi*, FUCHS., *Mel. Sinzowi*, LÖRENT. (innen eddig ismeretlen), *Planorbis (Coretus) cornu*, BRONG. *Pl. baponicus*, HALAV. (az irodalomban *Pl. applanatus*, non THOM.), *Valvata obtusaeformis*, LÖRENT. (az irodalomban *Valv. piscinalis*, non MÜLLER.), *Hydrobia pseudocornea*, BRUS.?, *Succinea (Lucena) oblonga*, DRAP. var. *elongata*, A. BRAUN

(eddig innen ismeretlen), *Limnaea (Gulnaria) ovata*, DRAP. ? (innen eddig ismeretlen), *Limnaea (Gulnaria) sp. ind.* (eddig innen ismeretlen), *Neritina (Clithon) radmanesti*, FUCHS, *Neritina (Clithon) sp. ind.* (innen új); tehát 5 faj innen új.

Legfelül a hegy tetejét barnás, bitumenes édesvizi mészkő borítja, mint a pannoniai emelet legfiatalabb rétege. Ebben *helix*-ek, *planorbis*-ok és *limnaeus*-ok kőbelei vannak nagy mennyiségben. Én ezt a mészkövet forrásvizi tó üledékének tartom, olyanénak, mint a Lukácsfürdő tava. Ez megfelel a balatonmelléki édesvizi meszeknek (Szt.-Királyszabadja, Várpalota).

A pannoniai képződményeknek ez a budai hegységbeli kifejlődése a felső pannoniai emelet legfelső rétegeinek felel meg. A Disznófő melletti *Melanopsis Sturi*, FUCHS, *Mel. Entzi*, BRUS., *Valvata obtusaeformis*, LÖRENT. tartalmú réteg a *Congerina rhomboidea* szint édesvizi faciese; ugyanaz, mint az öcsi, nagyvázsonyi, fonyódi (4. számú réteg) és a Duna baloldali föltárásokban a hitelbank p.-szt.-lőrinczi téglagyárában föltárt rétegek az *Unio Wetzleri*-s homok kivételével, valamint a Kispest melletti téglagyárban föltárt *Congerina Neumayri*, ANDR. és *Mel. oxyacantha*, BRUS. tartalmú rétegek. Az édesvizi bitumenes mészkő pedig, a mint azt a balatonmelléki munkámban kifejtettem, az *Unio Wetzleri*-s legfelső szintnek szárazföldi faciese. Hogy a széchenyihegyi és háromkúthegyi alsó agyagok, homokok és homokkövek a felső pannoniai emeletnek mely szintjébe tartoznak, eddigi adataink alapján biztosan nem lehet megmondani. Nagyon valószínűnek tartom, hogy a *Congerina rhomboidea* szintjéhez tartoznak, bár az sem lehetetlen, miszerint részben a *Cong. triangularis* és *Cong. balatonica* szintjének felelnek meg.

A *Cong. Neumayri*, ANDR., *Melanopsis Entzi*, BRUS., *Mel. Sturi*, FUCHS, *Mel. oxyacantha*, BRUS. jellemezte édesvizi faciesnek egy klasszikus lelethelyét találtam Érdén, a magtár megett, a falu északnyugati házai között délfelé vezető kocsút mellett.¹

¹ Ma ez a föltárás már be van omolva, amint ez az 1906 április 11-iki kirándulásom alkalmával kitűnt.

Ebből a pár méter vastag, laza, homokos agyagból eddig a következő faunát gyűjtöttem:

- Congeria Neumayri*, ANDR.?
Dreissensia serbica, BRUS.
Limnocardium decorum, FUCHS sp.
 " *sp. ind.*
Unio Halavátsi, BRUS.
Limax fonyódensis, LÖRENT.
Helix striataformis, LÖRENT.
Xerophila ind. sp.?
Limnaea (Limnophysa) palustris, L. foss.?
 " (*Gulnaria*) *ind. sp. (cfr. ampla var. Mon-*
 nardi, HARTM.)
 " *Bouilleti*, MICH.?
Planorbis sp. (cornu, L.?)
 " *bakonicus*, HALAV.
 " *subptychophorus*, HALAV.
Melanopsis (Lyrcaea) cylindrica, STOL.
 " *gradata*, FUCHS.
Melanopsis Entzi, BRUS.
 " *Sturi*, FUCHS.
 " *oxyacantha*, BRUS.
Micromelania? laevis, FUCHS. sp.
 " *Schwabenau*, FUCHS.
Bithynia fedők.
 " ? *proxima*, FUCHS.
Vivipara Lóczyi, HALAV.?
Valvata balatonica, ROLLE.
Valvata fossaruliiformis, BRUS.
Neritina (Clithon) radmanesti, FUCHS.
 " " *sp. ind.*

Ezekon kívül halsontok, fogak, *ostracoda*-k. A növény-országot pedig *chara*-termés képviseli. Miután e rétegek dél-felé dőlnek, délen a fedő, északon pedig a fekvő rétegeket kell keresni. Sikerült is az érdi vasútbevéágásokban a — még innen ismeretlen — mélyebb *Congeria triangularis* jellemezte

szintet megtalálom. Ez alul finom, fehér, csillámos kvarcshomokból áll, mely fölé pados homokkő telepszik, növénylenyomatokkal. A homokból eddig a következő rossz megtartású kövületeket gyűjtöttem:

Congerina triangularis, PARTSCH.

Limnocardium sp. ind.

Melanopsis decollata, STOL.

Valvata simplex, FUCHS. var. *bicincta*, FUCHS.

Érdtől délre, Érd és Batta között, a Duna partján lévő magas hegyoldalon agyag, agyagos homok és laza homokrétegek váltakoznak, melyek a magtár megett föltárt rétegeknek a fedő rétegét teszik. Egy világos színű, laza, csillámos kvarcshomokpad telve van az *Unio Wetzleri*, DUNK. hatalmas példányaival, találtam azonban még, mint eddig innen ismeretlen fajokat:

Unio sp. (Zebebori, NEUM. alakköréből.)

Pisidium sp.

Helix sp. (Egy nagy fajnak búbrészei) és

Vivipara Fuchsi, NEUM.-t.

A tud. egyetem palaeontologiai gyűjteményében lévő *Mastodon Borsoni*, KAYS. fog, melyre HALAVÁTS is hivatkozik térképmagyarázó szövegében, nem az *Unio Wetzleri*-s homokból való — mint azt HALAVÁTS hiszi —, hanem annál magasabb szintből. Ugyanis Batta és Érd között találták 1880 szeptember 15-én a «Malomhegy» lecsuszamlása alkalmával. Tehát ott, a hol már csakis az *Unio Wetzleri*-s homoknál fiatalabb (e fölé települő) rétegek vannak föltárva. Ezekben a rétegekben találhatók a *Mastodon Borsoni* fogai a szomszédos battai téglagyár bányájában is.

★

Budapest környékén levantei korú képződményeknek csakis a Csömörnél, Czinkotánál, Rákos-Keresztúron és P.-Szt.-Lőrinczen 20—24 m. vastagságban kifejlődött, úgynevezett «mastodon kavics»-ot tartottuk. Ezek közül HALAVÁTS legalább a rákos-keresztúriakat és szt.-lőrinczieket a Duna hordalékának tartja.

Ha azonban CHOLNOKY nyomán nem tartjuk e kavicsokat nagy folyam hordalékainak, akkor más utat kell találni ezek idejutására. Habár e kavicsokat illető tanulmányoknak nagyon is a kezdetén vagyunk, azt hiszem, nem tévedek, ha ezeket Nógrádból származtatom.

Származtatom pedig az itteni alsó-mediterran korú rétegekből, melyek Nógrád déli részében, *Bánk*, *Tereske* stb. környékén durva kavicsból állanak. Hogy pl. a szt.-lőrinczi kavics mediterránból ered, bizonyítva látom azzal is, hogy benne olyan kopott fatörzseket találtam, melyekről TUZSON JÁNOS barátom szíves volt megállapítani, hogy a — mediterránunkra jellemző — *Magnolites silvatica*, TUZSON nevű növényhez tartozók. Az út pedig, melyen ezek Nógrádból Budapest környékére jutottak, az *Aszód* melletti mai Galga-folyó völgye lehetett. Ezt az utat, mint útmutató, jelzi az a mastodonos-kavics, mely Aszódon a fölszín alatt is megvan *Mastodon arvernensis*, CR. és JOB.-sel. E mastodonos-kavicsok levantei korára utaló — talán — egyetlen bizonyíték, hogy Szt.-Lőrinczen a legfelső pannoniai emeletbeli szint fölé, az *Unio Wetzleri*-s rétegek fölé települnek; mert az a második bizonyíték — a mire HALAVÁTS hivatkozik —, hogy bennök *Mastodon arvernensis*, CR. és JOB. és *Mastodon Borsoni*, KAYS. fogai találhatók, teljesen megszűnt bizonyíték lenni akkor, midőn az előbbieken már a felső pannoniai emeletből is említettem a *Mastodon arvernensis*-t. Különben ki kell emelnem, hogy a kavicsnak csakis a zsákosfélesége telepszik itt az *Unio Wetzleri* szintje fölé, a mely a pesti oldalon mindenhol megvan a pannoniai rétegek és humusz között.

Ha elfogadjuk HALAVÁTS-nak ama bizonyítékát valamely képződmény levantei korára, hogy a legfelső pannoniai réteg fedőjében forduljon elő s benne *Mastodon arvernensis* és *M. Borsoni* legyen, akkor ez alapon a Batta melletti téglagyár bányájában föltárt rétegek is levantei korúak, holott a térképen pannoniai korúaknak jelölte.

Lehet, hogy eme kavicsoknak felső, gyűröttnek látszó része — a zsákos kavics — fiatalabb, mint a zavartalanul települt alsó rész; ez lehet talán diluvialis vagy alluvialis, majd megállapítják a további kutatások. Az egész kavicsképződmény

diluvialis volta ellen bizonyít azonban az, hogy nem találjuk benne sehol a diluviumban annyira elterjedt mammutot, *Elephas primigenius*, BLUMB.-t. A Mastodon fogak pedig nem látszanak másodlagos helyen lévőeknek, a mennyiben legkevésbé sem kötöttak.

Ha a zsákos kavicsot fiatalabbnak, diluvialisnak vagy alluvialisnak vesszük, akkor ezt a kavicsanyagot már harmadlagos helyen lévőnek kell tekintenünk s javarészt az északabbra lévő levantei kavicsokból származtatni; azért mondom javarészen, mert a finomabb anyag származhatik a Budapest környéki mediterránból is észak felől. Ez esetben a térképen a diluvialis vagy alluvialis kavics fogja elfoglalni a nagyobb tért, mert nemcsak valamennyi levantei kavics tetején feltüntetendő lenne, hanem ott is, a hol ilyen nincs jelölve, mint *Erzsébetfalván, Kispesten, Kőbányán, Rákoson és Budafokon*.

Nagyon érdekes és vitás ezeknek a zsákos kavicsoknak, illetve magoknak ezeknek a gyűrődésszerű zsákoknak a keletkezése.

A München környéki diluvialis kavicsokban gyönyörű e fajta gyűrődések és zsákok láthatók, itt azonban ez igen könnyen magyarázható a jégtömeg tovamozgásából és nyomásából. Itt azonban, ahol gleccser-nyomokat nem ismerünk, más magyarázatot kell keresni. A látszólagos gyűrődések egy része árok-szerű (wadiszerű) barázdáknak a keresztmetszete, melyeket a szárazon heverő kavicsfelületbe időszakos rohanó patakok mélyesztettek. Ezzel azonban nem lehet a tölcéséreknek a keletkezését megmagyarázni, melyeknek szélén a kavicsok függélyesen állanak és agyagos, homokos anyaggal vannak kitöltve. INKEY ezeket a diluvium előtti gyenge emelkedések okozta csuszamlásoknak tudja be. Nem tudom, nem lehetne-e ezek keletkezését úgy magyarázni, hogy a kavicscsal helyenként váltakozó homokrétegeket, lencséket a kavicsok közé beszivárgó s ezek között lefutó vizek kimosták s az így keletkezett hézagba a felső rétegek beomlottak. Ilyen módon a rétegek közé zárt kavicsok függélyes helyzetbe kerülhettek. Lehet különben, hogy többféle erő működött közre e zavarok létrehozásában. A folytatandó vizsgálatok azonban minden bizonynnyal tisztázní fogják e kérdést.

Míg irodalmilag e kavicsokból csakis három gerinczesnek a maradványát ismerjük, úgymint a *Mastodon arvernensis*, CROIZ és JOB., *Mastodon Borsoni*, KAYS. és *Rhinoceros sp.*-t, valamint a növényországból a *Quercinum Staubi*, FELIX-t, addig én a következőket gyűjtöttem:

Mastodon arvernensis, CROIZ és JOB.

Dinotherium giganteum, CAUP.

Rhinoceros sp. ind.

Hipparion gracile, CAUP.

Capreolus cusanus, CROIZ és JOB.

Palaeoryx nov. sp. és a növényországból

Magnolites silvatica, TUZSON.¹

★

Ha tehát az eddig elmondottakat egybevetjük, látjuk, hogy «*Die pannonische Fauna von Budapest*» című munkámnak megjelenése előtt alig tudtunk valamit Budapest környékének pannoniai képződményeiről. Tudtuk, hogy *Budapest-Rákoson* és *Budapest-Kőbányán* a szarmata mészkőre rozsdás kavics települ, majd pedig erre hatalmas vastagságban homokerekkel váltakozó agyag. S ezekből ismertünk 10 kövületet. *P.-Szt.-Lőrinczről* INKEY nyomán agyagoknak és homokoknak váltakozó rétegeit ismertük 5 kövülettel s később HALAVÁTS nyomán az *Unio Wetzleri* szintjét ugyancsak 5 kövülettel. A *Széchenyi-hegy* (Svábhegy)-ről tudtuk, hogy alul homokok, homokkövek képviselik a pliocént *Aceratherium incisivum*-mal; majd a *Disznófőnél* egy réteg 6 faj molluscummal, legfelül pedig édesvizi mészkő, néhány rossz kövülettel. *Erzsébetfalváról*, *Budafokról* és *Diósd (Óras)-ról* semmit sem, *Érdről* pedig két kövületet ismertünk mindössze. E rétegeknek sztratigrafiai viszonyai teljesen ismeretlenek voltak a mai napig, a mennyiben nem ismertük sem ezeknek a rétegeknek egymáshoz, sem egyéb hazai ismert vidék rétegeihez való viszonyát; míg nekem sikerült itt a pannoniai emeletnek hazánkból eddig ismert összes szintjeit kimutatni, részben a rétegekből gyűjtött gazdag fauna alapján,

¹ TUZSON JÁNOS. Földtani Közlöny. XXXVI. kötet. 1—3. füzet. Jegyzőkönyv 71. lap.

részben a települési viszonyokból. Úgy hogy ma már bizvást el lehet mondani, hogy a Budapest környéki pliocén kifejlődése a hazában egyike a legérdekesebbeknek és faunája egyike a leggazdagabbaknak.

1902-ben kimutattam *Budapest-Kőbányáról* egy új föltárás alapján a még innen eddig ismeretlen alsó pannoniai emeletet 42 faj kövülettel. Megállapítottam, hogy a budapest-rákosi és a budapest-kőbányai téglagyárak rétegei a bennök nagy mennyiségben lévő *Congeria Partschii*, Czjž. és *Cong. ungula-caprae*, MÜNST. alapján a felső pannoniai emelet legalsó szintjét formálják. S míg eddig *Rákosról* a «KÖSZÉN- ÉS TÉGLAGYÁRTÁRSULAT» bányájából irodalmilag csak 5 fajból álló faunát ismertünk, addig én 28-at, *Kőbányáról* pedig «BUDAPESTI GÖZTÉGLAGYÁR R.-T» bányájából az ismert 3-ma szemben 31-et ismertettem, közöttök több új fajt is. Az irodalmilag még eddig ismeretlen rétegek közül e szintbe tartoznak még a kőbányai téglagyári bányákban föltárt agyag- és homokrétegek: így a VIRAVA-féle 10 fajjal, a SEIFERT-féle 20-szal, a KERAMIA-GYÁR bányájában föltárt rétegek 26 fajjal, valamint a «Köszén- és Téglagyár társulat» erzsébetfalvi téglagyári bányájának rétegei 6 fajjal; továbbá a rákosiak, úgy mint a LECHNER-féle 14, az ÖRLEY-féle 13, és a «BUDAPESTI GÖZTÉGLAGYÁR R.-T.» rákosi bányája 20 fajjal. Ide tartoznak végre még a *Congeria Partschii*, Czjž. tömeges föllépése alapján a SCHMIDT-től ismertetett czinkotai rétegek, valamint az eddig ismeretlen csömöri föltárásból való rétegek, kb. 3 fajjal és a DIÓSD mellett föltárt rétegek kb. szintén 3 fajjal. Ez a szint a főváros felé a legbelső övet formálja *Csömörtől Diósdig* nagy körívben. E szintnek a Balaton mellékén a *tihamyi Gödrösoldal* legalsó rétege felel meg.

Már 1902-ben megjelent munkámban említettem, hogy *Rákos* és *Kőbánya* között a *Cong. ungula-caprae* jellemezte szint fölött megvan a magasabb *Cong. triangularis* jellemezte szint is *Cong. triangularis*-sal és sok rossz megtartású *Limnocardium*-mal. E szint tetemesebb vastagságban a következő külső övben van meg. Budapest környékéről azonban még eddig ismeretlen volt, daczára annak, hogy tetemes vastagságban s

több helyen van föltárva, faunája gazdagságra nézve pedig vetekedik az eddig ismert — e szintbeli — leggazdagabb lelet-helyeinkkel. E szint két, évtizedek óta művelt bányában van föltárva: a kőbányai egyesült téglá- és cementgyár részvénytársaság bányájában és a p.-szt.-lőrinczi SOUHEITEL-féle bányában. Az elsőben 16 kövületes réteg van eddig föltárva, ezek közül a 11. számúból az ostracodákon kívül 40 fajt, a 2. számúból 39-et határoztam meg eddig. A SOUHEITEL-félében is több réteg van föltárva e szinten belül. Az alsó homokkőpadra települt rétegből 20 fajt, egy magasabb vivipara-dűsből 8-at, az e fölötti rozsdás *Cong. balatonica* dús homokból 16 fajt, az e fölötti barna agyagrétegből pedig *Hipparion gracile*t gyűjtöttem. Ez a legfelső agyagréteg lehet, hogy már a magasabb szinthez tartozik. A *Congeriu triangularis* és *Cong. balatonica* jellemezte szintbe tartozik az érdi vasúti bevágásban föltárt réteggel. Továbbá valószínűleg e szintbe tartozik az erzsébetfalvai téglagyár felső rétege, sőt esetleg a budafoki sörfőzde melletti föltárás alsó *Limnocardium Penslii* tartalmú rétege is. Nem lehetetlen, hogy a széchenyihegyi agyag, homok és homokkő komplexus alsó része részben szintén e szintbe tartozik, bár inkább hiszem, hogy az egész magasabb szintbe való. E réteggel egykorúak a tihanyi Fehérpart I—III. rétege, a tihanyi Gödrösoldal felső rétege, a fonyódi Fonyód-hegy alsó 1. sz. rétege, a Radmanesten föltárt — s eddig ismert — rétegek stb.

Még inkább kifelé eső övben vannak a magasabb, úgynevezett *Congeria rhomboidea* szintnek rétegei. Nem ugyan a tipusos kifejlődésben *Congeria rhomboidea*-val, hanem ennek édesvizi faciese, minő a Balaton mellékén az öcsi, nagyvázsonyi és fonyódi Fonyód-hegy 4. számú rétege *Congeria Neumayri*, ANDR., *Helix (Techeocampylaea) Doderleini*, BRUS., *Melanopsis Entzi*, BRUS., *Mel. oxyacantha*, BRUS., *Planorbis (Coretus) cornu*, BRONG. stb.-val. Ebbe a szintbe tartoznak a hitelbank p.-szt.-lőrinczi téglagyárának agyagbányájában föltárt — gerinces faunát tartalmazó — rétegek a felső *Unio Wetzleri*-s homok és kavics kivételével. Továbbá az irodalmilag teljesen ismeretlen kisperesti téglagyár agyagbányájának összes kövületes rétege

18 molluscum-mal. Ez az előfordulás még a geologiai térképen sincs jelölve. A széchenyihegyi agyag, homok és *Aceratherium incisum* tartalmú homokkő rétegösszletnek legalább a felső része a Disznófü mellett gyűjtött 12 fajból álló faunával. A budafoki sörfőzde mellett lévő föltárásnak talán a felső *Dreissensia auricularis* dús homokja. Egyik legtipusosabb kifejlődése e szintnek a még eddig ismeretlen érdi agyag, a magtár megetti föltárásban 28 fajból álló faunával.

A pannoniai emeletnek legfelső szintje itt is, mint a Balaton mellékén, az *Unio Wetzleri*-s felső homok és ennek szárazföldi faciesét formáló édesvizi mészkő. Budapest környékéről ismerjük e szintet a hitelbank p.-sztl.-lőrinczi bányájából 13 fajból álló faunával és Érdről a Battára vivő dunaparti út föltárásából 5 fajból álló faunával. Ezeknek megfelel a Balaton mentén a *peremartoni Somlódomb* és *zsidi Öreghegy* uniós homokja és a *fonyódi Fonyód-hegy* 5. számú rétegének alja. A szárazföldi faciese ennek az *Unio Wetzleri*-s homoknak az a forrás-tavi bitumenes édesvizi mészkő, mely a Széchenyi-hegy tetejét borítja s megfelel a balatonmelléki *szent-király-szabadjai* és *várpalotai* édesvizi meszeknek.

A levantei emeletbe eddig egyedül azokat a kavicsokat vettük, melyek *Rákos-Keresztúron* és *P.-Szt.-Lőrinczen* vannak 20—24 m. vastagságban kifejlődve. Hogy ezeknek a felső része, a zsákos-kavics, szintén levantei korú-e, vagy már diluviumi, vagy esetleg alluviumi, azt a későbbi vizsgálatok fogják megállapítani. Ha még mind levanteieknek fognak bizonyulni, akkor a levantei rétegeket a geologiai térképen egészen más-kép fog kellene kijelölni. Mert ide kell akkor venni a kőbányai *VIRAVA*-, *SEIFERT*- és *HOFHAUSER*-féle, továbbá a rákosi *LECHNER*, *ÖRLEY* és Budapesti gőztéglagyár r. t. téglagyári bányákban, valamint az erzsébetfalvai és kisésti bányákban a pannoniai rétegek fölé települő zsákos-kavicsokat is, sőt talán a budafoki sörfőzde melletti föltárás kavicsát is. Azonkívül pedig *Czinkótától Csömörig* és *Tarcsáig* az egész területet levanteinek fog kellene rajzolni. Sőt a *Batta* körüli agyagok és homokok is legnagyobb valószínűséggel levanteiek.

Faunisztikai szempontból igen érdekes a foraminiferáknak és az emlősöknek a szerepe.

Foraminiferákat ismertünk eddig az *alsó pannoniai* emeletből *Budapest-Kőbányáról*, (a sertéshizlalda kútjából), *Tinnyéről*, *Szócsánból* és a *Peremartoni-Erdőből*. A *felső pannoniai* emelet *Congeria triangularis* és *Cong. balatonica* jellemezte szintjéből *Tihanyból*, a felső *Congeria rhomboidea* és *Cong. spinicrista* jellemezte szintből pedig *Nagy-Mányokról* és *Kurd-ról*. Eddig tehát csakis a legalsó *Congeria ungula-caprae* és a legfelső *Unio Wetzleri* jellemezte szintjéből nem voltak foraminiferák ismeretesek. Nekem újabban sikerült a *Cong. ungula-caprae* jellemezte szintben találni képviselőit a Keramiai téglagyár agyagbányájában; úgy hogy most már csakis a felső pannoniai emelet legfelső szintjéből nem ismerünk még foraminiferákat.

Az emlősök közül különösen a *Mastodon*-nak és *Hipporion*-nak a szerepe érdekes a budapestkörnyéki pliocénben. A *Mastodon arvernensis* CR. és JOB. eddig teljes biztonsággal csakis a levantei kavicsból volt ismeretes és én most kimutatom a felső pannoniai emeletnek legalsó szintjéből, az erzsébetfalvai *Congeria ungula-caprae*-s szintből. Valószínűleg e fajtól ered az a metszőfog-töredék is, mely Kőbányáról a VIRÁVA-féle bányából való. Ha az a példány, melyet HALAVÁTS említ, tényleg Kőbányáról való, akkor szintén a *Congeria ungula-caprae*-s szintből ered s azt bizonyítja, hogy e faj a felső pannoniai kor elejétől élt itt s felnyúlt a levantei korba. A *Mastodon Borsoni*, KAYS.-t csakis a levantei kavicsokból ismerjük és Battáról az *Unio Wetzleri*-s homokfedőjéből, úgy hogy ezért is hajlandó vagyok e battai rétegeket levanteieknek tartani. A *Dinotherium giganteum*, KAUP.-ot eddig csakis a kőbányai *Congeria ungula-caprae*-s rétegekből ismertük, míg én újabban *P.-Szt.-Lőrinczen* megtaláltam a levantei kavicsban is. A *Hipparion gracile*, KAUP. eddig csakis a levantei kavicsból volt itt ismeretes, nekem sikerült *P.-Szt.-Lőrinczen* már a felső pannoniai emelet rétegeiben is megtalálni a *Congeria triangularis* és *Congeria rhomboidea* szintek határán. A budapesti faunában eddig kizárólag felső pannoniai kori alak a *Castor* sp. *Tragocerus Lóczyi* nov. sp.

	Budapest környéke	Balaton melléke	Az ország egyéb részei
Levanteri emelet	Pusztai sztl.-lőrinczi és rákos-keresztúri kavicsok <i>Mastodon arvernensis</i> és <i>Mastodon Borsoni</i> -val.	Bazaltok, bazalttufák.	Bazalt javarészben. Székelyföldi rétegek. Nagyalld (mélységi rétegek).
Felső pannoniái emelet	UnioWetzeri színtje Hitelbank p. sztl.-lőrinczi bányájának 2. és 3. rétege, az érdi magasfal rétegei részben. Mint száraz-földi faciese a széchenyi-hegyi bitumenes édesvizi mészkő.	Peremartoni Somlódomb és zsidó Öreghegy uniós homokja. A fonyódi 5. sz. réteg alja. Továbbá a sztl.-királyszabadjai és várpalotai édesvizi mészkő.	Ács, Baltavár.
	Cong. rhomboides színt édesvizi faciese A Hitelbank p. sztl.-lőrinczi téglagyári bányájának legtöbb rétege a gerinces faunával. A kispesti föltárás rétegei. Az érdi alsó színt a magtár megett. A széchenyihegyi agyag, homok (<i>Aceratherium incisivum</i> -mal), homokkő és disznófői agyag. Budafoki (sörfőzdei föltárás) felső <i>Dreissensia auricularis</i> tart. rétege?	Fonyód (4. sz. réteg), Öcs, Nagy-Vázsony mint édesvizi facies. Továbbá Költse, Túr, Tab, Karád, Bábon, Bálványosmalom, Nagy-Berény, Szárazd, Jankovicspuszta, Sándorpuszta, Rádipuszta, Lengyeltóti, Öreglak, Sümeg, Zsid-Fertőshegy, Ságvár (Lukadomb), Hegymagas, Keszthely, Arács.	Elegyesvízű faciese: Hidasd, Kurd, Üszög, Szegzárd, Árpád, Nagymányok, Kékesd, Ibafa, Bakóca, Magyar-Soros, Magyar-Szék, Szászvár, Bükkösd, Sormás, Királyhegye stb.
	Cong. triangularis és Cong. balatonica színtje Budapest Kőbányán a Gőztéglagyár bányájának felső rétege; az Egyesült Tégláz és Cement gyár r. t. bányájának, valamint a p. sztl.-lőrinczi Souheitel-féle bánya összes rétege. A budafoki (sörfőzdei föltárás) alsó rétege (?) A széchenyihegyi rétegeknek talán az alja. Érdi vasúti bevágás rétegei.	Tihany, (Fehérpart 1—3 réteg, Gödrös-oldal felső réteg), Fonyód (Fonyódomb 4. sz. réteg), Balaton-Földvár, Sió-Maros, Enying, Berénd stb.	Radmanest stb.
	Cong. Partschii és Cong. ungula caprae színtje Rákos (Kőszén- és téglagy. társ., Lechner- és Örely-féle, valamint a Bpesti gőztéglagyár). Kőbánya (Virava-Seifert- és Hofhauser-féle, Budapesti gőztéglagyár és Keramiai gyár r. t.) Erzsébetfalvai téglagyár alsó rétegei. Czinkota-Csömör. Diósd.	Tihanyi Gödrös-oldal legalsó rétege. Vörös-Berény (Balaton víz színén).	Somló-Vásárhely.
Alsó pannoniái em.	A budapest-kőbányai Eigel-féle sertéshizlalda kutjából kikerült fauna foraminiferákkal. <i>Congeria scrobiculata</i> , <i>Cong. Mártonfi</i> , <i>Orygoce-ras-ok</i> , <i>Papyrotheca</i> , <i>Melanopsis impressa</i> , <i>Mel. Matheroni</i> stb.-vel.	Peremartoni erdő.	Tóth-Györk, Szócsán, (részben) Tinnye, Percsen, Szilágy-Somlyó, Nadalbest stb.

és *Aceratherium incisivum*, KAUP., míg kizárólag levantei eddig a *Mastodon Borsoni*, KAYS, *Palaeoryx nov. sp.* és *Rhinoceros sp.*

Könnyebb áttekinthetőség czéljából az előző lapon látható táblázatban foglalom össze Budapest környékének pannóniai és levantei képződményeit, párhuzamba állítva a balatonmelléki és az ország egyéb helyéről irodalmilag ismert érdekebb lelethelyekkel.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 április 2.-án tartott üléséből.)

A HALMAZELMÉLET ALAPJAI ÉS A CONTINUUM PROBLÉMÁJA.

KÖNIG GYULA rendes tagtól.

(Második közlemény.)

A következő sorok szorosan azon fejtegetésekhez csatlakoznak, melyek tőlem ugyanezen cím alatt néhány hónap előtt a Math. és Természettud. Értesítőben (XXIII. k., 410. l.) megjelentek. De az ott 3. szám alatt adott bizonyítási módot itt nem használom.¹ Helyébe lép, változatlanul maradt véleményem helyességének bizonyítására, egy új módszer, a mely lényegileg a «végesen definiált» fogalom szigorításán és általánosításán alapszik.

Egy elvi kijelentést akarok azonban még előrebocsátani. A halmazelmélet alapjaiban oly tények formalizálásáról és törvényesítéséről van szó, melyeket öntudatunk benső szemlélete nyújt; úgy hogy «tudományos gondolkodásunk» maga is tárgya tudományos gondolkodásunknak. Ez az összefüggés, mely a halmazelmélet közt egyrészt és a logika meg ismerettan közt másrészt fennáll, el nem kerülhető és már az aritmetika elemeiben fellép.

Bármily hasznos is a logikának ez irányban matematikai analógiára történt algebraizálása, ez maga még nem segíthet át a nehézségeken. A tudományos gondolkodásunk alapjául szolgáló «tények» és «törvények» az eddiginél nagyobb szigorúsággal vizsgálandók és mindenekelőtt oly tudományág teremtetendő, melyet a «matematikai physika» analógiájára a logikai evidencia elméletének neveznék.

¹ E következtetési mód az itt adott új fogalmak alapján módosítandó és módosítható is.

1. A continuum végesen definiálható elemei megszámlálható halmazt alkotnak, s így a következő módon ω -típusban írhatók:

$$\begin{array}{cccccccc} (a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1k}, & \dots) \\ (a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2k}, & \dots) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{k1}, & a_{k2}, & a_{k3}, & \dots, & a_{kk}, & \dots) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad (\text{I})$$

Az a_{ik} -k itt tetszőleges pozitív egész számok, minthogy a continuumot mint az

$$(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$$

dolgok összességét definiáltuk, hol a_k tetszőleges pozitív egész szám. Az (I) sor segítségével most már a CANTOR-féle diagonális eljárás mintájára készített

$$a_k = a_{kk} + d \quad (\text{II})$$

törvénnyel egy új $(a_1, a_2, \dots) = a^{(d)}$ continuumelem definiálható, ha $d > 0$ meghatározott pozitív egész szám. De $a^{(d)}$ definíciója csak akkor nem tartalmaz ellentmondást, ha felteszszük, hogy $a^{(d)}$ az (I) sorozatban nem fordul elő, azaz nem végesen definiált continuumelem. Ha $a^{(d)}$ (pld. a n -edik helyen) (I)-ben előfordulna, akkor $k=n$ esetére (II) nem volna kielégíthető, minthogy $a_n = a_{nn}$ és (II): $a_n = a_{nn} + d$ -t követeli. Úgy látszik tehát, hogy $a^{(d)}$ definíciója, melyet végeesszámú jellel jellemeztünk, önmagának ellentmond és így, mint definíció, lehetetlen. Másrészt azonban ép annyira lehetetlen helytelennek tartani azt a közvetlenül szemléletünkből merített «tényt», hogy ezen diagonális-módszerrel egy continuumelem tényleg *képezhető*. De épen ez a rendkívül érdekes paradoxon vezet a halmazelméletben használandó logikai módszerek alapvető mélyítéséhez. A diagonális eljárás *értelme* világos és megtámadhatatlan; ellentmondás csak azon követelés által keletkezik, hogy ezt az *értelmet* véges definíció *alakjában* kelljen kifejezni. Ez a *követelés* nem teljesíthető.

Ha azonban — az értelem megváltoztatása nélkül — oly módon változtathatnók definícióink alakját, hogy *ne* maradjon

véges definíció, akkor az $a^{(d)}$ continuumelem valóságos, ellentmondást nem tartalmazó definíciójával volna dolgunk. «Nyelvünket» kell tehát tökéletesíteni, mint tulajdonképpen mindig, mikor tudományos gondolkozásunk lényeges szigorításáról van szó. Ez a következőképpen történhetik.

A véges definíciókhoz hozzáveszünk bizonyos «pseudovéges» definíciókat, a melyek (megszámlálhatóan) végtelen sok jelből (szavak, betűk) álljanak, és pedig oly módon, hogy egy bizonyos n -edik helytől kezdve (n véges rendszám) csak egy bizonyos $(N. V.)^1$ jel szerepeljen. Hogy most már ezen jelsorozatoknak is tulajdonítsunk valami értelmet, megállapodunk abban, hogy ez a pseudo-véges definíció értelmére nézve æquivalens legyen azon véges definícióval, mely valamennyi $(N. V.)$ jel elhagyásával keletkezik, vagyis azzal, a mely a pseudovéges definíció első n jeléből áll. Egy ily végtelen jelhalmaz tehát akkor és csak akkor logikus definíció, ha a megfelelő véges jelsorozat, melyet a pseudo-véges definíció *főrésze*-ének is fogunk nevezni, értelmére (de nem okvetlenül alakjára) nézve is önkény és ellentmondás nélkül egy continuumelemet definiál.

Ily módon egy véges definícióból különböző pseudovéges definíciók keletkezhetnek az által, hogy az $(N. V.)$ jelt ω -szor, $\omega+1$ -szer, $\omega+2$ -szer, ... általában α -szor teszszük hozzá, hol α a második számosztály, $Z(\aleph_0)$ tetszőleges száma.

2. Ezek szerint vannak a continuumnak oly elemei, melyeket definíciójuk véges főrésze tökéletesen meghatároz, de alakjára nézve e definíció csak akkor nem tartalmaz ellentmondást, ha a H főrészhöz az $(N. V.)$ jelt ω -szor hozzáfűzzük. Egy ily continuumelem definícióját a $H(N. V.)^\omega$ «kép» teljesen jellemzi; de ezen kép magától a definíciótól szigorúan megkülönböztetendő, mivelhogy ez utóbbinak, hogy formailag se tartalmazzon ellentmondást, végtelen sok jelből kell állani. Az ily continuumelemek, melyeknek definíciója egy ily $H(N. V.)^\omega$ képpel van megadva, megszámlálható halmazt alkotnak a végesen definiált elemek hozzávétele után is. Hiszen különböző elemekhez különböző főrészek tartoznak és ezek

¹ $(N. V.) =$ ne varietur.

megszámlálhatók. Véges főrészüik által tehát ezen elemek ω -typusban vannak adva. Erre az ω -typusú megszámlálható halmazra, mely részletesen kiírva:

$$\begin{array}{ccccccc} (b_{11}, & b_{12}, & \dots, & b_{1k}) \\ (b_{21}, & b_{22}, & \dots, & b_{2k}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (b_{k1}, & b_{k2}, & \dots, & b_{kk}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad (\text{III})$$

most ismét alkalmazható a fenti diagonális eljárás. A

$$b_k = b_{kk} + d$$

törvény, minthogy véges, formailag nem definiál ellentmondás nélkül egy $(b_1, b_2, \dots) = b^{(d)}$ elemet. De ez az ellentmondás most akkor sem szűnik meg, ha az $(N. V.)$ jelt ω -szor hozzátevé gondoljuk, minthogy a definíciónak ez esetben még ily alakban is elő kellene (III)-ban fordulni, pld. az n -edik helyen, úgy, hogy $b_n = b_{nn} + d$ nem teljesíthető. Ha azonban $(N. V.)$ -t $\omega + 1$ -szer vagy «többször» teszszük hozzá e törvényhez, akkor ellentmondás nélküli definíciót nyerünk. Ilyen módon továbbhaladva, oly véges jelsorozatokhoz jutunk, melyek «csak» $(N. V.)$ -nek $\omega + 2$ -szeres, $\omega + 3$ -szoros, ... hozzátevésével lesznek ellentmondás nélküli definíciók.

Ha most már α a legkisebb oly tulajdonságú száma a második számosztálynak, hogy egy meghatározott véges jelsorozat, H ellentmondás nélküli definíció lesz, ha $(N. V.)$ -t α -szor hozzáfűzzük, akkor H -t α -adrangúnak nevezzük. Az így keletkező pseudovéges definíciót

$$H (N. V.)^\alpha$$

jellel fogjuk jelölni. Ezt természetesen ismét csak e definíció egy jellegzetes «képének» kell tekintenünk, minthogy magának a definíciónak végtelen sok jelből kell állani. Ha valamely α -hoz tartozik egy ily H , akkor azt mondjuk, hogy α *első fajtájú* száma a $Z(\aleph_0)$ számosztálynak. Ez tehát akkor következik be, ha van oly H , hogy

$$H (N. V.)^\alpha$$

ellentmondásnélküli definícióinak a képe, míg

$$H(N. V.)^\alpha$$

mindig tartalmaz formális ellentmondást, hacsak $\alpha' < \alpha$.

3. Az eddigi fejtegetések végül arra az eredményre vezetnek, hogy a második számosztálynak megszámlálhatónak kellene lenni, ha mint halmaz, azaz mint fogalmilag tökéletesen elkülönített elemek összessége volna felfogható. Bebizonyítjuk t. i., hogy ezen feltevés mellett egyrészt az első fajtájú számok megszámlálhatók, s másrészt, hogy a második számosztály minden száma első fajtájú.

Valóban: a véges H jelsorozatok halmaza megszámlálható s így ugyanez érvényes az első fajtájú számok halmazára nézve is, minthogy a definíció szerint más α -hoz más H tartozik.

Ha másrészt a második számosztálynak nem volna valamennyi száma első fajtájú, akkor volna egy legkisebb másodfajtájú: α_0 , míg ω , $\omega+1$, stb. első fajtájú. Ez azonban ellentmondásra vezet. Azon véges jelsorozatok t. i., melyeknek valamely második osztályú szám a fentiek értelmében rangja, megszámlálhatók (minthogy az összes véges jelsorozatok megszámlálhatók) s így a következőképen ω -típusban írhatók: H_1, H_2, \dots

Legyen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ a megfelelő rangszám. A

$$H_1(N. V.)^{\alpha_1}, \quad H_2(N. V.)^{\alpha_2}, \dots \quad (IV)$$

pseudovéges definíciók által definiált continuumelemek legyenek:

$$\begin{array}{c} (a_{11}, a_{12}, \dots) \\ \dots \dots \dots \\ (a_{i1}, a_{i2}, \dots) \\ \dots \dots \dots \end{array} \quad (IV')$$

A (IV')-ra vonatkoztatott diagonális törvényt:

$$a_k = a_{kk} + d$$

H_0 -val jelöljük. Most már

$$H_0(N. V.)^{\alpha_0}$$

nem tartalmaz ellentmondást, minthogy feltevésünk szerint (IV) nem tartalmaz $H(N. V.)^{a_0}$ alakú definíciót. Minden a_0 -nál kisebb a_i előfordul a (IV) sorozatban s így minden $H_0(N. V.)^{a_i}$ tartalmaz ellentmondást, ha $a_i < a_0$. S így a definíció szerint H_0 rangja: a_0 , a mely tehát első fajtájú szám. Azon feltevés, hogy a második számosztály második fajtájú számot is tartalmaz, ily módon ellentmondásra vezetett.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 január 22.-én tartott üléséből.)

A MAKROSEISMIKUS RENGÉSEK FELDOLGOZÁSA.

KÖVESILIGETHY RADÓ 1. tagtól.

A földrengés epicentrumától számított mintegy ezer kilométeren túl a rengés közvetlenül érzékeinkkel már nem érezhető; csak seismographok jelzik a talaj mozgását, ha ez, jellemző állandóinál fogva, nagyobb távolságra egyáltalán el tud hatolni.

Az epicentrum szomszédsága a makroseismikus terület. Korlátozott volta mellett czélszerűbb, ha benne a rengési elemek levezetésére szolgáló zárt egyenleteket sorba bontjuk. Egyrészt e területről többnyire úgy is csak nagyon mérsékelt pontosságú időadatok vannak rendelkezésünkre, másrészt meg elkerülhetjük a teljes egyenletekben szereplő segédvariabilisokat, melyek közvetlenül a rengést közelebbről jellemző adatokkal helyettesíthetők. Ez egyúttal mélyebb betekintést nyit a jelenség lefolyásába és könnyebben ítélhető meg, hogy a közeli rengések megfigyeléséből mily következtetések vonhatók. Épen ezért ezen értekezésem több, mint régebbi eredményeimnek egyszerű sorbabontása.

A makroseismikus megfigyeléseknél végre egy újabb elem lép fel, melyet a távolrengések feljegyzéseinél mindeddig nélkülöztünk: az erősség fogalma, a mely, noha csak becslésen alapul, mint az astronomiában a csillagok fényességének becslése, mégis fontos felvilágosítást adhat. Nevezetesen remélhető, hogy a fészek mélységének ismeretéhez, a mely eddigi tapasztalataim szerint pusztá időadatokból meg sem közelíthető, útmutatást fog adhatni.

A rengés teljes jellemzésére szükségünk van a hodograph

és az emersioszög egyenletére, a seismikus hibaegyenletre és a rengés erősségének kifejezésére. Egyenleteink levezetésében felesleges ismétlések elkerülése végett természetesen «A föld-rengési elemek számolása»¹ című értekezéséből indulok ki; a szögletes zárójeles számok az ott levezetett egyenletekre vonatkoznak.

A makroseismikus hodograph és az emersioszög.

Mint hogy a makroseismikus terület sugara csak ritkán haladja meg a 10° -ot, a hodograph [41a és 41b] egyenlete közvetlenül az epicentrumtól számított φ gömbi távolság hatványai szerint fejthető sorba. A legegyszerűbbé válik a számolás, ha a redukált ψ távolság közvetítése nélkül egyenesen a felszíni sebességnek [69]

$$v \frac{dt}{d\varphi} = \cos e \quad 1)$$

egyenletéből indulunk ki, melyben v a rengésnek a Föld felszínére átrámított valódi sebessége, $\frac{d\varphi}{dt}$ a felszín mentén számított látszó sebessége és e az emersioszög.

Megjegyzem röviden, hogy ezen egyenlet teljesen független valamely specialis rengési elmélettől: egyszerűen a sugártörés ismert kifejezése, a mennyiben a fellépő két sebesség e és o emersioszög alatt kilépő sugarat jellemez.

Az emersioszög [11b]

$$\operatorname{tg} e = \frac{1}{\rho \sin \varphi} \left[\sqrt{(1-q)(1-q\rho^2) - q^2\rho^2 \sin^2 \varphi} - (1-q)\rho \cos \varphi \right] \quad 2)$$

egyenlettel volt adva, melyben q a rengésnek jellemző állandóját, ρ pedig a fészeknek a Föld középpontjától számított és a fűdsugar egységeiben kifejezett távolságát jelentette.

Ezen egyenletből mindenek előtt $\cos e$ számolandó. Ha a fellépő nevezőt rationalissá tettük, és ha behozzuk r és r'

¹ Math. és Term. Ért. XXIII. köt. 32—68. l.

jelzéssel a fészekből és az antifocusból, azaz a rengés tengelyén a fészek symmetriapontjából az észlelő helyhez vont sugarakat, akkor

$$\cos^2 e = \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{(1-q) r^2 r'^2} [1 + \rho^2 - 2q\rho^2 \cos^2 \varphi + \\ + 2\rho \cos \varphi \sqrt{(1-q)(1-q\rho^2) - q^2 \rho^2 \sin^2 \varphi}], \quad (3)$$

és könnyű számolás után:

$$\cos e = \frac{\rho \sin \varphi}{\sqrt{1-qr'r'}} \left[(r'+r) \sqrt{1 - \frac{q}{4} (r'-r)^2} + \right. \\ \left. + (r'-r) \sqrt{1 - \frac{q}{4} (r'+r)^2} \right], \quad (4)$$

a hol a mondottak értelmében

$$r^2 = 1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2 \quad \text{és} \quad r'^2 = 1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2. \quad (5)$$

Most

$$\cos \phi = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cos \varphi \quad (6)$$

egyenlettel φ helyett új ϕ távolsági adatot vezetünk be. Akkor 5)-ből

$$r = \sqrt{2} \sqrt{1+\rho^2} \cos \frac{\phi}{2} \quad \text{és} \quad r' = \sqrt{2} \sqrt{1+\rho^2} \sin \frac{\phi}{2} \quad (7)$$

következik, és 4) a következő alakban írható:

$$\cos e = \frac{\rho \sin \varphi}{\sqrt{2} \sqrt{1-q} \sqrt{1+\rho^2} \sin \phi} \\ \left| \left(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{q}{2} (1+\rho^2) (1 - \sin \phi)} + \right. \\ \left. + \left(\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{q}{2} (1+\rho^2) (1 + \sin \phi)} \right|. \quad (8)$$

Ha végre egyszerűség kedvéért

$$\frac{q}{2} (1+\rho^2) = q' \quad \text{és} \quad \frac{q'}{1-q'} = z', \quad (9)$$

akkor

$$\cos e = \frac{\sqrt{2} \sqrt{1-q'} \sin \varphi \rho}{\sqrt{1-q} \sqrt{1+\rho^2} \sin \varphi} \left[\cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \frac{1}{2} x' \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (1-x') \sin^4 \varphi - \dots \right) + \sin \frac{\varphi}{2} \left(\sqrt{1+x' \sin \varphi} - \sqrt{1-x' \sin \varphi} \right) \right]. \quad (10)$$

Mindenekelőtt látni, hogy $2\rho < 1 + \rho^2$ miatt φ mindig reális, de a fészkek csekély mélysége folytán ρ annyira közel áll az egységhez, hogy a 6) egyenlet φ közvetlen meghatározására nem alkalmas. Alább e hiányon könnyen fogunk segíteni. Hasonlóan q' is csak egy mélységrendű mennyiséggel különbözik q -tól, mely állandó egyáltalán

$$0.764 \geq q > -\infty$$

határokhoz van kötve. A gyakorlati alkalmazásban a felső határt gyakran egyszerűen $\frac{3}{4}$ -del fogom azonosítani.

Ha a rengés az egész Földön elterjedhet, akkor q az $\frac{1}{2} \geq q > -\infty$ határokhoz, ha ellenben korlátozott, akkor

$$0.764 \geq q > \frac{1}{2}$$

határokhoz van kötve. Az első esetben, nem tekintve a mélység csekély befolyását, x' a ± 1 határok között mozoghat, és a 10) egyenletben szereplő gyök kifejtése föltétlenül konvergens. A második esetben x' mindig 1 és 3.2 között van, és a sorfejtés legalább is $\varphi = 18^\circ$ -ig konvergens.

Ezek után 10) helyébe

$$\cos e = \frac{\sqrt{2} \sqrt{1-q'} \rho \sin \varphi}{\sqrt{1-q} \sqrt{1+\rho^2} \sin \varphi} \left[\cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x'^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x'^4 \sin^4 \varphi - \dots \right) + \sin \frac{\varphi}{2} \left(\frac{1}{2} x' \sin \varphi + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x'^3 \sin^3 \varphi + \dots \right) \right] \quad (11)$$

írható, és ha még a 6)-ból következő

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1+\rho^2}{2\rho} \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} \quad (12)$$

is az 1) egyenletbe vitetik, előáll a hodograph egyenlete:

$$v(t-T) = \psi = \sqrt{\frac{1-q'}{1-q}} \sqrt{\frac{1+\rho^2}{2}} \int_0^\phi \left[\cos \frac{\phi}{2} \left(1 - \sum_1^n \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (4n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 4n} x'^{2n} \sin^{2n} \phi \right) + \right. \\ \left. + \sin \frac{\phi}{2} \sum_1^n \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (4n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (4n+2)} x'^{2n+1} \sin^{2n+1} \phi \right], \quad (13)$$

melyben T nyilván az időt jelenti, melyben a lökés a fészekben kipattant. Az integral alatt kifejezhetők végre a trigonometriai függvények ϕ hatványai szerint haladó sorral, és az egyszerű, de kissé hosszadalmas számolás eredménye:

$$v(t-T) = \psi = \sqrt{\frac{1-q'}{1-q}} \sqrt{\frac{1+\rho^2}{2}} \left\{ \phi - \frac{1}{24} (1-x')^2 \phi^3 + \right. \\ \left. + \frac{(1-x')^2}{1920} (1-18x'-15x'^2) \phi^5 - \frac{(1-x')^2}{322560} (1-180x'+150x'^2 + \right. \\ \left. + 1260x'^3 + 945x'^4) \phi^7 + \dots \right\}. \quad (14)$$

A rengéseknél fellépni szokott minimalis sebesség $2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Az utolsó tag elhagyása tehát $x' = -1$ esetén $\phi = 61^\circ$ -nál, $x' = 3$ esetben pedig $\phi = 17^\circ$ -nál ér el a hodographban 1° hibát, holott a gyakorlatban a bizonytalanság — hacsak műszerek adataira nem támaszkodhatunk — gyakran percekre is rüg. A levezetett sor érvényességi határa tehát messze túlmegy a gyakorlati alkalmazás határain.

A következőkben abban fogunk megállapodni, hogy ϕ^8 és $(1-\rho)^4$ elhanyagolható. Ha tehát ϕ vagy φ elsőrendű mennyiség, akkor a fészek mélysége h másodrendűnek tekintendő, és a nyolcadrendűek elhanyagolandók.

A mondottak szerint

$$\rho = 1 - h \quad (15)$$

téve, lesz 9)

$$q' = q \left(1 - h + \frac{h^2}{2} \right), \quad (16)$$

és ha röviden most is

$$z = \frac{q}{1-q}, \quad (17)$$

akkor

$$x' = x \left[1 - (1+x)h + \frac{1}{2}(1+3x+2x^2)h^2 - x(1+x+x^2)h^3 \right], \quad (18)$$

és 14)-ben Φ^3 coefficientense h^2 , Φ^5 tényezője h -ig fejtenő ki, míg Φ^7 -ben x' már magával x -val azonosítható. A gyakorlati alkalmazásban azonban előnyösebb, ha ezen helyettesítést nem is tesszük, hanem Φ egyes hatványainak coefficientenseit x' és h argumentumokkal kettős bejáratú táblából vesszük. Végre áll még:

$$\sqrt{\frac{1-q'}{1-q}} \sqrt{\frac{1+\rho^2}{2}} = 1 - \frac{1-x}{2} h + \frac{1}{8} (1-4x-x^2) h^2 + \\ + \frac{1}{16} (1+x)^3 h^3 + \dots \quad (19)$$

Φ kiszámítására a 6) egyenlet, mint említettük, nem alkalmas. Ha ezt azonban az egységből levonjuk, majd hozzáadjuk, és a két eredményt elosztjuk, akkor nyerjük a

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi - \varphi}{2} = \left(\frac{h}{2-h} \right)^2 \cot \frac{\Phi + \varphi}{2} \quad (20)$$

egyenletet, a melyből Φ és φ különbsége néhány igen gyorsan célhoz vezető próbálgatással pontosan adódik. Első közelítésül a jobb oldalon $\Phi = \varphi$ vehető.

Az előírt pontosságot szem előtt tartva, közvetlen egyenletet is nyerhetünk. Ha ugyanis 6) mindkét oldalán a cosinust az iv hatványai szerint sorbafejtjük, majd a sort Φ^2 -ra nézve megfordítjuk, lesz

$$\Phi^2 = \varphi^2 \left(1 - \frac{h^2}{3} \right) + h^2 + h^3, \quad (21)$$

mely egyenlet szintén nyolczadrendű mennyiségekig pontos. Ebből Φ kifejtése maga az epicentrum környékén már kevésbé convergens, és csak nagyobb távolságban adhatna jó eredményt.

A 21) egyenletből látni, hogy hatodrendű mennyiségekig

ϕ ugyanaz, mint sík földön az észlelő állomás távolsága a fészektől, és e szerint a hodograph kezdőtagja is egyszerűen sík földön az egyenesvonalú terjedést jellemzi.

★

Az emersioszög egyenlete, noha ϕ -ben is kifejezhető, legkényelmesebben φ függvénye gyanánt állítható elő. A 2) egyenlet számolásra nem alkalmas, mert $\operatorname{tg} e$ két közel egyenlő mennyiség különbségéül adódik. A határozatlanság alkalmas sorfejtés által elenyészteszhető. Legyen e célra [48]

$$k = \frac{q\rho}{\sqrt{(1-q)(1-q\rho^2)}}, \quad (22)$$

és ebből folyólag

$$\begin{aligned} \frac{k^m}{x^m} = & 1 - m(1+x)h + \frac{m}{2} [m-1 + (2m+1)x + (m+2)x^2] h^2 - \\ & - \frac{m}{2} \left[\frac{(m-1)(m-2)}{3} + m^2x + (m+1)(m+2)x^2 + \right. \\ & \left. + \frac{(m+2)(m+4)}{3} x^3 \right] h^3 + \dots, \end{aligned} \quad (23)$$

akkor nyilván h^2 -rendű mennyiségekig k azonos x -val. E mennyiség bevezetése után $\operatorname{tg} e$ kifejezhető $\sin \varphi$ hatványai szerint convergens sorba:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} e = & \left(\frac{q}{k} - 1 + q \right) \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{2} (qk - 1 + q) \sin \varphi - \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (qk^3 - 1 + q) \sin^3 \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} (qk^5 - 1 + q) \sin^5 \varphi - \dots, \end{aligned} \quad (24)$$

a mely numerikus számolásra már igen kényelmes. Ha azonban a trigonometriai függvényeket még tovább sorba fejtjük, a következő igen alkalmas egyenletre jutunk:

$$\operatorname{tg} e = \frac{a_{-1}}{\varphi} + a_1 \varphi + a_3 \varphi^3 + a_5 \varphi^5 + a_7 \varphi^7 + \dots, \quad (25)$$

melyben

$$\begin{aligned}
a_{-1} &= h + \left(1 - \frac{x}{2}\right) h^2 + \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right) h^3 + \\
&\quad + \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 - \frac{5}{8} x^3\right] h^4, \\
a_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+3x}{6} h + \frac{2-x-9x^2}{12} h^2 + \\
&\quad + \frac{2-x+4x^2+15x^3}{13} h^3, \\
a_3 &= \frac{1}{24} \cdot \frac{1-x}{1+x} + \frac{7}{360} (1+15x) h + \frac{1}{720} (2-271x-585x^2) h^2, \\
a_5 &= \frac{1}{240} \cdot \frac{1-x}{1+x} + \frac{31}{15210} (1+63x) h, \\
a_7 &= \frac{17}{40320} \cdot \frac{1-x}{1+x}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Az a coefficientensek is x és h argumentummal kényelmes táblázatokba hozhatók, melyek e számolását igen egyszerűvé teszik. Mint a hodographnál, itt is megemlíthetjük, hogy $tg e$ kezdőtagja $\frac{h}{\varphi}$ ugyanaz, mint ha a rengés sík földön egyenesben terjedne.

A seismikus hibaegyenlet.

A [66] hibaegyenlet tetemesen egyszerűsödik, ha nem az epicentrum t_e idejéből, hanem a rengésnek a fészekből való kipattanásának T idejéből indulunk ki. Az eljárás gyakorlatilag is teljesen indokolt, a mennyiben amaz cseppet sem biztosabban ismert, mint emez. Numerikus számolásaim hasonlóképp mutatták, hogy czélszerűbb, ha a v sebesség helyett a τ időt vezetjük be, a mely alatt a rengés a földugarat befutná. A két mennyiség kapcsolata

$$v = \frac{1}{\tau}, \tag{27}$$

és ezen megjegyzések tekintetbe vételével lesz:

$$\begin{aligned}
\Psi \Delta \tau + \Delta T - \cos a \cos e \tau \Delta b_0 - \sin a \cos b_0 \cos e \tau \Delta l_0 + K \tau \frac{\Delta q}{1-q} - \\
- H \tau \frac{\Delta h}{1-h} = \Delta t,
\end{aligned} \tag{28}$$

a hol a Δ karakteristikájú betűk azon hibákat jelentik, melyekkel a valósággal szemben a terjedéssébségre, a kipattanás idejére, az epicentrum földrajzi szélességére és hosszára, a q állandóra és a fészkek mélységére tett közelítő feltevések eltérnek. Δt azon hiba, melyet a feltételezett értékekkel számolt seismikus ephemeris észlelés-számítás értelemben hátrahagyott, a pedig az észlelő állomás azimuthja az epicentrumra vonatkozólag. A K és H coefficientsek adva vannak [66]

$$K = \frac{1}{2q \sqrt{4q(1-q)}} [(1-2q') \operatorname{tg} \phi - (1-2q) \phi], \quad (29)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}} [(1-2q') \operatorname{tg} \phi - 2q_0 \cot \phi], \quad (30)$$

által, a hol rövidség kedvéért

$$q_0 = q \frac{1-\rho^2}{2} \quad (31)$$

jelentésű.

A ϕ segédmenyiség könnyen eliminálható azon megjegyzés alapján, hogy K és H coefficientsek közeli rokonságban vannak a [41b] és [42d] egyenletekkel:

$$\psi = v(t-T) = \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}} [\phi + (1-2q') \operatorname{tg} \phi], \quad (32)$$

$$\sin e = \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}} [(1-2q') \operatorname{tg} \phi + 2q_0 \cot \phi]. \quad (33)$$

A 30) és 33) egyenletek egyesítése ad

$$\begin{aligned} \sin e + H &= \frac{2(1-2q')}{\sqrt{4q(1-q)}} \operatorname{tg} \phi, \\ \sin e - H &= \frac{4q_0}{\sqrt{4q(1-q)}} \cot \phi, \end{aligned}$$

tehát szorzatukból következik:

$$H^2 = \sin^2 e - \frac{2q_0(1-2q')}{q(1-q)}. \quad (34)$$

Ezen eredmény annyira egyszerű, hogy $\sin e$ sorfejtése φ hatványai szerint semmi előnnyel nem járna. Egy és ugyanazon rengésnek valamely határozott phasisa számára H^2 és $\sin e$ különbsége egy h -rendű állandó mennyiség.

Ha $\sin e + H$ értékét a 32) egyenletbe beviszszük, belőle ψ -t számoljuk és 29)-be helyettesítjük, lesz

$$K = \frac{1-q}{2q} (\sin e + H) - \frac{1-2q}{2q} \psi, \quad (35)$$

úgy, hogy most H és K esupa ismert mennyiséggel van kifejezve.

A számítás menete teljesen ugyanaz, mint a távoli rengések esetén. A földrengés hat eleme számára (b_0 , l_0 , h , T , ν , q) hypotheticus értékeket fogadunk el, melyekkel e és Ψ számoltatik. A feltevések hibáját a hibaegyenlet megoldásával javítjuk.

Ha q negatív, akkor a 29), 30), 32) és 33) egyenletekben mindenütt $i\psi$ teendő ψ helyébe, a mi által a goniometriai függvények a megfelelő hyperbolikus függvényekbe mennek át. Végformuláinkban azonban az imaginarius eltűnt, ezek tehát elliptikus ($q > 0$) és hyperbolikus ($q < 0$) sugarakra egyaránt használhatók.

A megoldás biztonsága mindig kívánatossá teszi, hogy a 28) hibaegyenletek homogenekké tétessenek, azaz, hogy valamennyi ismeretlen legnagyobb coefficientse az egység legyen. Általánosság kedvéért felteszem, hogy minden egyenlet előzőleg a neki megfelelő megfigyelés p súlyának négyzetgyökével végig szoroztatott, a mi által az egyes egyenletek egyenlő súlyúakká váltak. Ezek után a következő utasítások könnyen érthetők.

Legyen:

$$\sqrt{p} \Psi = A; \quad \sqrt{p} \cos a \cos e = B; \quad \sqrt{p} \sin a \cos e = C; \\ \sqrt{p} = D; \quad \sqrt{p} K = E; \quad \sqrt{p} H = F; \quad \sqrt{p} \Delta t = N; \quad (36)$$

és legyen A_0 az A sorozat, B_0 a B sorozat... N_0 az N számsorozat abszolút értékre nézve legnagyobb tagja.

Legyen továbbá

$$a = \frac{A}{A_0}; \quad b = -\frac{B}{B_0}; \quad c = -\frac{C}{C_0}; \quad d = \frac{D}{D_0}; \quad e = \frac{E}{E_0};$$

$$f = -\frac{F}{F_0}; \quad n = \frac{N}{N_0}; \quad 37)$$

akkor a megoldandó, most már homogén és egyenlő súlyú egyenletrendszer

$$ax + by + cz + dt + eu + fw = n, \quad 38)$$

a mely annyi egyenletből áll, a hány megfigyelésünk van.

Ha ezen rendszert a legkisebb négyzetek módszere szerint megoldottuk, akkor

$$\Delta\tau = \frac{N_0}{A_0} x; \quad \Delta b_0 = \frac{180}{\pi} \frac{N_0}{B_0} \frac{y}{\tau}; \quad \Delta l_0 = \frac{180}{\pi} \frac{N_0}{C_0} \frac{z}{\tau} \sec b_0;$$

$$\Delta T = \frac{N_0}{D_0} \tau; \quad \Delta q = (1-q) \frac{N_0}{E_0} \frac{u}{\tau}; \quad \Delta h = (1-h) \frac{N_0}{F_0} \frac{w}{\tau} \quad 39)$$

egyenletek adják a keresett javításokat. Δb_0 és Δl_0 fokokban van kifejezve, az időt rendszeren percekben adjuk, a hossz-egység a földsugár.

Megjegyzendő még, hogy a hibaegyenletben a $\Delta\tau$, ΔT másodrendű tag szigorúan tekintetbe van véve, ha a 39) egyenletekben a nevezőben álló τ helyett mindig ezen egyenletek elsejének megoldása után ismert javított τ , tehát a feltételezett τ helyett $\tau + \Delta\tau$ vétetik.

Ellenőrző egyenletek.

A hibaegyenletek megoldása a legkisebb négyzetek módszerében adott ellenőrző egyenletekkel lépésről-lépésre ellenőrizhető, de a hibaegyenletek helyes voltát természetesen általánosságban ellenőrizni nem lehet. A mi esetünkben azonban igen egyszerű módon, számba sem jövő munkatöbbséggel már a hibaegyenletek helyessége is megvizsgálható, a mi a számítás hosszadalmassága mellett eléggé meg nem becsülhető előny.

Δt definíciója folytán írhatunk

$$\Delta t = t - T - T\tau,$$

a hol t a megfigyelt idő, T , τ , Ψ a feltételezett értékek, illetőleg a velük számolt hodograph értéke. A súlyok négyzetgyökével való szorzás után az egyenletek valamennyi észlelő állomásra összegezendők, és 36) és 37) alapján

$$\sqrt{p} \Psi = A_0 a, \quad \sqrt{p} \Delta t = N_0 n$$

által helyettesítendő. Az eredmény

$$[\sqrt{p} t] - T[\sqrt{p}] - \tau A_0 [a] = N_0 [n], \quad (40)$$

és ezen egyenlet — az előző számítás helyességét feltéve — szigorúan van kielégítve.

A 36) és 37) egyenletekből következik továbbá:

$$\sqrt{p^3} \cos^2 e = B_0^2 b^2 + C_0^2 c^2$$

és 34)-ből

$$\sqrt{p^3} \sin^2 e = F_0^2 f^2 + \frac{2q_0(1-2q')}{q(1-q)} \sqrt{p^3}.$$

E két egyenlet összegéből e kiesik, és marad némi összevonás után:

$$\frac{\rho^2(1-q\rho^2)}{1-q} \sqrt{p^3} = B_0^2 b^2 + C_0^2 c^2 + F_0^2 f^2.$$

Ha ezen egyenleteket valamennyi állomásra összegezzük, nyerjük a második ellenőrző egyenletet:

$$\frac{\rho^2(1-q\rho^2)}{1-q} [\sqrt{p} \sqrt{p}] = B_0^2 [bb] + C_0^2 [cc] + F_0^2 [ff]. \quad (41)$$

A 35) egyenlet szintén szolgáltatja $\sin e$ értékét. A homogen egyenletek számára behozott jelölésekkel

$$\sqrt{p} \sin e = \frac{1-2q}{1-q} A_0 a + \frac{2q}{1-q} E_0 e + F_0 f$$

alakra hozható. A fent ugyancsak $\sqrt{p} \sin e$ számára adott egyenlettel együtt adja a harmadik ellenőrzőt:

$$\begin{aligned} A'^2 [aa] + E'^2 [ee] + 2A'E' [ae] + 2A'F_0 [af] + \\ + 2E'F_0 [ef] = \frac{2q_0(1-2q')}{q(1-q)} [\sqrt{p} \sqrt{p}], \end{aligned} \quad (42)$$

mely egyenletekben

$$A' = \frac{1-2q}{1-q} A_0, \quad E' = \frac{2q}{1-q} E_0. \quad (43)$$

Látnivaló, hogy az ellenőrzés csak azon coefficienseket használja fel, a melyek a megoldásban úgyis szerepelnek. $\cos a$ és $\sin a$ előjele azonban hibás lehetne még, a nélkül, hogy ezt a 41) egyenlet megérezné. Ha e felől is controlle-gyenlet révén akarnánk megbizonyosodni, ugyancsak a 36) és 37)-ből folyó

$$\sqrt{p} \cos a \cos e = -B_0 b; \quad \sqrt{p} \sin a \cos e = -C_0 c$$

egyenletekből kellene kiindulnunk. Szorzatuk és négyzetük különbsége ad:

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 \cos^2 e \sin 2a} &= 2B_0 C_0 bc \\ \sqrt{p^2 \cos^2 e \cos 2a} &= B_0^2 b^2 - C_0^2 c^2, \end{aligned}$$

és az összes állomásokra kiterjesztett összegezés után:

$$\begin{aligned} [\sqrt{p} \sqrt{p} \cos^2 e \sin 2a] &= 2B_0 C_0 [bc], \\ [\sqrt{p} \sqrt{p} \cos^2 e \cos 2a] &= B_0^2 [bb] - C_0^2 [cc], \end{aligned} \quad (44)$$

melyek számára azonban a baloldali coefficiensek külön számolandók.

Ha az egyenletek mind egyenlő súlyúak, akkor $p = 1$ tehető, és

$$[\sqrt{p}] = [\sqrt{p} \sqrt{p}] = m$$

a megfigyelések számával.

Megjegyezhető még, hogy a 34) és 35) egyenletek nem csupán a makroseismikus rengésre, hanem általánosságban is érvényesek.

A fészek mélysége elhanyagolható.

Ezen eset tanulságos voltánál fogva külön említést érdemel, és különben omlásos rengéseknél az epicentrumtól már néhány kilometerrel használható a teljesebb kifejezés helyett.

Ha tehát $h=0$, akkor $q'=q$, $\rho=1$, $x'=x$ és $\phi=\varphi$, és a hodograph egyenlete egyszerűen

$$v(t-T)=\psi=\varphi-\frac{1}{24}(1-x)^2\varphi^3+\frac{(1-x)^2}{1920}(1-18x-15x^2)\varphi^5- \\ -\frac{(1-x)^2}{322560}(1-180x+150x^2+1260x^3+945x^4)\varphi^7+\dots \quad 45)$$

A hibaegyenlet coefficiensei lesznek

$$H=\sin e \quad \text{és} \quad K=\frac{1-q}{2q}2\sin e-\frac{1-2q}{2q}\psi, \quad 46)$$

és mindkettő φ hatványai szerint könnyen sorbazontható. E célra kiindulunk a [11a] egyenletből

$$\rho^2\left[\cos^2(\varphi-e)+\frac{q}{1-q}\sin\varphi\right]=\cos^2e,$$

a mely $\rho=1$ és

$$\sin\varphi'=x\sin\varphi \quad 47)$$

esetén egyszerűen

$$e=\frac{\varphi-\varphi'}{2} \quad 48)$$

egyenletet adja. Ezek szerint

$$\varphi'=x\varphi-\frac{x}{6}(1-x^2)\varphi^3+\frac{x(1-x)}{240}(1+x-9x^2-9x^3)\varphi^5-\dots \quad 49)$$

és

$$e=\frac{1-x}{2}\varphi+\frac{x}{12}(1-x^2)\varphi^3-\frac{x(1-x^2)}{240}(1-9x^2)\varphi^5+\dots \quad 50)$$

továbbá

$$\sin e=\frac{1-x}{2}\varphi-\frac{1-x}{48}(1-6x-3x^2)\varphi^3+\frac{1-x}{3840}(1-100x-10x^2+ \\ +220x^3+145x^4)\varphi^5-\dots \quad 51)$$

Ezek szerint φ^5 hatványig bezárólag haladva áll

$$K=\frac{1-x^2}{12}\varphi^3-\frac{1-x}{240}(5+2x-13x^2-10x^3)\varphi^5, \quad 52)$$

és ha még

$$\frac{\Delta q}{1-q}=\frac{\Delta x}{1+x} \quad 53)$$

ismeretlent hozzuk be, lesz a hibaegyenlet

$$\Delta t \tau + \Delta T - \cos a \cos e \tau \Delta b_0 - \sin a \cos e \cos b_0 \tau \Delta l_0 + \\ + \frac{1-x}{12} \varphi^3 \tau \left[1 - \frac{1}{20} (5-3x-10x^2) \varphi^2 \right] \Delta x - \tau \sin e \Delta h = \Delta t. \quad 54)$$

Ezen egyenletekből igen érdekes következtetések vonhatók. x határai -3 és $+1$, és mindkét esetben úgy $\frac{(1-x)^2}{24}$, mint $\frac{1-x}{12}$ abszolút érték szerint $\frac{1}{6}$. $x=1$ esetén, mely $q = \frac{1}{2}$ miatt a földfelületmenti terjedésnek felel meg, a hodographnak természetesen csak első tagja marad meg. $v=2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ feltevés mellett a hodograph és a hibaegyenlet Δx tényezőjének φ^3 -tól függő tagja $531 \cdot \varphi^3$ maximumban, és ez 1^s -t tesz ki, ha $\varphi=7^\circ$, ellenben 1^m -t, ha $\varphi=28^\circ$. Tehát még másodperczre pontos időadat esetén is a hodograph az epicentrum körül 800 km-en belül az egyenes terjedéstől eltérést nem mutat, és e szerint természetesen a q állandó ilyen területen belül meg nem határozható. Ha a pontosság az időben 1 percz, akkor q csak oly megfigyelésekből vezethető le, melyek az epicentrumtól 3000 kilométeren túl fekszenek. Ezzel szemben a 25) és 26) egyenlet tanúsága szerint az emissioszög nagyon érzékeny a q állandó iránt, és különösen hyperbolicus sugarak esetén lényegesen eltérő az egyenes terjedésnek megfelelő értékétől. Az eltérés nagy közelítéssel

$$\Delta \text{tg } e = \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \varphi$$

által adott.

A közeli rengések időadatai ennél fogva a Föld belsejének physikai megismeréséhez megbízható adattal nem járulnak, és gyarlóbb megfigyelések esetén még a terjedésssebesség megállapítása is kétes lesz. Legfeljebb a geológiát érdeklik, és rengési raj esetén talán a fészkek vándorlása révén némi geotektonikai útmutatást adhatnak. Annál fontosabb és sürgősebb tehát oly észlelés-módszer létesítése, a mely az emersioszög ismeretére vezet.

Ez utólag is igazolja, mennyire szükséges volt a nagy földrengések egységes megfigyelése és feldolgozása, a mit a

Földrengéskutató Nemzetközi Szövetség, és ennek keretében a magyar Földrengés-Számoló Intézet végez.

A földrengés erőssége és intenzitása.

A. CANCELI a II. nemzetközi seismologiai értekezleten földrengési skálát mutatott be, mely a rengésnek a FOREL-MERCALLI-féle fokozatok szerint becsült erősségéhez a maximális gyorsulást adja.¹ E skálát szerencsém volt az Akadémiai Értesítőben ismertethetni.

Noha CANCELI észrevette, hogy a számtani haladványban növekedő erősségi fokokhoz geometriai haladványban emelkedő gyorsulások tartoznak, úgy tetszik, mégis kikerülte figyelmét, hogy a FECHNER-féle psychophysikai törvénynek immár seismikus téren is érdekes igazolásával van dolgunk.

E szerint a rengés G becsült fokozata és I' maximális gyorsulása között

$$G = x + y \lg I' \quad (55)$$

vonatkozás áll fenn, melyben x és y még ismeretlen, a megfigyelésekből levezetendő állandók.

Minthogy a CANCELI-féle skála minden fokozathoz az intenzitásnak egy alsó és felső határértékét adja, pl. $G=5$ számára $I'=25-50 \frac{\text{mm}}{\text{sec}^2}$, a számítást külön a felső, és külön az alsó határra vonatkozólag végeztem. A skála 12 fokozatának megfelelőleg van tehát az első esetben 12, a második esetben 11 egyenletünk, minthogy az 1 erősségnek alsó határa nincs megadva. A legkisebb négyzetek módszerével számolt normal-egyenletek a felső határra nézve

$$\begin{aligned} 12 \cdot 0000x + 26 \cdot 3876y &= 78 \cdot 0000 \\ 26 \cdot 3876x + 73 \cdot 7504y &= 218 \cdot 9278, \end{aligned}$$

melyek megoldása

$$x = -0 \cdot 1296, \quad y = 3 \cdot 0149,$$

¹ Verhandl. d. zweit. internat. seism. Konferenz. Leipzig, 1904. p. 281—283.

és az alsó határon a normalegyenletek

$$11\cdot0000x + 22\cdot3876y = 77\cdot0000$$

$$22\cdot3876x + 57\cdot7504y = 193\cdot3154,$$

a melyekből

$$x = 0\cdot8871 \quad \text{és} \quad y = 3\cdot0036$$

következik.

A két y érték nyilván azonos, a két x ellenben egy rengési fokozat felső és alsó határának átlagos különbségét adja. A két megoldás arithmetikai közepe

$$G = 0\cdot3787 + 3\cdot0092 \lg I',$$

a miből ($G = 0$ esetén $I' = 0\cdot7484 \frac{\text{mm}}{\text{sec}^2}$) következik, mint azonos küszöbérték, melyet a skála definíciójára alkalmazott seismometerek általában megéreztek. Az alsó határ megoldásából ezen határérték $0\cdot507 \frac{\text{mm}}{\text{sec}^2}$, a modern seismometerek maximális érzékenységeinek mértéke.

Valamint a csillagászatban a csillagrend becslése és a csillag fényének egyidejű lemérése által nyert coefficient, melynek értéke $0\cdot280$ és $0\cdot452$ között ingadozik, önkényesen $0\cdot400$ -nak állapítják meg, a mire az így nyert

$$0\cdot4 (m - m_0) = - \lg \frac{I}{I_0}$$

úgynevezett Pogson-féle egyenlet megfordítva a csillagrend értelmezésére szolgál, úgy a seismológiában az adatok közeli egyezésénél fogva még sokkal nagyobb joggal

$$G = 3 \log \frac{I}{I_0} \quad (56)$$

írható, és a képlet most a becsült erősségnek egészen szigorú értelmezésére alkalmazható.

A nehézség gyorsulását $G = 12\cdot35$ fokozatnál érjük el, ellenben az eddig észlelt minimalis gyorsulás, $0\cdot507 \frac{\text{mm}}{\text{sec}^2}$, a

—0.51 erősségi foknak felel meg. A csillagászatban egészen analog módon negatív csillagrend is van.

OMORI szerint a rengés érezhetővé válik az emberre nézve, ha $\Gamma = 17 \frac{\text{mm}}{\text{sec}^2}$, a mi $G = 4.07$ foknak felel meg. Ez a makroseismikus terület pontos határolását engedi meg, és a határ a 4 erősségi fokozatnál vehető.

Az 56) egyenletet a korán elhalt tudós emlékére, a kihez személyes ismeretség is fűzött, CANCANI-féle egyenletnek óhajtanám nevezni.

A CANCANI-féle egyenlet igen csinos alkalmazást enged meg. Ha G_0 -al jelöljük az erősséget az epicentrumban, a hol a gyorsulás Γ_0 , akkor

$$G - G_0 = 3 \lg \frac{\Gamma}{\Gamma_0}. \quad (57)$$

Ámde egyenes terjedés esetén, melyet előbbi fejtegetéseim alapján a makroseismikus területben feltehetünk, a gyorsulások visszásan aránylanak. mint a fészektől való távolságok; e szerint

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{h}{r}, \quad (58)$$

ha r az észlelő állomás távolsága a focustól, a mely a közelítés ugyanazon fokával, ϕ -vel azonosítható. Sík földön továbbá

$$\frac{h}{r} = \sin e, \quad (59)$$

és ezért

$$G - G_0 = 3 \log. \sin e. \quad (60)$$

Nagyon természetes, hogy ezen egyenletnek nem fogunk túlságos súlyt tulajdonítani, míg G csak becslés révén ismeretes. A belőle 59) nyomán származtatott mélység azonban, minthogy egyenleteinkre csekély behatással van, *minden esetben* olyan közelítést ad, a mely a hibaegyenletben a Δh javítás felvételét teljesen feleslegessé teszi.

Az eddig észlelt leghevesebb rengésben $G_0 = 12.37$, és az előbbiek szerint a makroseismikus terület határán $G = 4$. Ebből

következik 60)-ból $r=617h$, vagyis a leghevesebb rengés is a mélységnek legfőlebb 600-szorosára tehető.

A legtöbb nagy földrengésnél $G_0 = 9$, és ezért $\frac{r}{h} = 46$. A makroseismikus terület sugara ritka esetben fogja meghaladni a 2000 kilométert. Ha ismerjük az erősséget az epicentrumban és a makroseismikus terület határát, akkor ebből a fészek mélysége szintén megbecsülhető.

Nem vettem figyelembe, hogy a Föld anyaga a rengés energiáját elnyeli. Ha α az absorptiocoeficiens oly értelemben, hogy a rengés intenzitása az R fűdsugár befutása után $10^{-\alpha}$ lett, akkor az 58) egyenletben helyesebben

$$\frac{r}{r_0} = \frac{h}{r} 10^{-\alpha \frac{r-h}{R}} \quad (61)$$

teendő. E szerint a teljesebb egyenlet

$$G - G_0 = 3 \log. \sin e - 3\alpha \frac{r}{R} (1 - \sin e). \quad (62)$$

Ha van néhány rengésünk, mely számára a fészek mélységét és néhány állomáson az erősséget ismerjük, akkor az α extinctiocoeficiens egyszerű módon megállapítható.

Az állomások epicentrális koordinatái.

A makroseismikus terület kis terjedelménél fogva az állomások koordinatái többnyire térképből vétetnek közvetlen mérés útján. A gömbháromszögtani tételek zárt alakja ez esetben nem ad pontos eredményt, de sorbabontás révén használható egyenletekhez jutunk. Ha b és l valamely állomás szélessége és hossza, b_0 és l_0 az epicentrumé, φ és a az állomás távolsága és azimuthja ezen utóbbi ponttól, akkor

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sin b \sin b_0 + \cos b \cos b_0 \cos (l - l_0), \\ \sin \varphi \sin a &= \cos b \sin (l - l_0), \\ \sin \varphi \cos a &= \sin b \cos b_0 - \cos b \sin b_0 \cos (l - l_0). \end{aligned} \quad (63)$$

A két utolsó egyenlet hányadosa

$$\cot a = \frac{\operatorname{tg} b \cos l_0}{\sin(l-l_0)} - \sin b_0 \cos(l-l_0), \quad (64)$$

vagy $\sin(l-l_0)$ szerint sorbabontva :

$$\begin{aligned} \cot a = \frac{\sin(b-b_0)}{\sin(l-l_0) \cos b} + \sin b_0 \left\{ \frac{1}{2} \sin(l-l_0) + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \sin^3(l-l_0) + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^5(l-l_0) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

a negyedét $\cot a$ és $\sin a$ előjele adja meg, a mely utóbbi $\sin(l-l_0)$ -ével egyező.

A 63) egyenletek másodika ad, ha röviden

$$\frac{\cos b}{\sin a} = n : \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \varphi = n \sin(l-l_0) + \frac{1}{2} \frac{1}{3} n^3 \sin^3(l-l_0) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5} n^5 \sin^5(l-l_0) + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7} n^7 \sin^7(l-l_0) + \dots, \end{aligned} \quad (67)$$

a melyek numerikus számolásra igen kényelmesek.

Makroseismikus rengések esetén az ívmérték helyett kényelmesebb a kilometeres távolság; e szerint valamennyi egyenletünkben, ha ezt S -sel jelöljük :

$$\varphi = \frac{S}{R} \quad (68)$$

teendő, ha R a földsugár.

A FOURIER-FÉLE SOROKRÓL.

(Második közlemény.)

FEJÉR LIPÓT-tól.

I.

Legyen $f(x)$ az x valós változónak valós függvénye, mely a zérustól 2π -ig terjedő számköz minden helyére nézve értelmezve van, és a melyhez tartozó FOURIER-féle sor minden x helyen összetartó. Jelölje $s_n(x)$ az n -edik FOURIER-féle részletösszeget (vagyis a FOURIER-féle sor első $(n+1)$ tagjának az összegét) és nevezzük az $y=s_n(x)$ egyenletű görbét „ n -edik FOURIER-féle közelítő görbé»-nek. Fölvetjük most már a következő, később szabatosabban fogalmazandó kérdést:

*Milyen menetűek az $y=f(x)$ egyenletű görbéhez tartozó FOURIER-féle közelítő görbék az $y=f(x)$ görbéhez képest?*¹

Tekintettel arra, hogy e kérdés még a legegyszerűbb $f(x)$ függvényekre nézve sincs elintézve, a következő sorokban még nem fogunk súlyt helyezni arra, hogy a kimondott tételeknek érvényességi körét lehetőleg pontosan állapítsuk meg. Ellenkezőleg, kezdettől fogva olyan $f(x)$ görbékre nézve végezzük a vizsgálatot, melyek végesszámú analitikai ívből vannak összerakva. Ilyen görbék játszanak legnagyobb szerepet az alkalmazásokban.

¹ E kérdés fontosságáról meggyőzhetnek bennünket például a következő munkák:

A. HURWITZ: Über die Fourier'schen Konstanten integrierbarer Funktionen. Math. Annalen, 1903. 57. kötet, 442—446. oldal.

E. PICARD: Traité d'Analyse, 1901, Tome I, 247—259. oldal.

F. KLEIN: Anwendung der Differential- und Integralrechnung etc., autografált előadás, 1902, 144—171. oldal.

Mit értünk az alatt, hogy az $y=f(x)$ görbe, mely a zérustól 2π -ig terjedő intervallumban értelmezve van, végezzámú analitikai ívből van összerakva?

Legyen $y=\varphi(x)$ egy az (a, b) intervallumra nézve értelmezett görbe. E görbének az a és b abszcissákhoz tartozó pontjai által határolt ívét *analitikai ívnek* nevezzük akkor, ha

1. a $\varphi(x)$ függvény az (a, b) intervallum minden belső helye környezetében összetartó TAYLOR-féle sorba fejthető;

2. ha az a, b határhelyek környezetében is összetartó TAYLOR-féle sorba fejthető, mely TAYLOR-féle sorok azonban nem tartoznak előállítani a $\varphi(x)$ függvényt az (a, b) intervallumból kieső értékekre nézve.

Ha már most a 0-tól 2π -ig terjedő intervallum végezzámú subintervallumra bontható úgy, hogy minden egyes alosztás fölött egy a fentebbi módon értelmezett analitikai ív nyugszik, akkor az $y=f(x)$ görbéről azt mondjuk, hogy az a $(0, 2\pi)$ intervallumban véges számú analitikai ívből van összerakva.

Azonban $f(x)$ -et még tovább specializáljuk. Fölteszszük, hogy az $y=f(x)$ görbe a $(0, 2\pi)$ intervallum belsejében folytonos (csúcsokkal már birhat). Ellenben *nem* teszszük fel, hogy a 0 (vagy 2π) helyen folytonos; vagyis lehet $f(0) \neq f(2\pi-0)$.

Ilyen $f(x)$ függvényt tartva most már szem előtt, a FOURIER-féle közelítő görbék menetére nézve, legalább első tájékoztatásul, a következő tételt mondhatjuk ki:

(A) Az $y=s_n(x)$ egyenletű, n -edik FOURIER-féle közelítő görbe legalább $(2n+1)$ különböző pontban metszi az $y=f(x)$ görbét a $(0, 2\pi)$ intervallum belsejében.

A FOURIER-féle közelítő görbe tehát váltakozva az $f(x)$ görbe fölé és alá kerül és e váltakozás az n -edik közelítő görbénél legalább $(2n+1)$ -szer történik. E szerint a váltakozások száma n -nel minden határon túl nő.

Az (A) tétel közvetlen folyománya egy HURWITZ-féle tételnek, mely érdekes általánosítása egy STURMTól eredő, és a «trigonometrikus polynomok»-ra vonatkozó, jól ismert tételnek. A HURWITZ-féle tétel így hangzik:

Ha valamely $g(x)$ függvény

$$a_k \sin kx + \beta_k \cos kx + \dots \text{ ad. inf.}$$

FOURIER-féle sorában a_k, β_k az első együtthatópár, melyek közül legalább az egyik zérustól különböző, akkor a $g(x)$ függvénynek a $(0, 2\pi)$ számközön belül legalább $(2k-1)$ egymástól különböző, egyszerű zérushelye van.

HURWITZ e tételt előbb idézett dolgozatában igen általános föltételek mellett bizonyítja be (a FOURIER-féle sornak például nem is kell összeartónak lenni). E föltételeket nem részletezzük, csak megjegyezzük, hogy most, midőn e tételt alkalmazzuk, e föltételek bőven ki vannak elégítve.

Most már az (A) tétel bizonyítására tekintsük az $f(x) - s_n(x)$ különbséget. Ennek FOURIER-féle sora

$$a_{n+1} \sin (n+1)x + b_{n+1} \cos (n+1)x + \dots \text{ ad. inf.}$$

Tehát a HURWITZ-féle tétel szerint $[f(x) - s_n(x)]$ -nek legalább $(2n+1)$ egymástól különböző zérus helye van a $(0, 2\pi)$ intervallumban. Ezzel az (A) tételt már bebizonyítottuk.

II.

Az (A) alatti tétel kielégítő feleletet ad azon, STURM-féle szellemben fölvetett kérdésre, hogy az $s_n(x) - f(x)$ különbség (legalább) hányszor változtatja előjelét a $(0, 2\pi)$ intervallumban. De ámbár az (A) tétel alapján kétségtelen az, hogy a közelítő görbe rendszámával a vizsgált $s_n(x) - f(x)$ különbség jelváltozásainak száma is minden határon túl nő, mégis, tekintve azt, hogy e különbség zérus helyeinek a $(0, 2\pi)$ intervallumban való elosztottságára nézve nem vagyunk tájékozva, egész nyíltan marad a következő kérdés:

Adva lévén egy határozott x hely a $(0, 2\pi)$ intervallumban, az

$$s_n(x) - f(x) \\ (n=0, 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

végtelen sorozatban véges-e vagy végtelen a jelváltozások száma?

Más szóval:

Adva lévén egy határozott x hely a $(0, 2\pi)$ intervallumban, található-e végtelen sok $s_n(x)$, melynek értéke nagyobb az $f(x)$ -nél, és végtelen sok, melynek értéke kisebb $f(x)$ -nél, vagy pedig nem?

Legyen szabad két fogalmat bevezetnünk.

Egy végtelen függvényt, mely valamely (a, b) intervallumban egy $f(x)$ függvényt állít elő, «gyenge ingadozásúnak» nevezünk akkor, ha az $s_n(x) - f(x)$ különbségnek az (a, b) intervallumban föllépő jelváltozásainak száma az n indexsel együtt minden határon túl nő.

«Erős ingadozásúnak» mondjuk a függvényt akkor, ha azonkívül, hogy gyenge ingadozású, még a következő tulajdonsággal bír: az (a, b) intervallum végesszámú helye kivételével minden, az (a, b) -hez tartozó x helyen az

$$s_n(x) - f(x) \\ (n=0, 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

végtelen sorozatban végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tag szerepel.

E kifejezések használatával kérdésünket így is fogalmazhatjuk:

Az (A) tétel alapján egy végesszámú analitikai ívből összerakott görbe FOURIER-féle sora mindenestre gyenge ingadozású. Kérdés, vajjon egyszersmind erős ingadozású-e?

Hogy erre a kérdésre nem könnyen adható a felelet, arról a következők győzhetnek meg bennünket.

Elhagyva egy pillanatra a fentebb jellemzett $f(x)$ függvényt, tekintsük az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x), \quad (1)$$

hol $0 < a < 1$, b = páratlan egész szám, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, FOURIER-féle sor által adott WEIERSTRASS-féle függvényt, mely mindenütt folytonos és sehol sem differenciálható. Azt állítjuk, hogy az (1) alatti FOURIER-féle sor *nem* erős ingadozású.

Tekintsük ugyanis azon x értékeket, melyeket a

$$\frac{\mu\pi}{2b^x} \quad (2)$$

kifejezés szolgáltat a μ, ν tetszőleges pozitív egészszámú értékei mellett.

Ha μ páratlan, akkor az (1) sor tagjai egy bizonyos indextől kezdve mind zérussal egyenlők. Az $s_n(x) - f(x)$ különbségek tehát egy bizonyos indextől kezdve mind eltűnnek, és így nem lehetnek végtelen sokszor pozitívok és negatívok.

Ha μ páros, úgy két eset lehetséges. Első esetben μ valamely páratlan szám kétszerese. Ekkor az (1) sor tagjai egy bizonyos rendszámától kezdve részben zérussal egyenlők (t. i. a zérus együttthatójú tagok), részben negatívok. Ezen esetben tehát az $s_n(x) - f(x)$ különbségek egy bizonyos rendszámától kezdve mind pozitívok. Második esetben μ valamely páros szám kétszerese. Ekkor az (1) sor tagjai egy bizonyos indextől kezdve részben zérussal egyenlők, részben pozitívok. Ez esetben tehát az $s_n(x) - f(x)$ különbségek egy bizonyos rendszámától kezdve negatívok.

A WEIERSTRASS-féle sor tehát *nem* erős ingadozású. Ki tudtuk ugyanis jelölni az x argumentumoknak egy bármely intervallumban *mindenütt sűrűen* fekvő sokaságát, a melyen az erős ingadozás követelte föltétel nincs kielégítve.

Egy pillanatra azt lehetne gondolni, hogy az (1) alatti FOURIER-féle sor által előállított függvény singuláris volta teszi lehetségessé azt, hogy a sor *nem* erős ingadozású. Ezt megczáfolja a következő példa:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{b^{2n}} \cos(b^n x), \quad (3)$$

hol $0 < a < 1$, b páratlan egész szám > 1 .

A (3) alatti FOURIER-féle sor egy x -ben transcendens egész függvényt állít elő. Tehát az (1) tétel alapján mindenesetre gyenge ingadozású. De *nem* erős ingadozású, mert a (2) alatti helyeken ugyanazon viselkedést mutatja, mint a WEIERSTRASS-féle sor.

Hogy (3) valóban transcendens egész függvény, azt nagyon egyszerűen a következőképen láthatjuk be.

Írjunk az x complex változó síkjában a kezdőpont körül, mint középpont körül, egy tetszőleges R sugarú kört. Akkor, ha $|x| \leq R$,

$$|a^{b^{2n}} \cos(b^n x)| = \frac{1}{2} a^{b^{2n}} |e^{ib^n x} + e^{-ib^n x}|.$$

De

$$|e^{ib^n x}| < e^{b^n |x|} \leq e^{b^n R},$$

tehát

$$|a^{b^{2n}} \cos(b^n x)| < a^{b^{2n}} e^{b^n R} = (a^{b^n} e^R)^{b^n}$$

és itt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{b^{2n}} e^{b^n R} = 0.$$

E szerint, ha $|x| < R$, a (3) sor tagjai abszolút értékre nézve rendre kisebbek a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a^{b^n} e^R)^{b^n}$$

összetartó pozitívtagú sor tagjainál, és ennél fogva a (3) alatti sor az R sugarú kör belsejében egyenletesen összetartó. Tehát, minthogy R tetszőleges nagy lehet, a (3) alatti FOURIER-féle sor transcendens egész függvényt ábrázol.

Az (1) és (3) alatti példák mutatják, hogy vannak egyrészt folytonos és nem differenciálható függvényeket előállító FOURIER-féle sorok, és vannak másrészt transcendens egész függvényeket előállító FOURIER-féle sorok, melyek nem erős ingadozásúak.

Most már azt állítjuk, hogy a fentjellemzett $f(x)$ függvényekhez tartozó FOURIER-féle sorok erős ingadozásúak. Pontosabban:

Ha $f(x)$ végeesszámú analitikai ívből van összerakva, akkor, feltéve, hogy a $(0, 2\pi)$ intervallumban (vagy annak határhelyén) akár $f(x)$ maga, akár annak valamely magasabbrendű differenciálhányadosa legalább egy diskontinuitást mutat, az $f(x)$ -hez tartozó FOURIER-féle sor erős ingadozású.

A következőkben csak azon egyszerű esettel foglalkozunk, midőn az $f(x)$ görbe egy egyetlen analitikai ívből áll (mely-

nek természetesen tetszőleges, de végezzszámú maximuma és minimuma lehet). Fölteszszük, hogy $f(x)$ -nek egyetlen diszkontinuitási helye a zérus hely. E szerint fölteszszük, hogy: $f(x)$ *analitikai a $(0, 2\pi)$ közön belül és $f(+0) \neq f(2\pi-0)$. Ilyen függvényről röviden azt mondjuk, hogy az (F) föltételnek tesz eleget.*

★

Legyen x egy bizonyos hely a $(0, 2\pi)$ intervallum bel-sejében. Feladatunk megvizsgálni az $s_n(x) - f(x)$ különbségeket, és pedig előjelük tekintetében. Ámde $s_n(x) - f(x)$ a FOURIER-féle sornak ú. n. «*maradéktag*»-ja. Feladatunk lesz tehát a FOURIER-féle sor maradéktagját olyan alakra hozni, melyben annak előjele evidenciába lép. Határozzuk meg tehát a maradéktagnak ezen érdekes alakját.

Az $s_n(x)$ DIRICHLET-féle alakja

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a)}{2 \sin \frac{a-x}{2}} \sin (2n+1) \frac{a-x}{2} da.$$

Ámde

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{a-x}{2}} \sin (2n+1) \frac{a-x}{2} da$$

és így a szóban forgó különbség

$$R_n(x) = s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a) - f(x)}{2 \sin \frac{a-x}{2}} \sin (2n+1) \frac{a-x}{2} da. \quad (4)$$

A maradéktagnak ezen DIRICHLET-féle kifejezéséből azonban annak sem «*rendje*» (azaz n -nel való kisebbedésének rendje), sem pedig a bennünket különösen érdeklő *előjele* nem olvasható ki. Ámde a következő egyszerű transzformációval a (4) alatti DIRICHLET-féle kifejezésből a maradéktagnak olyan alakjához juthatunk, mely mind a két főntemlített tulajdonságot evidenciába hozza.

Legyen röviden

$$\varphi(a) = \frac{f(a) - f(x)}{2 \sin \frac{a-x}{2}}. \quad (5)$$

E $\varphi(a)$ függvény az egész $(0, 2\pi)$ intervallumban véges és folytonos. Minthogy ugyanis $\sin \frac{a-x}{2}$ a $(0, 2\pi)$ intervallumban csak az $a=x$ helyen tűnik el, tehát $\varphi(a)$ az intervallumban mindenesetre folytonos, ha $a \neq x$. A mi pedig az $a=x$ helyet illeti, úgy:

$$\lim_{a \rightarrow x} \varphi(a) = \lim_{a \rightarrow x} \frac{a-x}{2 \sin \frac{a-x}{2}} \cdot \frac{f(a) - f(x)}{a-x} = f'(x).$$

Hasonló módon könnyen beláthatjuk azt is, hogy a $\frac{d\varphi(a)}{da} = \varphi'(a)$ függvény is folytonos az egész intervallumban.¹

Tekintsük most már az

$$\gamma_n(x) = \int_0^{2\pi} \varphi'(a) \cos(2n+1) \frac{a-x}{2} da$$

integrált. Minthogy $\varphi'(a)$ véges és folytonos az integrálási intervallumban, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) = 0.$$

Ez a FOURIER-féle sorok elméletének egyszerűen bebizonyítható alaplemmájából (meltán nevezhetjük annak) következik, a mely szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi(a) \frac{\cos(na)}{\sin} da = 0,$$

ha $\phi(a)$ véges és integrálható az (a, b) intervallumban.

¹ Minthogy az (F) feltételnek eleget tevő $f(x)$ függvényt tartunk szem előtt, tehát az egész folytonossági kérdést egyszerűen az $f(a) - f(x)$, $2 \sin \frac{a-x}{2}$ függvényeknek $a-x$ hatványai szerint haladó TAYLOR-féle sorai-val intézhetnők el. A szövegben végzett megfontolás azonban szándékosan kerüli az $f(x)$ analitikai voltának a kihasználását.

Ha most az $\eta_n(x)$ integrált parciálisan integráljuk, vissza-
kapjuk a maradéktagot:

$$\eta_n(x) = -[\varphi(0) + \varphi(2\pi)] \cos(2n+1) \frac{x}{2} + \frac{2n+1}{2} \pi R_n(x).$$

Ámde (5) alapján

$$\varphi(0) + \varphi(2\pi) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

tehát

$$R_n(x) = \frac{1}{(2n+1) \frac{\pi}{2}} \left[\frac{f(2\pi) - f(0)}{2} \frac{\cos(2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \eta_n(x) \right]. \quad (M)$$

hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(x) = 0.$$

Ez a maradéktagnak keresett formája, mely minden (F') föl-
tételnek eleget tevő függvényre nézve érvényes.

A maradéktag ezen alakjából először is világos, hogy az
növekvő n -nel minden határon túl kisebbedik, vagyis, hogy a
FOURIER-féle sor összetartó, és összegül $f(x)$ -et szolgáltatja. De
a maradéktag rendjét is megadja az (M) alatti kifejezés. Lát-
juk ugyanis, hogy az $nR_n(x)$ szorzat növekvő n -nel nem kon-
vergálhat a zérushoz, ha x a $(0, 2\pi)$ intervallum tetszőleges
helye. Egyedüli kivételek: $x=0, \pi$.

Végre, és ez érdekel bennünket elsősorban, az $R_n(x)$ -nek
 (M) alatti kifejezéséből következtetést vonhatunk annak elő-
jelére nézve, feltéve, hogy n elegendő nagy.¹

Az $R_n(x)$ előjelét nyilvánvalóan a második tényező hatá-
rozza meg. A második tényező egy összeg, melynek második

¹ Kiemeljük még, hogy a maradéktag ugyanolyan típusú, úgy a
mint az (M) alatt áll, mint a FOURIER-féle sor általános tagja. Tehát
ebben a tekintetben is megvan az analogia a TAYLOR-féle sor maradék-
tagjának LAGRANGE-féle alakjával. F. KLEIN előbb idézett előadásában a
következőképen nyilatkozik: «Ich bemerke ... dass sich für das Rest-
glied der endlichen trigonometrischen Reihe, soweit ich sehe, in der
Litteratur keine bequeme Formel vorfindet». Azt hisszük, hogy a szöveg-
ben közölt maradéktag e hiányt pótolja.

összeadandója növekvő n -nel zérushoz konvergál. Tekintsük az első összeadandót:

$$\frac{f(2\pi) - f(0)}{2 \sin \frac{x}{2}} \cos (2n+1) \frac{x}{2}.$$

Itt az első faktor n -től független, és így csak a második tényezőt

$$\cos \left(nx + \frac{x}{2} \right)$$

kell vizsgálnunk.

Két eset lehetséges:

1. $\frac{x}{\pi}$ raczionális, és nem egyenlő 1-gyel vagy 0-sal. Ekkor, mint könnyen be lehet látni, található egy n_1 index, mely mellett $\cos \left(n_1 x + \frac{x}{2} \right)$ pozitív, és egy n_2 index, mely mellett $\cos \left(n_2 x + \frac{x}{2} \right)$ negatív. A fönnálló periodicitás miatt azonban ebből tüstént következik, hogy $\cos \left(nx + \frac{x}{2} \right)$ végtelen sok n érték mellett egyenlő $\cos \left(n_1 x + \frac{x}{2} \right)$ -lel, és végtelen sok n érték mellett egyenlő $\cos \left(n_2 x + \frac{x}{2} \right)$ -lel. Újra fölidézvén, hogy

$$\lim_{n=\infty} r_n(x) = 0,$$

következik, hogy $R_n(x)$ végtelen sok n érték mellett pozitív és végtelen sok n érték mellett negatív értékű.

2. $\frac{x}{\pi}$ irracionális. Ekkor, mint ismeretes, az

$$nx + \frac{x}{2} \pmod{2\pi} \\ (n=0, 1, 2, \dots, \infty)$$

értékek egy a $(0, 2\pi)$ intervallumban mindenütt sűrűen fekvő értéksokaságot alkotnak. E szerint a szóban forgó cosinus végtelen sokszor lesz nagyobb mint pl. $\frac{1}{2}$, és végtelen sokszor lesz kisebb mint $-\frac{1}{2}$. $R_n(x)$ tehát ezen esetben végtelen sokszor lesz pozitív, és végtelen sokszor lesz negatív.

Ezzel tehát kimutattuk, hogy egy az (F) föltételnek ele-

get tevő függvényre nézve a FOURIER-féle sor erősen ingadozó. Valóban, csak a 0 és π helyeken mutathat $R_n(x)$ növekvő n indexszel végeesszámú jelváltozást. Hogy ezeken a helyeken az oszcilláció valóban megszűnhetik, mutatja a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

sor egyszerű példája. Itt $x=0$ és $x=\pi$ -re nézve a sor értéke 0, és $R_n(0)$, $R_n(\pi)$ minden n érték mellett egyenlők zérussal.

Az ingadozás tárgyalását most már elhagyva, még csak megjegyezzük, hogy a közölt módszer nemcsak az (F) föltételnek megfelelő görbére alkalmazható, hanem minden olyan görbére, mely végeesszámú analitikai ívből van összerakva.

Legyen pl. $f(0)=f(2\pi)$. Akkor már nincs az (F) föltételnek megfelelő görbével dolgunk. Ekkor az (M) alatti maradéktag az

$$R_n(x) = \frac{\eta_n(x)}{(2n+1) \frac{\pi}{2}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(x) = 0$$

alakban jelentkezik, melyből ugyan a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ következtetés még levonható, de az előjelbeli viszonyokra nézve már nem kapunk fölvilágosítást.

Tegyük fel most, hogy már $f'(0) \neq f'(2\pi)$. Akkor

$$\int_0^{2\pi} \varphi''(a) \sin(2n+1) \frac{a-x}{2} da$$

kétszer egymásután való parciális integrálása révén a maradéktagnak

$$R_n(x) = \frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \pi} \left[\frac{f'(2\pi) - f'(0)}{2} \frac{\sin(2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \varepsilon_n(x) \right],$$

hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(x) = 0,$$

alakjához jutunk, mely azonkívül, hogy a maradéktag rendjét is pontosabban adja meg, előjelbeli diszkusszióra is alkalmas.

III.

A következőkben olyan kérdésekkel foglalkozunk, melyek ugyanazon eszmekörbe tartoznak, mint a megelőző és hasonló elemi módszerrel tárgyalhatók.

Legyen az (F') föltételnek eleget tevő függvény FOURIER-féle sora

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx).$$

Azt állítjuk most már:

Ha $f(x)$ az (F') föltételnek tesz eleget, akkor az

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

FOURIER-féle együtthatók sorozatában egy bizonyos indextől kezdve:

1. *Valamennyi tag zérustól különböző.*
2. *Valamennyi tag egyenlő előjelű (és pedig pozitív, ha $f(0) - f(2\pi)$ pozitív, és negatív, ha $f(0) - f(2\pi)$ negatív).*
3. *A tagok abszolút értékben folyton kisebbednek.*

Ha fölteszszük, hogy

$$f'(2\pi) - f'(0) \neq 0,$$

akkor a

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

együtthatókra nézve analog módon kimutathatjuk, hogy egy bizonyos indextől kezdve mind zérustól különbözők, mind egyenlő előjelűek, és abszolút értékben folyton fogynak.

Lássuk az 1., 2., 3. bizonyítását. Elég lesz a 2.-at és 3.-at kimutatnunk, mert ezekből az 1. már következik. A 2.-at be-

bizonyíthatnók azon formula segítségével, melyet DARBOUX¹ a FOURIER-féle sorok együtthatói számára adott ezen együtt-hatók rendjének meghatározására.

Mi azonban az $a_{n+1} - a_n$ különbséget fogjuk vizsgálni, melynek alkalmas alakra való hozzászával a 2. és 3. alatti tételeket egy csapásra bebizonyítjuk.

Minthogy

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a) \sin na da, \quad (6)$$

tehát

$$J_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a) (\sin (n+1) a - \sin na) da,$$

vagy

$$J_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a) \sin \frac{a}{2} \cos (2n+1) \frac{a}{2} da.$$

Legyen röviden

$$\psi(a) = f(a) \sin \frac{a}{2}$$

és vezessük be az

$$\varepsilon_n = \int_0^{2\pi} \psi''(a) \cos (2n+1) \frac{a}{2} da \quad (7)$$

integrált.

Kétszer egymásután való parciális integrálással nyerjük:

$$\varepsilon_n = - [\psi'(2\pi) + \psi'(0)] - \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2 \frac{\pi J_n}{2}$$

és mert

$$\psi'(2\pi) + \psi'(0) = - \frac{f(2\pi)}{2} + \frac{f(0)}{2},$$

tehát

$$J_n = a_{n+1} - a_n = \frac{[f(2\pi) - f(0)] - 2\varepsilon_n}{\left(\frac{2n+1}{2} \right)^2 \pi}, \quad (8)$$

¹ Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres etc. Lionville-Journal, 1878, 3ième série, Tome IV, 9., 10. oldal.

a hol az alaplemmánál fogva

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

tekintve az ε_n (7) alatti alakját, és hogy $\phi''(a)$ folytonos a $(0, 2\pi)$ intervallumban.

Legyen most pl. $f(2\pi) - f(0)$ negatív. Akkor (8) szerint, ha csak n elég nagy, $a_{n+1} < a_n$. Ámde az alaplemma értelmében $\lim_{n=\infty} a_n = 0$. Tehát 1., 2., 3. bizonyítva van.

Csekély változással a b_n együtthatókra vonatkozó tételeket is bebizonyíthatjuk. Ugyanis

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a) \sin \frac{a}{2} \sin (2n+1) \frac{a}{2} da.$$

Ha tehát megint

$$\phi(a) = f(a) \sin \frac{a}{2},$$

akkor az

$$\int_0^{2\pi} \phi^{(iv)}(a) \sin (2n+1) \frac{a}{2} da$$

integrál parciális integrálása révén a

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-(2n+1)[f'(2\pi) - f'(0)] + \varepsilon'_n}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^3 \pi}$$

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon'_n = 0,$$

alakhoz jutunk, a melyből aztán, ha $f'(2\pi) - f'(0) \neq 0$, a fősorolt tételekhez lehet jutni.

E módszer természetesen, kellő változtatással, bármilyen véges számú analitikai ívből összerakott görbére alkalmazható, a hol bizonyos analog eredményekre vezet.

Az előzőkhöz néhány megjegyzést teszünk. Ismeretes, hogy egyenlő előjelű és abszolút értékben folyton fogyó együtthatók-

kal bíró FOURIER-féle sorok különösen egyszerű természetűek.¹ Egy jól ismert ABEL-féle lemma segítségével például e sorok összetartó voltát *a priori* (vagyis a DIRICHLET-féle integrál nélkül) ki lehet mutatni, és kiderül, hogy a sor a $(0, 2\pi)$ intervallum minden belső helyén összetartó, és minden belső helyen folytonos függvényt ábrázol. A maradéktag is az ABEL-féle lemmával egyszerű alakra hozható.

Az előzők most már mutatják, hogy minden végeszámú analitikai ívből összerakott görbe FOURIER-féle sora ilyen vagy rokon természetű.

Vegyünk egy példát: $f(x) = \cos \mu x$, hol μ nem pozitív egész szám.

Itt

$$a_n = \frac{1 - \cos 2\mu\pi}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2 - \mu^2}.$$

Ha tehát μ olyan, hogy

$$1 - \cos 2\mu\pi \neq 0,$$

akkor, hacsak n elég nagy, az a_n -ek mind pozitívak és folyton kisebbednek. Itt valóban $\cos \mu x$ egy az (F) feltételnek eleget tevő függvény, mert egyrészt egyetlen analitikai ívből áll, másrészt

$$f(0) - f(2\pi) = 1 - \cos 2\mu\pi \neq 0.$$

Látjuk a megegyezést a 2. pontban zárójelbe foglalt megjegyzéssel is.

A mi a b_n együtthatókat illeti:

$$b_n = \frac{-\mu \sin 2\mu\pi}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 - \mu^2}.$$

Ha tehát μ olyan, hogy

$$\mu \sin 2\mu\pi \neq 0,$$

akkor egy bizonyos n -től kezdve a b_n -ek mind egyenlő előjelűek és abszolút értékben folyton fogynak. A megegyezést itt is konstatálhatjuk. Ugyanis

$$\mu \sin 2\mu\pi = f'(0) - f'(2\pi).$$

¹ L. PICARD idézett helyen és POINCARÉ, Propagation de la chaleur.

III'

A következőkben egy teljesen elemi módszert közlünk a FOURIER-féle sor együtthatói előjelének a vizsgálatára. Az (F) föltételnek eleget tevő függvényekre szorítkozunk. Azon jelenségnek az oka, hogy az (F) föltételnek eleget tevő függvényeknek FOURIER-féle sorában az együtthatók (egy bizonyos indextől kezdve) mind egyenlő előjelűek, csak ezen elemzés révén domborodik ki igazán.

A módszert az a_n együtthatókra alkalmazzuk.

Tudjuk, hogy

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (9)$$

A következőkben inkább geometriai kifejezésekkel élve, először is megjegyezzük, hogy a $\sin nx$ görbe az x tengelynek a zérus és 2π közötti darabját $2n$ egyenlő részre vágja.

Ezáltal a

$$0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{n}, \frac{2n\pi}{n} = 2\pi$$

osztási pontok állnak elő. E felosztásnak megfelelőleg a (9) alatti integrált is $2n$ részre osztjuk:

$$\pi a_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \dots + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \dots + \dots$$

Tekintve, hogy ezen $2n$ integrál a becslés szempontjából rokon természetű, elég lesz az elsőt,

$$i_1 = \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(x) \sin nx dx$$

-et vizsgálni. Minthogy $\sin nx$ a $\left(0, \frac{\pi}{n}\right)$ intervallum belsejében pozitív, tehát az $f(x)$ függvénynek ezen intervallumhoz tartozó alsó és felső határa segítségével az i_1 integrált az ú. n. első

középértéktétel alkalmazásával mindenesetre két határ közé tudjuk szorítani. Ezt mind a $2n$ integrálra alkalmazva, nyerjük, hogy

$$|\pi a_n| < \frac{\mu}{n},$$

és ¹ így $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. De az a_n előjelének meghatározására nézve ezen becslés nem elég finom.

Ez azonban egy, magában is érdekes, *középértéktétel* segítségével könnyen eszközölhető. A tétel így hangzik:

Legyen

$$I = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx.$$

Itt jelentsen $\varphi(x)$ egy az (a, b) intervallumban pozitív függvényt, melyhez tartozó görbe az (a, b) intervallum felezőpontjában, $\frac{a+b}{2}$ -ben állított merőlegesre nézve szimmetrikus. Azaz

$$\varphi(a+\xi) = \varphi(b-\xi), \quad (10)$$

$f(x)$ legyen konkav az (a, b) intervallum minden helyén. Akkor

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Ez valóban finomabb becslése az I integrálnak, mint a melyet az első középértéktétel szolgáltat; ugyanis általában

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

két olyan érték, mely egymáshoz sokkal közelebb fekszik, mint az $f(x)$ függvénynek az (a, b) intervallumhoz tartozó alsó és felső határa.

E középértéktétel bizonyítása egyszerű. Ugyanis

¹ L. pl. STÄCKEL: Über das Dirichlet'sche Integral. Verhandlungen der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1901, 53. kötet.

$$I = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) \varphi(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) \varphi(x) dx.$$

A második integrálba t -t vezetjük be integrálási változónak az

$$x = a + b - t$$

összefüggés alapján. Akkor

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) \varphi(x) dx = - \int_{\frac{a+b}{2}}^a f(a+b-t) \varphi(a+b-t) dt.$$

Ámde a (10) alatti föltételbe $\xi = (b-t)$ értéket téve, nyerjük

$$\varphi(a+b-t) = \varphi(t).$$

Tehát t helyébe megint x -et téve, kapjuk az I integrál felére

$$\frac{I}{2} = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} \varphi(x) dx.$$

Most ezen integrálra alkalmazzuk az első középértéktételt.

x -nek és $(a+b-x)$ -nek az abszisszatengelyen két, az $\frac{a+b}{2}$ ponttól egyenlő távolságnyra fekvő pont felel meg. E szerint az

$$\frac{f(x) + f(a+b-x)}{2}$$

geometriai jelentése nagyon egyszerű: kössük össze az $y=f(x)$ görbének az

$$x \quad \text{és} \quad a+b-x$$

abszisszákhöz tartozó pontjait egyenes vonallal. E vonaldarab a végpontjaihoz tartozó ordinátákkal és az abszisszatengelynek e két ordináta közé eső darabjával egy trapezt képez. E trapez ú. n. középvonalának (az $\frac{a+b}{2}$ -ben emelt merőlegesnek) hosszá-
sága egyenlő az

$$\frac{f(x) + f(a+b-x)}{2}$$

értékkel.

De most már tekintetbe véve, hogy az $y = f(x)$ görbe *konkáv* az egész (a, b) intervallumban, a szóban forgó trapez középvonalának mérőszáma mindenesetre kisebb mint $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, és nagyobb mint $\frac{f(a) + f(b)}{2}$.

Tehát

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \varphi(x) dx \leq \frac{I}{2} \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \varphi(x) dx.$$

De az $y = \varphi(x)$ görbe *symmetriája* folytán

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b \varphi(x) dx,$$

tehát végre

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Ha $f(x)$ az (a, b) intervallum belsejében mindenütt *konvex*, akkor az említett trapez középvonal mérőszáma nagyobb mint $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ és kisebb mint $\frac{f(a) + f(b)}{2}$, és így a fenti egyenlőtlenségek ellenkező értelemben veendők.

E középértéktételből most már következik, akár mindenütt *konkáv*, akár mindenütt *konvex* az $y = f(x)$ görbe az (a, b) intervallumban:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \varphi(x) dx + \\ &+ \theta \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \int_a^b \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

hol

$$-1 \leq \theta \leq +1.$$

Ámde

$$\left| f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} f''(\xi),$$

hol

$$a \leq \xi \leq b,$$

tehát

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \varphi(x) dx + \\ &+ \theta' \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 |f''(\xi)| \int_a^b \varphi(x) dx, \\ -1 &\leq \theta' \leq 1, \end{aligned}$$

hol

$$a \leq \xi \leq b.$$

Visszatérünk most már a FOURIER-féle együttthatók vizsgálatára.

Középértéktételünket ezen utóbbi átalakított formájában alkalmazzuk. Minthogy $f(x)$ az (F) feltételnek tesz eleget, tehát a $(0, 2\pi)$ intervallumban végezzszámú inflexiós pontja van. E szerint ha n minden határon túl nő, azon intervallumok száma, melyekben $f(x)$ nem mindenütt konkav, vagy nem mindenütt konvex, egy véges számot nem haladhat meg.

Vegyük i_1 -et és tegyük fel egy pillanatra, hogy a $\left(0, \frac{\pi}{n}\right)$ intervallumban $f(x)$ -nek nincsen inflexiós pontja. Akkor

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx dx = \frac{2}{n}$$

és

$$(b-a) = \frac{\pi}{n}$$

lévén

$$i_1 = \frac{f(0) + f\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n} + \theta_1 \frac{\pi^2}{2n^3} f''(\xi_1),$$

hol

$$-1 \leq \theta_1 \leq +1,$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \frac{\pi}{n}.$$

Tegyük fel egy pillanatra, hogy az $f(x)$ a következő $\left(\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right)$ intervallumban sem bir inflexiós ponttal. Akkor $-i_2$ -re ugyanazon becslési módot alkalmazva:

$$i_2 = -\frac{f\left(\frac{\pi}{n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{n} + \theta_2 \frac{\pi^2}{2n^3} f''(\xi_2),$$

hol

$$-1 \leq \theta_2 \leq +1,$$

$$\frac{\pi}{n} \leq \xi_2 \leq \frac{2\pi}{n}.$$

Ezt tovább folytatva, nyerjük

$$\pi a_n = \frac{f(0) - f(2\pi)}{n} + \frac{\pi^2}{2n^3} \sum_{i=1}^{2n} \theta_i f''(\xi_i) + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

A kifejezés végén szereplő $\frac{\varepsilon_n}{n}$ korrekciót hozzá kellett az első két taghoz csatolni, mert az összegben azon integrálokat is a fentebbi módszer szerint becsültük meg, melyeknek intervallumában $f(x)$ -nek inflexiós pontja van. Minthogy, mint említettük, ezek véges számban vannak, tehát, mint könnyen be lehet látni, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Ha tehát $|f''(x)|$ -nek a $(0, 2\pi)$ intervallumra vonatkozó felső határa μ , akkor

$$\pi a_n = \frac{f(0) - f(2\pi) + \eta_n}{n},$$

hol

$$|\eta_n| < \frac{\pi^2 \mu}{n} + |\varepsilon_n|,$$

és így $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$. Látjuk tehát, hogy az a_n előjelét $f(0) - f(2\pi)$ határozza meg, feltéve, hogy n elegendő nagy.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 április 2.-án tartott üléséből.)

β LYRAE PÁLYAELEMEINEK KISZÁMÍTÁSA SPEKTROSKOPIAI ÉS PHOTOMETRIAI ADATOKBÓL.

TERKÁN LAJOS-t61.

β Lyrae főképviselője a változó csillagok azon osztályának, melynek tagjai fehéres vagy sárgás színűek, spektrumuk az első vagy második spektraltypusba tartozik, fényváltozásuknak tartama néhány nap és 2—3 hónap között ingadozik s ez idő alatt majdnem egy teljes nagyságrendű és folytonos fényváltozást mutatnak. β Lyrae szabályos fénygörbéjét már 1784-ben némi tévedéssel GOODRICKE megállapította, s a későbbi kutatók: ARGELANDER, OUDEMANS, SCHÖNFELD igen nagy pontossággal határozták meg. Ezek szerint két teljesen egyenlő fénymaximumot, egy fő- és egy mellékminimumot mutat 12·91 nap alatt.

E jelenség megmagyarázására¹ többen oly periodikusan végbemenő foltképződésre gondoltak, mint ez Napunknál észlelhető. Minthogy e foltképződéseknek hihetetlen gyorsasággal kellene lefolyniok, ZÖLLNER valószínűbb feltevést keresett: a csillag felületének egyes helyeken való lehülésére gondolt. β Lyraénél ezen lehülési termékek a két szemközti oldalon volnának, az egyikén nagyobb mennyiségben, mint a másikon. PICKERING ehhez még egy föltevést vett segítségül, ellipsoidalakot tételezett fel, melynek forgási tengelye a legrövidebb tengely. Ily módon sikerült is neki oly empirikus formulát levezetni, mely a fényváltozást eléggé előállítja. Tüstént beláthatjuk, hogy e föltevések magyarázatnak jók, de nem engednek eléggé bepillantani e jelenségek physikai természetébe.

Sokkal hihetőbb ama föltevés, mely e fényváltozást két oly szorosan közel fekvő égi test kölcsönös takarására vezeti

¹ Die Photometrie der Gestirne. G. MÜLLER. 1897.

vissza, melyek egy közös súlypont körül keringenek. Képzeljük, hogy Földünk ily rendszer pálya síkjába esik és a rendszer két tagja nem egyenlő fényességű. Mikor a két összetevő a látósugáron megy át, fődés áll be és fényminimumok lépnek fel, a látósugárra merőleges irányon átmenve két egyenlő fénymaximum keletkezik. Ily rendszer fölvételével a legnagyobb könnyűséggel magyarázható β Lyræ fényváltozása. Ha pedig több összetevőből álló rendszert gondolunk, a legbonyolódottabb fénygörbét is tudjuk magyarázni.

A mióta a DOPPLER-féle elv alkalmazása az astrophysikában mind jobban tért hódít, a kettős és többszörös rendszerek felvétele mellett mindig hatalmasabb bizonyítékok szólnak. β Lyræ spektrumának vizsgálatára már régebben történtek kísérletek. Az első kezdetleges eszközök és módszerek csupán annyi felvilágosítást adtak, hogy fényes vonalakat tartalmaz, melyeknek láthatósága periodikus ingadozást mutat. PICKERING¹ 1892-ben több spektrum-fölvételt csinált β Lyræ-ről és azon meglepő eredményre jutott, hogy a fényes vonalak mellett sűrűen vannak absorptiós sávok is és e két vonalrendszer egymáshoz való relativ helyzete változó. Csak VOGEL-nek és BELOPOLSKYNak sikerült kimutatni, hogy a világos és sötét vonalak egymáshoz való relativ helyzete a fényváltozással a legszorosabb összefüggésbe hozható. VOGEL vizsgálatainak alapjául dr. WILSING 1893-ban készített 144 fölvétele szolgált, melyek a legnagyobb körültekintéssel készültek. Egy este több fölvételt készített WILSING különböző expositióval, hogy különösen a légköri viszonyoktól lehetőleg ment adatokhoz jusson. Különös figyelmet érdemelnek a H_γ és H_β hydrogen fényes vonalak és a mellettük levő erős absorptiós sávok helyzetében mutatkozó eltolódások a fényváltozás különböző phasisaiban. A fényminimumok idejét az akkor még nem pontos ARGELANDER-féle formulával számítva, ez időpontban a világos és sötét sáv majdnem egymás mellett van, a világos a szinkép vörös része felé, a sötét az ibolya felé eső oldalon, a sötét mintha takarná egy kissé a világos ibolya felőli szélét. Az első maximum idején a sötét sáv mindjobban fődí a

¹ Über das Spectrum von β Lyræ. H. C. Vogel. 1894.

világosat, a világosból egy kis sáv már az ibolya felé tolódik. A mellékminimum körül a sötét sáv majdnem a világos közepén foglal helyet. A II maximumban alig mutat az előbbihez képest változást a szinkép. E tűnemény azonos módon jelentkezik több más élesen látszó vonalnál is. A mellékminimum és II maximum közé eső időpontban készült egyik felvétel szerint a világos majdnem teljesen az ibolya felőli oldalra tolódott.

VOGELÉVEL azonos eredményre jutott Belopolsky is, ki 76 cm-es nyílású refractorán már Vogel előtt, 1892-ben, akkor még nem tökéletesített spektrographjával csinált számos felvételt és különösen vizsgálat tárgyává tette az F , D_3 , $\lambda=447\mu\mu$ és $\lambda=448\mu\mu$ vonalakat. Ő még tovább is ment, a világos és sötét vonaloknak nemcsak egymáshoz való relatív helyzetét mérte ki, hanem földi fényforráshoz, a mesterséges F' vonalhoz képest észlelhető eltolódásukat is. Mérései a fényes F vonalra periodikus eltolódást adtak, a sötét F' vonalra pedig egyirányút.

Mindketten még azt is tapasztalták, hogy a főminimum idején a szinkép intenzitása gyengül, az absorptiós sávok egész világosan jelennek meg, a maximumok idején az absorptiósak kevésbé világosak, a fényesek erősödnek, a szinkép intenzitása nő.

Az első pillanatban önkéntelenül azon gondolat nyugtalanít bennünket, hogy β Lyrænek oly kettős csillagnak kell lennie, melynek összetevői igen közel vannak egymáshoz. A vázolt spektroszkopiai eredmények ellentmondanak oly feltevésnek, mely szerint közös súlypontjuk körül keringő, kettős rendszert képező, egy intenzíven világító és egy kevésbé világító, csillagokkal volna dolgunk. Ily rendszernél minimum idején a látósugár irányába eső összetevők zérussá válnak, a fényes és sötét vonaloknak tehát teljesen fedniök kellene egymást, nem pedig egymás mellé helyezkedniök; maximumok idején ellenkező értelmű és a legnagyobb eltolódást kellene mutatniök. β Lyrænél tehát el kell ejtenünk a közös súlypont körül keringő kettős rendszer föltevését.

A következőkben oly föltevést kísérték meg bemutatni, melylyel ez ideig még senki sem foglalkozott, melynek nemcsak a legnagyobb valószínűsége, hanem teljes bizonyossága is

ki fog derülni. Azt állítom, hogy β Lyrae oly kettős csillag, melynek egyik összetevője aránylag nagy és kevésbbé fényes és a rendszer pályájának focusában van, állandóan felénk jön, a másik aránylag kicsiny, fölötte intensíven világít és igen csekély excentromosságú pályán mozog a kevésbbé fényes körül. A fő fényminimum akkor lép fel, mikor a sötét csillag eltakarja előlünk a világosat, a mellékminimum pedig akkor, mikor a világos kerül a sötét elé, a maximumok pedig akkor, mikor a látósugárra merőleges irányban a legnagyobb kitérést éri el az intensív fényű összetevő. E föltevésből következik, hogy a sötét test kísérője, az intensívebben világító csillag, a fő fényminimum után felénk közeledni tartozik. BELOPOLSKYNak a fényes F' vonalra végzett mérései azonban tőlünk való távolodását adják. Ennek azonban nem tulajdoníthatunk nagyobb fontosságot, mert 1897-ben maga BELOPOLSKY,¹ a DOPPLER-féle elv lángelméjű alkalmazója, már finom módszerével végzi ez évi fölvételein az eltolódások kimérését és minden kétségen felül úgy találja, hogy a kísérő a fő fényminimum után tényleg felénk jön, nem pedig távolodik, csak a periastron átmenet időpontját nem tudta egyeztetni a fényminimumok idejével. Ennek egyszerűen az volt az oka, mint majd fejtegetésemből kitűnik, hogy a számítása alapját képező formula éppen a felmerülő különbségnek megfelelő késéssel adta meg a minimum idejét. E késés éppen 4 óra volt. VOGELnak 1893-iki és BELOPOLSKYNak 1892-iki észleléseinél a régi ARGELANDER-féle formula alapján a késés éppen 0.7 napot tett ki, e késést tekintetbe véve, a régebbi spektroszkopiai eredmények is a legteljesebb összhangzásban vannak föltevésemmel. Minthogy értekezésemben a dolog részleteire is ki kell terjeszkednem, nem bocsátkozom e helyen mélyebben föltevés elemzésébe, csak annyit kívántam előrebecsátani, a mennyiből jogosultsága már eleve látható.

Értekezésemet több szempontból bátorítok a M. T. Akadémia elé terjeszteni. E rendkívül érdekfeszítő jelenség magyarázatába eddig egészen új felfogást viszek be, melyből példát

¹ New investigations of the spectrum of β Lyrae. A. BELOPOLSKY. 1897. The Astroph. Journal. Vol. VI.

látunk a spektroszkopiai és photometriai módszerek egyesítésére a pályaszámításban, mely a pályának eddig teljesen meghatározatlan elemét, a pálya hajlását is adja, látjuk egyúttal a photometriai adatok tiszta physikai jelentőségét is.

1. *β Lyrae pályaelemeinek kiszámítása a látósugár irányába eső sebességi összetevőből.*¹

A koordinátarendszer kezdőpontja legyen a Nap közép-pontjában, a z tengely essék a látósugár meghosszabbításába, a fényes csillag tömege legyen m , koordinátája ζ , a kevésbbé világosé m' , ζ' , a tömegközéppont koordinátája pedig ζ_0 , végül legyen $z = \zeta - \zeta'$, ekkor a tömegközéppontra

$$(m + m') \zeta_0 = m \zeta + m' \zeta' \quad (1)$$

érvényes.

. Az (1) és $z = \zeta - \zeta'$ -ből differenciálás után

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta_0}{dt} + \frac{m'}{m + m'} \frac{dz}{dt} \quad (2)$$

egyenlethez jutunk. A fényes összetevő sebessége tehát két tagból áll: egyik a tömegközéppont sebessége, a másik pedig m -nek m' körüli pályájával összefüggő periodikus rész.

A spektroszkopikus adatok $\frac{d\zeta}{dt}$ értékét adják a DOPPLER-féle elv alapján, ebből mindig levonandó a tömegközéppont sebessége, hogy a periodikus tagot nyerjük.

Ha $\frac{d\zeta_0}{dt} = 0$ volna, akkor

$$\int_0^U \frac{d\zeta}{dt} dt = 0, \quad (3)$$

a hol U egy teljes periodus tartama. Ha azonban a (3) nem teljesül, akkor benne van a tömegközéppont sebessége, melyet

$$\frac{d\zeta_0}{dt} = \frac{1}{U} \int_0^U \frac{d\zeta}{dt} dt \quad (4)$$

¹ Über die Bestimmung einer Doppelsternbahn aus spektroskopischen Messungen der im Visionsradius liegenden Geschwindigkeitskomponente. R. LEHMANN-FILHÉS: Astr. Nachr. Nr. 3242.

ad. Ezt oly módon határozhatjuk meg, hogy mm^2 -es hálózati papírra rajzoljuk a sebességi görbét, abszcissának választván a folyó időt, ordinátának a Naphoz viszonyított sebességi össze-
tevért. A periodust n egyenlő részre osztván fel

$$\frac{d\zeta_0}{dt} = \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)_r. \quad (5)$$

Ha a pálya hajlása a látósugárra merőleges síkhoz i , a periastron távolsága a felszálló csomóponttól λ , m , m' körüli pályájának fél nagytengelye a , akkor

$$z = r \sin(v + \lambda) \sin i. \quad (6)$$

Minthogy

$$r \frac{dv}{dt} = \frac{na(1 + e \cos v)}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{nae \sin v}{\sqrt{1 - e^2}},$$

azért

$$\frac{dz}{dt} = \frac{na \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (\cos(v + \lambda) + e \cos \lambda), \quad (7)$$

a (2) pedig

$$\frac{d(z)}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} - \frac{d\zeta_0}{dt} = \frac{na_1 \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (\cos(v + \lambda) + e \cos \lambda), \quad (7a)$$

a hol

$$a = \frac{m'}{m + m'} a,$$

$$n = \frac{k^2 m'^{\frac{3}{2}}}{(m + m') a_1^{\frac{3}{2}}}. \quad (8)$$

A (7a) alatti görbének van egy maximuma $v + \lambda = 0$ érték mellett A és egy minimuma $v + \lambda = 180^\circ$ mellett B és pedig:

$$A = \frac{na_1 \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (1 + e \cos \lambda), \quad (9)$$

$$B = \frac{na_1 \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (1 - e \cos \lambda).$$

Ezekből:

$$e \cos \lambda = \frac{A - B}{A + B}. \quad (I)$$

A (7a) alatti görbe zérus lesz v_1 és $360^\circ - v_1 = v_2$ értékek mellett. Ezek között

$$\begin{aligned}\sin(v_1 + \lambda) &= -\sin(v_2 + \lambda) = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B} \\ \cos(v_1 + \lambda) &= \cos(v_2 + \lambda) = \frac{A+B}{A-B}\end{aligned}\quad (10)$$

összefüggések állanak fenn.

Minthogy

$$\begin{aligned}(z_1) &= r_1 \sin(v_1 + \lambda) \sin i = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d\zeta}{dt} - \frac{d\zeta_0}{dt} \right) dt, \\ (z_2) &= r_2 \sin(v_2 + \lambda) \sin i = \int_{t_0}^{t_2} \left(\frac{d\zeta}{dt} - \frac{d\zeta_0}{dt} \right) dt,\end{aligned}\quad (11)$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v};$$

azért

$$e \sin \lambda = \frac{2\sqrt{AB}((z_1) + (z_2))}{(A+B)((z_2) - (z_1))}. \quad (II)$$

A (11)-ben t_0 és t'_0 a sebességi görbe szélső értékeihez tartozó és a periodus kezdetétől számított idők, t_1 és t_2 a görbe zéruspontjaihoz tartozó abszcissák. A (z_1) és (z_2) planimeterrel határozhatók meg. Ezek után (I) és (II), e és λ pályaelemeket egyértelműleg adják meg.

A (9) alatti egyenletekből pedig

$$a_1 \sin i = \frac{A+B}{2n} \sqrt{1-e^2} = \frac{A+B}{4\pi} U \sqrt{1-e^2}, \quad (III)$$

a hol

$$n = \frac{2\pi}{U}.$$

Ha a kevésbé világos összetevő szinképében is sikerül az eltolódások nagyságát pontosan kimérni, akkor közvetlenül $\frac{dz}{dt}$ -ből indulva ki m -nek m' körüli pályaelemeit nyernők (I), (II), (III) egyenletekből, melyekben a $\frac{dz}{dt}$ által jellemzett görbe szélső értékei használandók fel.

Ez utóbbi esetben a középnapi mozgás:

$$n = \frac{k \sqrt{m+m'}}{a^3},$$

melyből a két tömeg összege

$$m+m' = \frac{(2\pi)^3 (a \sin i)^3}{U^2 k^2 \sin^3 i}. \quad (\text{IV})$$

Ha sikerülne valami módon a pálya hajlását is megállapítani, akkor a 8) első egyenlete alapján a tömegek viszonya is kiértékesíthető. A spektroskopikus adatok a dolog természete szerint a hajláshoz nem engednek hozzáférni, más vele összefüggő jelenség megfigyeléseiből kell tehát leszarmasztatnunk. β Lyrænél BELOPOLSKY 1897. évi spektroskopiai adataira támaszkodva megkísérlettem fénygörbéje származtatásának helyes értelmezést adni, melyből nemcsak a hajlást, hanem a pálya excentromosságát is nyerhettem.

BELOPOLSKY 1897. év június, július és augusztus hónapjaiban másodszor is és még nagyobb gonddal igyekezett a kísérő pályáját megállapítani. A $\lambda = 448.2 \mu\mu$ vonal eltolódásait mérte ki. Az egyes sebességi adatokhoz abszcisszául választotta a legközelebbi fényminimumtól eltelt időt. A fényminimumok idejét az Annuaire du Bureauól vette ki, mely szerint a fenti hónapokban a következő napokon következtek volna be a főfényminimumok: 1897 június 9-én 11^h , június 22-én 9^h , július 5-én 7^h , július 18-án 5^h , július 31-én 3^h -kor pulkowai közép-időben.

Ezen adatokban egy kis hiba rejlik. 1897-ben PANNEKOEK¹ igen megbízható megfigyelésekre támaszkodva a fényminimum idejét előállító ARGELANDER-féle formulát megvizsgálván, azon eredményre jutott, hogy javításra szorul. Szerinte

$$1855 \text{ jan. } 6^d 604 + 12^d 908009E + 0.000003855E^2 - \\ - 0.00000000047E^3$$

formula adná pontosan a főfényminimum idejét greenwichi közép-időben. Benne E 1855 január 6-tól lefolyt periodusok számát jelenti.

E szerint az $\epsilon = 1201$ -ik periodus 1897 június 22-én

¹ Untersuchungen über den Lichtwechsel von β Lyræ. ANT. PANNEKOEK: Astr. Nachr. Nr. 3456.

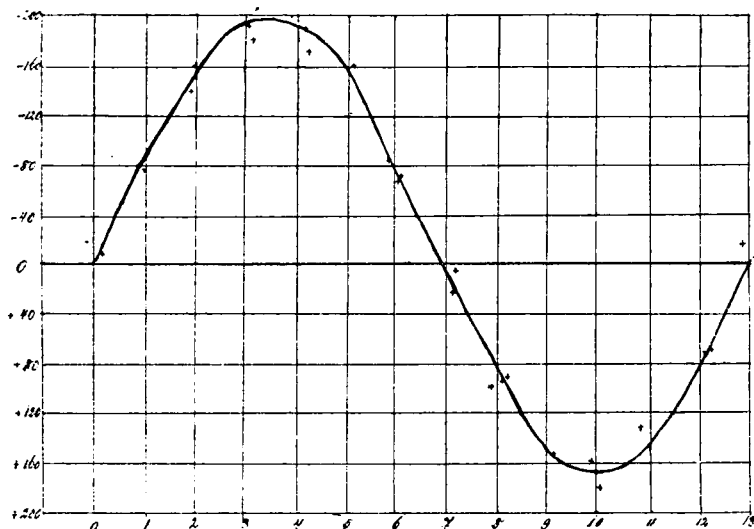
14^h59^m-kor lett volna greenwichi időben. Minthogy Pulkowa Greenwichnél 2^h1^m-val keletebbre van, azért Pulkowán 17^h-kor állt volna be, tehát épen 8 órával később, mint az Annuaire du Bureau szerint. 1905 nyári hónapjaiban hosszabb ideig követtem β Lyræ fényváltozását, s igen pontos photometrisi észleléseimből nyertem, hogy a fényminimum legalább is 4 órával előbb áll be, mint PANNEKOEK formulája adja. Ennélfogva a késés 4^h-ra szállítható le. A következő I. táblázat összeállításánál már ezt tekintetbe vettem, a sebességi görbét már ez alapon rajzoltam meg.

I. TÁBLÁZAT.

A sebességi görbe adatai BELOPOLSKY észleléseiből.

Az észlelés ideje pulkawai közép-időben	Fő minimumok		A Naphoz viszonyított sebesség különben	Phasis	
	Annuaire du Bureau szerint	1905. évi megfigyeléseim alapján		Annuaire du Bureau szerint	Megfigyeléseim szerint
1897 június	1897 június	1897 június			
20 ^h 48	9 ^h 46	9 ^h 62	+ 135.6	+ 11.03	+ 10.86
22 ^h 50	22 ^h 37	22 ^h 53	— 19.3	+ 0.15	+ 12.88
23 ^h 52			— 78.8	+ 1.16	+ 0.99
24 ^h 49			— 141.1	+ 2.12	+ 1.96
24 ^h 52			— 161.8	+ 2.15	+ 1.99
28 ^h 48			— 82.7	+ 6.11	+ 5.95
30 ^h 46			+ 105.1	+ 8.09	+ 7.93
1897 július					
2 ^h 49	1897 július	1897 július	+ 158.7	+ 10.12	+ 9.96
8 ^h 49	5 ^h 28	5 ^h 44	— 191.8	+ 3.12	+ 3.05
8 ^h 52			— 178.8	+ 3.24	+ 3.08
9 ^h 47			— 190.5	+ 4.20	+ 4.03
10 ^h 46			— 157.8	+ 5.18	+ 5.02
11 ^h 46			— 65.6	+ 6.18	+ 6.02
12 ^h 47			+ 24.0	+ 7.20	+ 7.03
13 ^h 47			+ 97.6	+ 8.20	+ 8.03
15 ^h 47			+ 179.2	+ 10.20	+ 10.03
17 ^h 46	1897 július	1897 július	+ 76.7	+ 12.19	+ 12.02
21 ^h 46	18 ^h 20	18 ^h 35	— 204.2	+ 3.28	+ 3.11
22 ^h 46			— 174.2	+ 4.28	+ 4.11
24 ^h 43			— 68.9	+ 6.25	+ 6.08
25 ^h 43			+ 4.0	+ 7.25	+ 7.08
26 ^h 42			+ 94.8	+ 8.24	+ 8.07
27 ^h 43			+ 156.1	+ 9.25	+ 9.08
30 ^h 42	1897 július	1897 július	+ 75.0	+ 12.24	+ 12.07
31 ^h 43	31 ^h 10	31 ^h 26	— 7.7	+ 0.34	+ 0.17
1897 auguszt.					
2 ^h 40			— 151.1	+ 2.31	+ 2.14

A 4. és 6. rovat adatai alapján β Lyræ sebességi görbéje:



1. ábra. β Lyræ sebességi görbéje.

E görbe szerint a kísérő sebessége zérusértéket vesz fel majdnem pontosan a főminimum idején és 6.90 nap alatt utána, a legnagyobb értékeket 3.40 és 9.90 nap múlva éri el a főminimum után. Az előrebecsített elmélet alapján a rendszer tömegközéppontjának sebessége: -14.8 km. A (7a) szélső értékei:

$$A = 182.5 \text{ km.}$$

$$B = 179.6 \text{ „}$$

A periodus tartama: 12.91 nap. A spektroskopikus adatokból kiszámítható pályaelemek tehát:

$$\begin{aligned} e &= 0.07 \\ \lambda &= 83.4 \end{aligned} \quad (13).$$

$$a_1 \sin i = 32000000 \text{ km.}$$

A periastronátmenet ideje, azaz mikor $v=0$:

$$\tau = + 0^d 0^h.$$



BELOPOLSKY az Annuaire du Bureau adatai után $\tau=0^m44^s$ órát kapott, mit a főminimum idejének pontos megállapíthatása el-
tüntetni engedett.

A további discussio alapját β Lyrae fénygörbéjének tulaj-
donságai és ama tény adják meg, hogy a főminimum és peri-
astronátmenet ideje összeesik.

2. β Lyrae fénygörbéjének megállapítása. β Lyrae fényes-
ségének meghatározására az ó-gyallai astrophysikai obser-
vatorium ZÖLLNER-féle nagy photometere szolgált. melynek
három különböző objectivje van, melyek alkalmas választásával
a fényváltozás minden phasisa jól követhető. E műszer elméletét
e helyen elhagyom, hanem utalok intézetünk harmadik kisebb
kiadványára,¹ melyben kedves barátom és kollegám, TASS ANTAL,
részletesen fejtegeti e műszer elveit.

Photometriai észleléseimet a II. táblázatba foglaltam össze.
A megméréndő csillagot, β Lyraet, mindig β -val jeleztem, össze-
hasonlító csillagjait pedig:

γ	=	Potsdamer Durchmusterung	II. 3206.	sz. csillagja.	Fényessége:	3.56
a	=	"	II. 2630.	"	"	2.60
b	=	"	II. 2616.	"	"	3.98
c	=	"	II. 2647.	"	"	4.04
d	=	"	II. 3212.	"	"	5.09
e	=	"	II. 3168.	"	"	5.42
f	=	"	I. 2879.	"	"	3.90
g	=	"	I. 2875.	"	"	4.85

¹ M. kir. Konkoly-alapítványú Astroph. Obs. Kisebb Kiadványai. 3.
S. Sagittae és T. Vulpeculae photometriai megfigyelései. Tass Antal.

II. TÁBLÁZAT.

 β Lyræ photometrikus megfigyelései.

1905-ben vég- zett megfigye- lések órállai középidejében	Csillag neve	Beállítások				J	Z	$\lg \sin^2 J$	Extinctional corrected \lg $\sin^2 J$	Különbség		Magnitudo	Közép	Levegő
		I.	II.	III.	IV.					\lg -ban	mg -ban			
Julius 14														
11 ^h 47 ^m	γ	22° 22'	21° 8'	17° 3'	18° 8'	20° 25'	15° 7'	9.0783	9.0801	+0.0344	+0.09	3.65		
11 48	β	18.420	7.19	3.18	8.19	30.16	2.9	0.383	9.0403					
11 49	β	20.319	0.19	0.19	9.19	55.16	2.9	0.492	9.0512					
11 50	γ	18.219	5.19	3.19	8.19	20.16	2.9	0.340	9.0360	-0.0097	-0.02	3.54	3.60	3
Julius 16														
11 ^h 34 ^m	α	31.031	0.35	2.33	3.32	62.47	3.9	4.632	9.5036	+0.7467	+1.87	4.47		
11 42	γ	18.917	8.17	8.19	8.18	57.15	4.9	0.061	9.0078	+0.2509	+0.63	4.19		
11 44	β	14.712	5.15	2.12	8.13	80.15	8.8	7.551	8.7569			4.36		2
Julius 19														
12 ^h 00 ^m	b	15.515	3.15	2.14	2.15	05.36	9.8	8.288	8.8482	-0.1453	-0.36	3.62		
12 02	c	14.416	0.15	5.14	4.15	07.37	2.8	8.299	8.8498	-0.1437	-0.36	3.68		
12 07	β	18.317	0.19	7.17	9.18	22.19	5.8	9.901	8.9935					
12 09	γ	19.221	4.21	8.22	0.21	10.19	2.9	1.126	9.1159	+0.1224	+0.31	3.87	3.72	2
Julius 20														
11 ^h 04 ^m	β	27.725	0.27	8.25	7.26	55.14	7.9	3.005	9.3020	+0.0435	+0.11	3.67		
11 05	γ	25.028	1.30	2.28	8.28	02.15	2.9	3.438	9.3455					
11 06	d	12.012	7.12	4.11	8.12	22.15	4.8	6.513	8.6530	-0.6490	-1.62	3.47		
11 07	β	25.729	3.29	7.29	5.28	55.14	7.9	3.587	9.3602					
11 08	γ	24.627	2.29	4.28	3.27	37.15	2.9	3.250	9.3267	-0.0335	-0.08	3.48	3.54	2
Julius 22														
10 ^h 33 ^m	β	34.835	2.37	7.36	3.36	00.15	1.9	5.384	9.5400					
10 34	e	16.416	2.15	0.16	3.15	97.15	8.8	8.790	8.8808	-0.6592	-1.65	3.77		
10 35	γ	36.437	8.38	1.36	3.37	15.15	7.9	5.619	9.5637	+0.0068	+0.02	3.58		
10 36	β	35.437	4.37	5.37	0.36	82.15	1.9	5.553	9.5569			3.68		2
Julius 23														
10 ^h 52 ^m	β	24.422	8.23	7.22	6.23	37.14	7.9	1.979	9.1994					
10 53	γ	34.332	0.30	9.31	0.32	05.15	2.9	4.496	9.4513	+0.2519	+0.63	4.19		
10 54	γ	29.730	4.29	0.30	6.29	92.15	2.9	3.958	9.3975	+0.1517	+0.38	3.94		
10 56	β	26.725	0.23	8.23	6.24	77.14	7.9	2.443	9.2458			4.06		3
Julius 28														
12 ^h 8 ^m	β	45.042	3.44	7.43	7.43	92.24	5.9	6.822	9.6887					
12 11	γ	51.252	2.54	2.52	2.52	45.25	0.9	7.983	9.8051	+0.1164	+0.29	3.85		
12 13	β	17.817	5.17	3.18	0.17	65.24	5.8	9.635	8.9700					
12 14	γ	21.421	7.19	5.19	0.20	40.25	0.9	0.845	9.0913	+0.1213	+0.30	3.86	3.85	3
Julius 29														
11 ^h 37 ^m	β	16.214	7.17	3.14	8.15	75.20	5.8	9.682	8.9721					
11 39	β	15.015	3.14	4.14	0.14	67.20	5.8	8.061	8.8100					
11 40	γ	31.226	8.25	7.26	8.27	62.21	3.9	3.323	9.3366	+0.3925	+0.98	4.54		

1905-ben vég- zett megfigye- lések adatai közönlékben	Csillag neve	Beállítások				<i>J</i>	<i>Z</i>	$\lg \sin^2 J$	Extinctional corrigit \lg $\sin^2 J$	Különbség		Magnitudo	Közép	Levegő	
		I.	II.	III.	IV.					\lg -ban	mg-ban				
Julius 29															
11 ^h 41 ^m	γ	25°9'28"	2°25'3"	26°8'8"	26°55'	21°39'	30059	3048							
11 43	β	19°2'18"	7'18"	2°17'5"	18°40'20"	58'99849	0024			+0.2884	+0.72428				
11 44	β	35°43'7"	5'36"	2°34'8"	35°97'20"	69'53789	5418								
11 45	<i>d</i>	25°42'7"	2°24'0"	25°25'45"	21°09'26639	2705				-0.2713	-0.68441				
11 47	γ	58°0'56"	0°50'0"	0°55'7"	54°92'21"	39'82599	8302			+0.2884	+0.72428	4.38	2		
Julius 30															
10 ^h 20 ^m	β	27°2'25"	5°26'3"	24°7'25"	92°14'69'	28119	2826								
10 21	<i>e</i>	15°0'16"	8'16"	7°15'2"	15°92'	14°88'	87648	8779		-0.4024	-1.01441				
10 22	γ	36°34'0"	3'38"	4°39'3"	38°57'	15°29'	58979	5914		+0.3111	+0.78434				
10 23	<i>d</i>	19°8'19"	2'18"	6°18'7"	19°07'	15°19'	02849	0300		-0.2503	-0.63446				
10 25	β	27°3'28"	0°28'3"	24°9'27"	12°14'69'	31779	3192								
10 26	β	24°0'25"	0°24'0"	0°25'3"	24°57'	14°69'	23779	2392				4.41	2		
Julius 31															
10 ^h 17 ^m	β	25°8'22"	0°22'3"	24°1'23"	55°14'79'	20319	2046								
10 18	γ	27°2'24"	8°24'8"	26°5'25"	82°15'49'	27809	2797			+0.0751	+0.19375				
10 23	β	36°8'38"	5'42'0"	0°39'1"	39°10'14'	79'59699	6011								
10 24	<i>e</i>	17°0'18"	3°16'5"	19°3'17"	77°15'88'	96918	9709			-0.6302	-1.57385				
10 25	γ	44°8'51"	2°45'4"	44°6'34"	92°15'49'	72719	7288			+0.1277	+0.32388				
10 27	<i>d</i>	21°4'21"	3°21'5"	19°3'20"	87°15'89'	10359	1053			-0.4839	-1.21388				
10 28	β	37°2'36"	8°40'1"	1°39'8"	38°47'14'	89'58779	5892					3.84	2		
Aug. 1															
10 ^h 08 ^m	β	36°3'39"	7°40'3"	43°2'39"	87°14'69'	61389	6153								
10 09	<i>e</i>	16°2'15"	7°15'3"	14°4'15"	40°15'48'	84838	8509			-0.7327	-1.83359				
10 10	γ	38°6'40"	6°42'2"	2°37'0"	39°60'15'	39'60899	6106			+0.0279	+0.07363				
10 11	<i>d</i>	18°8'17"	2°16'0"	0°17'3"	17°32'15'	88'94758	9493			-0.6334	-1.58351				
10 12	β	37°2'35"	0'37'5"	5°36'3"	36°50'14'	69'54879	5502					3.58	2		
Aug. 2															
10 ^h 03 ^m	β	43°9'45"	6°48'2"	2°48'2"	46°47'14'	69'72079	7222								
10 05	γ	45°6'40"	3°46'3"	0°44'3"	40°15'29'	68829	6899			-0.0325	-0.08348				
10 06	<i>e</i>	20°8'18"	7°18'0"	0°18'2"	18°92'15'	89'02189	0236			-0.6988	-1.75367				
10 08	β	46°3'45"	9'47'6"	6°46'2"	46°50'14'	69'72119	7226					3.57	2		
Aug. 3															
9 ^h 57 ^m	β	47°7'45"	6°45'2"	2°44'7"	45°80'14'	69'71099	7124								
9 59	γ	43°7'48"	1°50'3"	3°49'4"	47°87'15'	29'74039	7420			+0.0318	+0.08364				
10 01	<i>d</i>	22°3'18"	8'19'3"	3°18'8"	19°80'15'	89'05979	0615			-0.6487	-1.62347				
10 02	β	43°0'46"	7'47'8"	4°44'5"	45°50'14'	69'70659	7080					3.67	2		
Aug. 4															
9 ^h 36 ^m	β	42°7'38"	0'42'7"	7°40'6"	41°00'15'	19'63399	6355								
9 37	<i>e</i>	16°7'15"	8'15'3"	17°5'16"	32°15'48'	89738	8990			-0.7326	-1.83359				
9 38	γ	45°6'51"	2°48'7"	4°45'4"	47°75'15'	89'73879	7405			+0.1089	+0.27383				
9 39	<i>d</i>	19°8'19"	9'18'1"	1°18'6"	19°10'16'	29'02979	0317			-0.5999	-1.50359				
9 40	β	38°7'40"	5'44'2"	2°38'8"	40°55'15'	19'62609	6276					3.67	3		

1905-ben vég- zett megfigye- lések ógyallai középidejében	Csillag neve	Beállítások				J	Z	$\lg \sin^2 J$	Extinctionval corrigált \lg $\sin^2 J$	Különbség		Magnitudo	Közép	Levegő
		I.	II.	III.	IV.					\lg -ban	mg -ban			
Aug. 5 9 ^h 54 ^m	β	36° 6' 33"	9° 38' 13"	4° 23' 35"	47° 14' 6"	9.5272	9.5287							
9 55	e	16° 8' 17"	2° 16' 41"	5° 3' 16"	42° 15' 48"	9.0258	9.0422			-0.6261	-1.5738	3.85		
9 56	γ	47° 8' 44"	8° 49' 24"	3° 47' 27"	15° 29' 73"	9.7321	9.7338			+0.2035	+0.5140	3.07		
9 57	d	21° 3' 19"	0° 17' 8"	19° 9' 15"	50° 15' 89"	0.4709	0.4888			-0.4815	-1.2038	3.89		
9 58	β	36° 8' 33"	8° 34' 73"	2° 35' 62"	14° 6' 9"	5304	9.5319						3.94	3
Aug. 8 8 ^h 59 ^m	β	47° 7' 47"	3° 45' 44"	7° 1' 46"	87° 15' 19"	7264	9.7280							
9 02	γ	47° 7' 46"	4° 48' 74"	9° 7' 48"	12° 15' 89"	7438	9.7456			+0.0083	+0.0235	3.58		
9 03	d	22° 5' 18"	8° 18' 02"	1° 20' 10"	16° 29' 07"	229	0.7422			-0.6631	-1.6634	3.43		
9 04	β	45° 8' 49"	2° 50' 04"	7° 8' 48"	20° 15' 19"	7449	9.7465						3.50	2
Aug. 9 10 ^h 00 ^m	β	47° 6' 45"	7° 52' 25"	3° 48' 95"	15° 7' 9"	7548	9.7566							
10 02	γ	49° 2' 48"	8° 48' 04"	9° 6' 48"	90° 16' 09"	7542	9.7561			+0.0172	+0.0436	3.60		
10 03	e	21° 7' 17"	4° 21' 31"	7° 3' 19"	42° 16' 59"	0.4359	0.4566			-0.6933	-1.7336	3.69		
10 04	β	50° 7' 44"	3° 44' 54"	6° 0' 16"	37° 15' 79"	7193	9.7211						3.64	3
Aug. 10 9 ^h 41 ^m	β	48° 3' 49"	7° 44' 64"	7° 247"	45° 14' 99"	7346	9.7362							
9 43	γ	47° 5' 49"	7° 53' 94"	9° 550"	25° 15' 39"	7716	9.7733			+0.0382	+0.0936	3.65		
9 44	e	18° 0' 19"	4° 18' 61"	9° 9' 18"	97° 15' 89"	0.2409	0.2588			-0.7093	-1.7736	3.65		
9 44	β	45° 4' 50"	3° 46' 247"	347° 30	14° 99"	7325	9.7341			-0.0672	-0.1737	3.73		
9 52	f	38° 3' 41"	4° 43' 841"	641° 27	42° 69'	6386	9.6679						3.68	2
Aug. 15 9 ^h 50 ^m	β	46° 4' 47"	8° 48' 747"	747° 65	16° 99"	7373	9.7395							
9 51	e	17° 7' 17"	0° 19' 917"	718° 07	18° 88'	9832	8.9863			-0.7532	-1.8835	3.54		
9 52	γ	47° 6' 47"	2° 51' 052"	049° 45	17° 79'	7614	9.7640			+0.0245	+0.0636	3.62		
9 53	d	20° 5' 22"	8° 21' 318"	420° 75	18° 09'	0.9879	10.14			-0.6381	-1.5935	3.54		2
Aug. 16 10 ^h 14 ^m	β	45° 8' 45"	6° 46' 645"	345° 77	19° 59'	7105	9.7141							
10 15	e	17° 3' 17"	3° 16' 114"	816° 37	21° 18'	8999	8.9042			-0.8099	-2.0234	3.40		
10 16	γ	45° 6' 44"	2° 46' 151"	246° 77	19° 89'	7250	9.7286			+0.0145	+0.0436	3.60		
10 19	d	18° 3' 20"	2° 20' 419"	119° 50	20° 09'	0.4709	0.5057			-0.6634	-1.6634	3.48		2
Aug. 17 9 ^h 30 ^m	Be cslés s szerint t												3.75	
Aug. 18 9 ^h 42 ^m	β	33° 2' 34"	8° 34' 733"	334° 00	16° 89'	4951	9.4973							
9 43	e	15° 3' 14"	8° 16' 315"	815° 55	18° 28'	8565	8.8593			-0.6496	-1.6238	3.80		
9 44	γ	52° 8' 52"	8° 47' 345"	649° 62	17° 39'	7636	9.7660			+0.2571	+0.6442	3.20		
9 45	d	21° 2' 17"	7° 18' 618"	819° 07	17° 79'	0.2849	0.310			-0.4779	-1.1939	3.90		
5 46	β	34° 9' 35"	1° 36' 034"	235° 05	16° 89'	5182	9.5204						3.98	3
10 34	β	40° 9' 34"	7° 39' 840"	338° 92	23° 49'	5963	9.6020							
10 35	β	34° 7' 33"	8° 33' 535"	534° 37	23° 49'	5033	9.5090							

1905-ben vég- zett megfigye- lések ágyallai középüben	Csillag neve	Beállítások				J	Z	$\lg \sin^2 J$	Extinctional corrigált \lg $\sin^2 J$	Különbség		Magnitudo	Közép	Levegő
		I.	II.	III.	IV.					\lg -ban	\lg -ban			
Aug. 18 10 ^h 36 ^m	e	17°31'50"	14°7'16"	24°15'88"	25°18'8742"	8811				-0.6744	-1.68374			
10 37	γ	43°052'	350'	753'	049'	75	23°69'	76539	7711	+0.2156	+0.54410			
10 38	d	19°220'	220'	018'	819'	55	23°89'	04929	0552	-0.5003	-1.25384	3.89	3	
Aug. 19 11 ^h 04 ^m	β	34°737'	338'	836'	936'	92	26°89'	55739	5655					
11 05	γ	39°042'	644'	745'	342'	90	28°19'	66599	6753	+0.1098	+0.27383			
11 06	e	17°316'	818'	218'	617'	72	28°08'	96678	9760	-0.5895	-1.47395	3.89	2	
Aug. 20 9 ^h 39 ^m	β	40°443'	643'	243'	442'	66	16°29'	66209	6640					
9 42	e	18°816'	218'	215'	817'	24	16°98'	94378	9459	-0.7181	-1.80362			
9 46	γ	42°343'	745'	646'	844'	60	16°99'	69299	6951	+0.0311	+0.08364			
9 47	d	21°720'	319'	820'	820'	65	17°19'	09479	0970	-0.5670	-1.42367	3.64	2	
Aug. 21 9 ^h 44 ^m	β	49°149'	245'	350'	148'	42	18°09'	74789	7505					
9 45	e	20°318'	818'	817'	718'	90	19°79'	02099	0245	-0.7387	-1.84358			
9 46	γ	48°848'	348'	950'	349'	07	18°69'	75659	7595	-0.0037	-0.01355			
9 47	d	22°323'	821'	022'	322'	35	19°09'	16019	1633	-0.5999	-1.50359		2	
9 48	β	47°649'	451'	353'	250'	37	18°09'	77319	7758			3.57		
Aug. 23 9 ^h 34 ^m	β	36°635'	739'	336'	837'	10	17°39'	56099	5633					
9 35	e	17°316'	416'	217'	016'	72	18°58'	91788	9207	-0.6468	-1.62380			
9 36	γ	51°244'	645'	246'	746'	92	17°79'	72719	7297	+0.1622	+0.41397			
9 37	d	20°323'	219'	818'	820'	52	18°09'	08949	0921	-0.4754	-1.19390			
9 38	β	35°738'	338'	837'	337'	52	17°39'	56939	5717			3.89	2	
Aug. 24 9 ^h 29 ^m	β	31°232'	530'	629'	030'	82	17°39'	41919	4215					
9 32	γ	46°451'	251'	251'	350'	02	17°69'	76879	7713	+0.3361	+0.84450			
9 33	d	22°121'	620'	319'	820'	95	18°09'	10679	1094	-0.3258	-0.81428			
9 34	β	35°329'	830'	831'	831'	92	17°39'	44649	4488			4.39	2	
Aug. 25 10 ^h 02 ^m	β	28°030'	928'	326'	828'	50	23°49'	35739	3630					
10 03	e	12°314'	213'	813'	913'	55	25°88'	73958	7469	-0.6161	-1.54388			
10 05	γ	38°237'	336'	334'	536'	57	24°49'	55029	5566	+0.1936	+0.48415			
10 06	d	14°215'	616'	915'	715'	60	24°88'	85928	8659	-0.4971	-1.24385	3.96	2	
10 10	β	32°328'	030'	229'	630'	02	23°49'	39849	4141					
10 11	e	15°915'	416'	814'	015'	52	25°88'	85498	8623	-0.5418	-1.35407			
10 12	γ	44°047'	444'	845'	645'	45	24°49'	70589	7122	+0.3081	+0.77444			
10 13	d	18°618'	916'	218'	818'	12	24°88'	98558	9922	-0.4119	-1.03406	4.19	3	
Aug. 28 10 ^h 07 ^m	β	39°338'	642'	742'	240'	70	23°49'	62889	6343					
10 08	e	15°314'	215'	816'	916'	54	25°48'	84838	8557	-0.7369	-1.84358			

1905-ben vég- zett megfigye- lések ógyallai középidejében	Csillag neve	Beállítások				J	Z	$\lg \sin^2 J$	Extinctional corrigált \lg $\sin^2 J$	Különbség		Magnitudo	Közép	Levegő
		I.	II.	III.	IV.					\lg -ban	mg -ban			
Aug. 28 $10^h 10^m$	γ	38° 6' 41" 8	42° 9' 38" 8	40° 52' 24" 4	49° 6' 25" 9	6319				+0.0283	+0.073	63		
10 12	d	17° 8' 18" 6	20° 9' 18" 3	18° 90' 24" 8	90209	90276				-0.5760	-1.443	65		
10 13	β	39° 2' 35" 3	37° 0' 38" 2	37° 42' 23" 4	95673	95730								
10 14	e	17° 0' 15" 4	15° 0' 15" 8	15° 80' 25" 8	88700	88774							3.62	2
Szept. 5 $10^h 16^m$	β	30° 0' 29" 2	27° 0' 28" 2	28° 60' 30" 4	93600	93716								
10 18	e	14° 0' 15" 2	14° 6' 13" 6	14° 35' 31" 8	87884	88014				-0.5509	-1.374	05		
10 20	γ	41° 0' 39" 7	39° 9' 41" 0	40° 40' 30" 6	96233	96351				+0.2828	+0.704	20		
10 21	d	17° 3' 15" 0	16° 0' 17" 2	16° 38' 30" 8	90044	90124				-0.4399	-1.103	99		
10 22	β	26° 0' 27" 8	28° 2' 26" 8	27° 20' 31" 8	93200	93330							4.08	2
Szept. 6 $9^h 46^m$	β	33° 6' 31" 8	30° 8' 32" 6	32° 20' 26" 1	94533	94610								
9 47	γ	45° 8' 47" 2	43° 2' 42" 6	44° 70' 26" 2	96944	97022				+0.2622	+0.664	22		
9 48	e	19° 3' 19" 2	18° 7' 20" 2	19° 35' 26" 5	90405	90485				-0.3915	-0.984	44		
9 49	β	33° 3' 29" 6	29° 0' 30" 2	30° 52' 26" 1	94114	94191								
9 54	g	25° 8' 23" 0	23° 9' 23" 3	24° 00' 41" 9	92186	92466				-0.1934	-0.484	37	4.34	2
Okt. 17 $9^h 51^m$	β	36° 0' 36" 2	37° 0' 36" 1	36° 32' 53" 9	95451	95673								
9 52	γ	44° 8' 40" 2	41° 8' 37" 2	41° 00' 53" 8	96339	96957				+0.0879	+0.223	78		
9 53	d	18° 2' 19" 4	17° 7' 17" 3	18° 15' 54" 0	89869	90494				+0.5584	+1.403	69		
9 54	β	37° 3' 34" 2	37° 8' 36" 2	36° 37' 53" 9	95461	95683							3.74	2
Okt. 23 $9^h 50^m$	β	42° 4' 41" 7	43° 1' 43" 4	42° 66' 57" 9	96613	97417								
9 51	γ	41° 7' 44" 3	43° 8' 46" 6	44° 60' 57" 0	96929	97688				+0.0271	+0.073	63		
9 52	d	22° 0' 20" 0	20° 0' 20" 6	20° 65' 57" 3	90947	91721				-0.5696	-1.423	67		
9 53	e	18° 0' 17" 0	18° 0' 16" 0	17° 24' 59" 0	89436	90300				-0.7117	-1.783	64	3.65	
Okt. 24 $9^h 36^m$	β	46° 8' 47" 4	48° 0' 48" 4	47° 65' 56" 2	97373	98095								
9 37	e	19° 5' 18" 1	17° 2' 17" 5	18° 07' 57" 1	89822	90586				-0.7509	-1.883	54		
9 38	γ	47° 0' 47" 8	51° 5' 51" 5	49° 45' 57" 0	97614	98373				+0.0278	+0.073	63		
9 39	d	20° 3' 23" 1	21° 0' 18" 7	20° 75' 57" 0	90987	91746				-0.6349	-1.583	51	3.56	
Nov. 5 $9^h 00^m$	β	46° 0' 47" 3	45° 0' 44" 9	45° 80' 57" 9	97109	97913								
9 01	γ	50° 0' 48" 4	49° 2' 43" 9	47° 87' 57" 3	97403	98177				+0.0266	+0.073	63		
9 02	d	20° 0' 19" 1	22° 0' 19" 1	19° 80' 57" 6	90597	91386				-0.6527	-1.633	46		
9 03	e	17° 2' 17" 1	16° 8' 16" 7	16° 95' 59" 0	89294	90158				-0.7755	-1.943	48	3.52	
Nov. 26 $7^h 50^m$	β	47° 4' 48" 2	47° 5' 49" 3	48° 10' 58" 5	97435	98272								
7 51	γ	48° 2' 46" 7	47° 2' 46" 8	47° 22' 59" 7	97314	98219				-0.0063	-0.023	54		
7 52	γ	46° 7' 48" 5	47° 1' 48" 6	47° 72' 59" 7	97333	98288				-0.0221	-0.063	50		
7 53	β	49° 8' 50" 2	48° 6' 49" 8	49° 60' 59" 2	97633	98509							3.52	

A PANNEKOEK által javított ARGELANDER-féle formula szerint az 1428. periodus 1905 július 3.^d 98-ra esik. Ettől és az utána következő periodusoktól számított phásisokból és az ezekhez tartozó nagyságrendekből állapítható meg a fénygörbe alakja s egyúttal PANNEKOEK javított formulájának értéke. Észleléseimnek ily módon való feldolgozását a III. táblázatban adom.

III. TÁBLÁZAT.

Észlelés ideje ógyallai közép-időben 1905.		Észlelés greenwichi közép- időben		Főminimumok Pannekoek szerint	Phasis	Fényes- ség
Julius	14. 11 ^h 48 ^m	Julius	14.44	Julius 3.98	10.46	3.60
"	16. 11 44	"	16.44		12.46	4.36
"	19. 12 07	"	19.45	" 16.89	2.56	3.72
"	20. 11 06	"	20.41		3.52	3.54
"	22. 10 34	"	22.39		5.50	3.68
"	23. 10 54	"	23.41		6.52	4.06
"	28. 12 10	"	28.46		11.57	3.85
"	29. 11 41	"	29.44		12.55	4.38
"	30. 10 23	"	30.38	" 29.70	0.58	4.41
"	31. 10 24	"	31.38		1.58	3.84
Augusztus	1. 10 10	Augusztus	1.38		2.58	3.58
"	2. 10 05	"	2.37		3.57	3.57
"	3. 9 59	"	3.37		4.57	3.56
"	4. 9 38	"	4.35		5.55	3.67
"	5. 9 56	"	5.37		6.57	3.94
"	8. 9 01	"	8.33		9.53	3.50
"	9. 10 02	"	9.37		10.57	3.64
"	10. 9 43	"	10.35		11.55	3.68
"	15. 9 50	"	15.36	Augusztus 11.71	3.65	3.54
"	16. 10 14	"	16.38		4.67	3.48
"	17. 9 30	"	17.35		5.64	3.75
"	18. 10 09	"	18.37		6.66	3.94
"	19. 11 04	"	19.41		7.70	3.89
"	20. 9 39	"	20.35		8.64	3.64
"	21. 9 46	"	21.36	" 11.71	9.65	3.57
"	23. 9 36	"	23.35		11.64	3.89
"	24. 9 32	"	24.35		12.61	4.39
"	25. 10 05	"	25.37	" 24.62	0.75	4.08
"	28. 10 10	"	28.37		3.75	3.62
Szeptember	5. 10 19	Szeptember	5.38		11.76	4.08
"	6. 9 48	"	6.36		12.74	4.34
Október	17. 9 52	Október	17.36	Október 15.26	2.10	3.74
"	23. 9 50	"	23.36		8.10	3.65
"	24. 9 36	"	24.35		9.09	3.56
November	5. 9 00	November	5.33	" 28.17	8.16	3.52
"	26. 7 50	"	26.28	November 22.96	3.32	3.52

A fénygörbe meghatározása végett válaszszuk abszcissának a phásist, a legközelebbi minimumtól eltelt időt, ordinatának pedig a phásishoz tartozó fényességeket. A 0.15 napon belül eső phásisokból és fényességekből közepeket képezünk. E szerint a fénygörbe pontjait a IV. táblázat adja.

IV. TÁBLÁZAT.

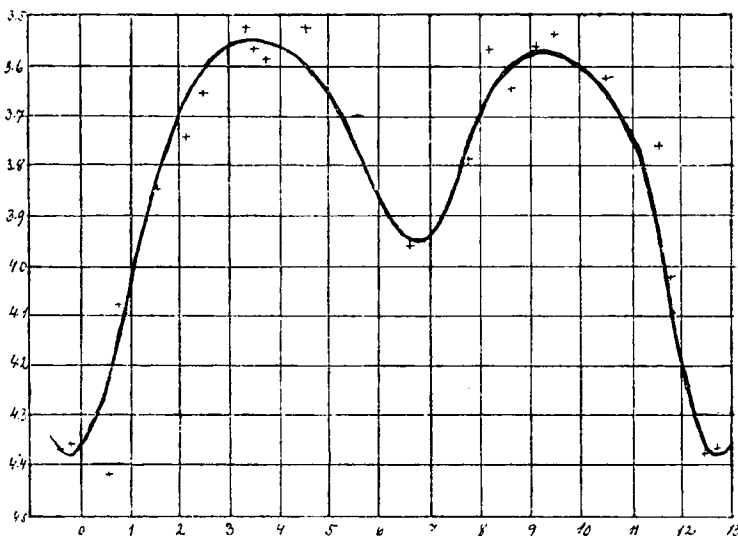
Phasis	Fényesség	Észle- lések száma	Phasis	Fényesség	Észlelések száma
0.58	4.41	3	6.58	3.95	11
0.75	4.08	6	7.70	3.89	2
1.58	3.84	4	8.13	3.57	6
2.10	3.74	2	8.64	3.64	3
2.57	3.65	6	9.09	3.56	3
3.32	3.52	2	9.59	3.53	5
3.54	3.56	5	10.51	3.62	4
3.70	3.58	6	11.56	3.76	5
4.62	3.52	5	11.70	4.02	6
5.56	3.70	6	12.50	4.37	6
6.58	3.95	11	12.69	4.36	5

Ezen adatok alapján a fénygörbét a 2. ábra adja. A ki-egyenlítés a lehető legpontosabb. E görbéből mindenekelőtt azt olvashatjuk le, hogy a PANNEKOEK-féle formula a főminimum idejét valóban későbbre adja, úgy, hogy teljesen jogosult azon feltevésünk, mely szerint a periastronátmenet ideje és a fő-minimum ideje összeesik.

A görbe szerint

- I. minimum — I. maximum között 3.65 nap van
 I. maximum — II. minimum " 3.25 " "
 II. minimum — II. maximum " 2.70 " "
 II. maximum — I. minimum " 3.31 " "

Az I. minimum után az I. maximum 3.65 nap, II. mini-mum 6.90 nap. a II. maximum 9.60 nap mulva következik tehát be.

2. ábra. β Lyræ fénygörbéje.

3. A pálya excentricitásának és hajlásának kiszámítása photometriai adatokból.

A sebességi görbének és a fénygörbének összehasonlításából kiderül tüstént, hogy azok a legszorosabb kapcsolatban vannak. A periastron, illetve apastron ideje pontosan egyezik a fő-, illetve a mellékminimum idejével, az első fénymaximum valamivel később áll be, mint a sebességi görbe első szélső értéke, a második fénymaximum meg előbb, mint a sebesség második szélső értéke, a kísérő pályájának második felét előbb futja be, mint az első felét. Ez utóbbi esetben azért nem érvényesül a KEPLER-féle második törvény, mert a rendszerre hathatóan észrevehető erő hat naprendszerünk irányából.

A két görbe összehasonlításából egész szabatosan megállapítható az is, hogy semmiesetre sem lehet β Lyræ rendszere oly kettős rendszer, melynek elemei a közös tömegközéppont körül keringenek, mert a két összetevő legnagyobb sebessége idejének a fénymaximumok idejével egyeznie kellene, miután a fényminimumok a peri-, illetve apastron idejével vág-

nak össze. E tünetényeket tehát csakis oly rendszerrel magyarázhatjuk, mint a minőt a bevezetésben felállítottam.

Feltevéseimből jogosultságának kimutatása után módszert adok a pálya excentricitásának és hajlásának kiszámítására.

Mi a rendszer pályáját nem látjuk, csak a látósugárra merőleges síkra eső vetületét. A minimumok idején a radiusvector vetületeinek a legkisebbeknek, a maximumok idején pedig a legnagyobbaknak kell lenniök. Keressük tehát meg a radiusvector vetületének szélső értékeit.

A spektroskopikus és photometrikus eredmények alapján bizonyos, hogy a pálya nagy tengelyének vetülete a látósugárral és a pálya nagy tengelyével egy síkba esik.

Ennélfogva a radiusvector vetülete a pálya nagy tengelyére:

$$r \cos v.$$

Ennek vetülete a látósugárra merőleges síkra:

$$r \cos v \cos i,$$

a hol i a pálya hajlása. A radiusvector vetülete tehát azon síkra, melytől a pálya hajlását számítjuk:

$$r_0^2 = r^2 \sin^2 v + r^2 \cos^2 v \cos^2 i = r^2 (1 - \cos^2 v \sin^2 i).$$

Helyettesítvén r értékét, nyerjük:

$$r_0 = a(1 - e^2) \frac{(1 - \cos^2 v \sin^2 i)^{\frac{1}{2}}}{1 + e \cos v}. \quad (15)$$

Az r_0 szélső értékeit

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{dv} = a(1 - e^2) \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos^2 v \sin^2 i)^{-\frac{1}{2}} (1 + e \cos v) 2 \cos v \sin v \sin^2 i + \right. \\ \left. + e \sin v (1 - \cos^2 v \sin^2 i)^{\frac{1}{2}} \right\} \frac{1}{(1 + e \cos v)^2} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

követelés adja. Minthogy $(1 - \cos^2 v \sin^2 i)^{\frac{1}{2}}$ általánosságban nem zérus, a (16) teljesül mindkét oldalnak $(1 - \cos^2 v \sin^2 i)^{\frac{1}{2}}$ -vel való szorzása után is.

Ekkor

$$\cos v \sin v \sin^2 i (1 + e \cos v) + e \sin v (1 - \cos^2 v \sin^2 i) = 0,$$

melyből

$$(\cos v \sin^2 i + e) \sin v = 0 \quad (17)$$

feltétel áll elő.

A (17)-et kielégíti

$$\begin{aligned} \sin v &= 0, \\ \cos v &= -\frac{e}{\sin^2 i}; \end{aligned} \quad (18)$$

e két feltételnek négy valóságos anomalia tesz eleget:

$$\begin{aligned} v &= 0, \\ v &= 180^\circ, \\ v &= \arccos\left(-\frac{e}{\sin^2 i}\right), \\ v &= 2\pi - \arccos\left(-\frac{e}{\sin^2 i}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

A (18) és (19) szerint r_0 négy helyen érhet el szélső értéket. A $\frac{d^2 r_0}{dv^2}$ vizsgálatából kitűnik, hogy az első két helyen minimum, a másik kettőnél maximum a szélső érték.

Ha $e = \sin \varphi$, M a középanomalia, akkor

$$\frac{dM}{dv} = \frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} = \frac{\cos^3 \varphi}{(1 + e \cos v)^2}. \quad (20)$$

A (20)-ból

$$M = n(t - \tau) = \cos^3 \varphi \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}, \quad (21)$$

ebben t a folyó idő, τ a periastron átmeneti ideje.

Az integratio végzése után:

$$n(t - \tau) = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \right\} - \sin \varphi \cos \varphi \frac{\sin v}{1 + e \cos v}. \quad (\text{V})$$

Másrészt

$$n(t - \tau) = E - e \sin E, \quad (\text{VI})$$

a hol E az excentromos anomália.

Az (V) és (VI) alatti egyenletekből értékesíthető ki a pálya excentricitása és hajlása, tekintettel a sebességi és fénygörbe sajátosságaira, meg (19)-re.

Egyszerűbb mód is kereshető e és i kiszámítására. Az I. sebességi maximumot 3.40, a II.-at 9.90 nap múlva éri el a periastronon való átmenet után a kísérő. Ha tehát a rendszerre más erő észrevehető hatást nem gyakorolna, 3.21 nap alatt kellene az I. maximumot elérnie, tekintve 12.91 napos keringést. Az I. sebességi maximumra felírható tehát:

$$-\frac{2\pi}{12.91} 3.21 = E - e \sin E, \quad (\text{VII})$$

a hol

$$\operatorname{tg} E = \frac{1 - e^2}{e}.$$

A (VII) adja

$$e = 0.06$$

értékét, mely valamivel kisebb, mint BELOPOLSKY adata.

A főminimum után az I. fénymaximum 3.65, a II. 9.60 nap múlva áll be. Ha háborgatás nem volna, akkor az I-nek 3.48 nap múlva kellene bekövetkezni a főminimum után, a II-nak pedig előtte. Minthogy a periastronon való átmenet ideje $\tau=0$, azért az I. fényességi maximumra

$$-\frac{2\pi}{12.91} 3.48 = E - 0.06 \sin E \quad (\text{VIII})$$

KEPPLER-féle egyenlet írható fel, melyből

$$E = 100^\circ 60'.$$

A

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1.06}{0.94}} \operatorname{tg} 50^\circ 30'. \quad (\text{IX})$$

$$v = 104^\circ$$

valóságos anomáliát adja a fényességi maximumra.

Ennélfogva a (18) második egyenletéből

$$i = 30^\circ$$

értéket nyerjük.

Jóllehet a sebességi és fényességi görbe adatai igen jók, de ha volna is hibájuk, még ekkor sem jöhet a hajlásra $i=90^\circ$.

mint MYERS¹ nyerte azon feltevésből, hogy a főcsillagot meg a kísérőt is erősen lapult ellipsoidoknak vette fel, mert hibájuk csak kicsiny lehet.

Így tehát a kísérő azon pályájának fél nagytengelye, melyet a rendszer tömegközéppontjára vonatkoztatunk:

$$a_1 = 6400000 \text{ km.} \quad (22)$$

4. *A rendszer összetevőinek meghatározása.* Ha a sötétebb csillagnak a látósugár irányába eső sebességi görbéje is ismeretes volna, megállapíthatnók az összetevők tömegeit is. BELOPOLSKY 1893-ben kevésbé megbízható értékeket nyert ez észlelésekből, hasonlóan VOGELÉBŐL csak annyit lehet kétségtelenül megállapítani, hogy a kevésbé világító állandóan felénk jön. E mellett szól megdönthetetlenül úgy a fény-, mint a sebességgörbe alakja is, minthogy kétségtelenné vált a periastron átmeneti idejének egyezése a főminimuméval.

Ha nincs is módunkban a sötét összetevő sebességgörbéjét ismerhetni, az előbb említettem tényből e componens egyes helyeken uralkodó sebességére azonban következtethetünk a 2. alapján. Az I. maximum idején $\frac{dz'}{dt} = 0$ vehető, mert 2.-ből következik, hogy alig haladhatja meg ez értékét, a II. maximum idején pedig legalább is 2. $(-14.8) = -29.6 \text{ km}$, vagyis a tömegközéppont sebességének kétszerese lesz $\frac{dz'}{dt}$.

Ennélfogva $\frac{dz}{dt}$ szélső értékei igen nagy megközelítéssel:

$$\begin{aligned} A' &= 197.3 \text{ km.} \\ B' &= 194.4 \text{ „} \end{aligned} \quad (23)$$

Az m m' körül leírt pályájának fél nagytengelye tehát

$$a = 72.050.000 \text{ km.} \quad (24)$$

A (IV) szerint a két összetevő tömege, ha mindent csillagászati egységben fejezünk ki:

$$m + m' = 89 \odot, \text{ naptömeg.} \quad (25)$$

¹ C. MYERS: Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes β Lyrae. München, 1896.

A (8) első egyenlete folytán:

$$\begin{aligned} m' &= 79\odot, \\ m &= 10\odot, \end{aligned} \quad (26)$$

a hol \odot a naptömeget jelenti.

A fénygörbéből pedig az egyes összetevők sugarait vezethetjük le. Legyen I_m a kettős rendszer intensitása maximumkor, I_1 főminimum, I_2 mellékminimum. I_3 a főminimum után 2 nappal, I_4 a mellékminimum után 1·35 nappal. I_3 -hoz tartozó nagyságrend 3·80, I_4 -hez 3·70. A két utóbbi értékhez úgy jutottam, hogy a háborgástól eltekintettem, azaz 3·80, illetve 3·70 nagyságrendekhez tartozó phásisokból közepet vettem.

E fényváltozásokhoz tartozó vetületek a projectiosikon:

$$\begin{aligned} r_{01} &= 0\cdot392 \\ r_{02} &= 0\cdot441 \\ r_{03} &= 0\cdot446 \\ r_{04} &= 0\cdot460 \end{aligned}$$

astronomiai egységben (a földpálya fél nagytengelye = 1).

Ha R a kevésbbé világos csillag sugara, r az intenzívebbé és

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_{0i}^2 + (R^2 - r^2)}{2r_{0i}} \\ \cos a_i &= \frac{r}{R} \\ \cos a'_i &= \frac{r_{0i} - r}{r} \\ T_i &= R^2 \pi \frac{a_i}{180^\circ} - \frac{r_{0i}^2 + R^2 - r^2}{2r_{0i}} R \sin a_i \\ T'_i &= r^2 \pi \frac{a'_i}{180^\circ} - \frac{r_{0i} - (R^2 - r^2)}{2r_{0i}} r \sin a'_i, \\ &\quad i=1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (27)$$

akkor

$$\begin{aligned} (T_1 + T'_1) i_2 &= I_m - I_1 \\ (T_2 + T'_2) i_1 &= I_m - I_2 \\ (T_3 + T'_3) i_2 &= I_m - I_3 \\ (T_4 + T'_4) i_1 &= I_m - I_4 \end{aligned} \quad (28)$$

összefüggések írhatók fel. A (28)-ban i_2 a fényesebb összetevő terület egységére eső intenzitás a projectiosíkon, i_1 pedig a kevésbbé fényesé. $T_i + T'_i$ az eltakart terület a projectiosíkon.

A (28) R és r -re

$$\begin{aligned} R &= 0.35 \\ r &= 0.12 \end{aligned} \quad (29)$$

értékeket adja astronomiai egységben, azaz

$$\begin{aligned} R &= 52.050,000 \text{ km.} \\ r &= 15.300,000 \text{ " } \end{aligned}$$

Ha σ m' közepsűrűsége, s pedig m -é. akkor

$$\sigma = \frac{s}{5} \quad (30)$$

Az

$$\frac{i_1}{i_2} = 0.64. \quad (31)$$

A kísérő tehát tényleg intenzívebb fényű. már sűrűsége is 8-szor oly nagy, mint a főcsillagé. E szerint a fejlődésben már előbbre van, a centrumában már hatalmas mag is lehet, ellenben a főcsillag, ha nem is gáz egész tömegében, de csak a fejlődés első stadiumában lehet. E két óriási égi test a periastronban is 9-szer oly messze van egymástól, mint a Hold a Földtől, a külső felületük távolságát értve.

β Lyrae kettőscsillag jellemzői tehát, ha nem is pontosan, de a valóságnak igen nagy megközelítésével:

$$\begin{aligned} e &= 0.06 & R &= 52050000 \text{ km.} \\ \lambda &= 90^\circ & r &= 15^\circ 300000 \text{ " } \\ i &= 30^\circ & m' &= 79^\circ \\ a &= 72050000 \text{ km.} & m &= 10^\circ \\ a_1 &= 64000000 \text{ " } & s &= 5\sigma \\ & & i_1 &= 0.64i_2, \end{aligned}$$

az i_2 a kísérőnél a projectio területegységére eső intenzitás.

Ezen eredményeinkből a rendszer physikai állapotára igen fontos következtetést vonhatunk le. A kísérő tényleg intenzívebb fényű, a sűrűsége pedig 5-ször oly nagy, mint a főcsillagé. A kísérő tehát a fejlődésben előbbre van, hatalmas

magja lehet, melyet óriási tömegű izzó gágréteg, chromosphæra, vesz körül. E majdnem még egészében izzó gázburok adja az igen nagy nyomásra valló széles és fényes hydrogenvonalakat, a fémek vonalai, mint a magnesiumé, $\lambda = 448.2\mu$, habár élesen, de csak halványan jelennek meg; ez utóbbi periodikus eltolódásaiból határozta meg BELOPOLSKY a kísérő pályáját. A főcsillagnak már szintén van magja, melyet aránylag gyengébben izzó gázburok vesz körül, melynek hydrogenvonalai nem is tűnhetnek fel oly fényesen, mert a legkülső gágrétegben erős absorptiót szenvednek. A gyengébb intensitás és kisebb sűrűség kisebb nyomásra is mutat, innen van, hogy az absorptió sávok nem is olyan szélesek, mint a fényes sávok. A fényes vonalak szélesedése tehát nem kettőződés, hanem a roppant nagy nyomásnak természetes következménye. Hogy VOGEL észlelései szerint az akkor számított minimum idején a fényes sávok nem látszottak oly széleseknek, mint a fényváltozás egyéb phasisai alatt, egyszerűen onnan származott, hogy a minimum csak 0.7 nap múlva állt be a valóságban, a fényes sáv egyik oldalát (az ibolya felé esőt) tehát az absorptió sáv még fődte. BELOPOLSKY 1893-iki méréseiben egyébként is igen nagy hibák lehettek, mert a sötét sávok eltolódását sokszorta nagyobbak mérte, mint a milyenre a tömegközéppont sebessége vall. A széles vonalak kettőződött felfogása meg nagyban elősegítette a fényes F -re nyert periodikus eltolódások ellenkező irányát.

Felfogásom tehát szép összhangban van β Lyrae spektrumának jellegével, melyet VOGEL az I. spektraltypusba helyez. Sokkal jobban, mint MAYERSÉ, ki két teljesen gázállapotú ellipsoidtömeggel igyekezett a rendszert megvilágítani. β Lyrae rendszerét tehát, melyet VOGEL még 1905-ben is nagyon titokzatosnak mond, ha nem is teljesen, de mégis eléggé kielégítően igyekeztem megmagyarázni.

Ha még a főminimum és mellékminimum idején a látszó pályán a componensek távolságát kimérnök, nyernők a'' azon szöget, mely alatt a csillag pályájának fél nagytengelye a Földről látszik, melyből

$$\pi = \frac{a''}{a}$$

parallaxishoz jutnánk, azon szöghöz, mely alatt a földpálya fél nagy tengelye látszik a csillagról. Ebből pedig a rendszer távolságát kapnánk meg.

Befejezésül még két megjegyzést kívánok tenni. A pálya háborgására vall ama körülmény is, hogy a periodus nem állandó. Ez az egyik. A másik a fénygörbére vonatkozik. A két összetevő a valóságban már a fénymaximumok előtt és után is annyira van egymástól, hogy a fődés a projectionosikon nem áll be a valóságban. Ezen idő alatt a fényességnek tehát állandónak kellene lennie, pedig a fénygörbe, habár csekély, de folytonos változást mutat. Ennek magyarázata abban keresendő, hogy szemünk vagy a távcső a rendszert felbontani nem képes és nagyobb korongban egyesíti azon fénysugarakat, melyek a térben ugyanazon távolságból, de szélesebb mezőről jönnek.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 április 2.-án tartott üléséből.)

A LYTOCERATIDÆ NEUM. CSALÁD
TAPADÓIZMÁNAK FELFEDEZÉSE A S. VIGILIOI (GARDA)
DOGGER FAUNÁJÁBAN.

PRINZ GYULÁ-tól.

(I. tábla.)

A dunántúli és délalpi mezozói képződmények rokonsága már régen ismeretes. A csernyei jura-faunából előkerült 117 faj közül 28-at a felső olaszországi jurából is meghatároztak, vagyis az ottani eddig ismert kefalopoda-faunának körülbelül harmada Csernyén is előfordul. A Csernye és a C. S. Vigilio-i lelőhelyek nagy hasonlósága indított arra, hogy VACEK szép munkájának tárgyát meglátogassam. A Pai, C. S. Vigilio és Caprino közötti terület tömérdek feltárásával kellemes tere a geológiai megfigyeléseknek.

A C. S. Vigilio és Il Bonatto között a Garda-tó partján levő feltárásokból elég könnyen gyűjthetünk kővéleteket, már a mennyire a rendkívül kemény márvány megengedi.

A s. vigilioi lelőhelyet BENECKE fedezte fel a mult század hatvanas éveinek elején. Azóta sok geologus járt ott, mint VACEK, FUCINI, KOKEN, TORNUST és mások. C. S. Vigilio sztrati-grafiája kétszeresen érdekel bennünket e nevezetes lelőhely alapján felvetett kettős probléma miatt. Az eddigi leírások szerint a s. vigilioi vörös márvány faunájában a fajok együttesen szinte összekeverve szerepelnek, olyan fajok, a melyek máshol szigorúan szintek szerint helyeződnek el. A másik probléma pedig a lász és dogger közötti határkérdésekben merül fel.

C. S. Vigilion a vörös márványban (aalenien¹ = dogger

¹ Az alsó dogger emelet fogalma alatt azon szintek összegét értjük, a mely az opalinusszinttel kezdődik és a Sowerbyi-szinttel záródik be, tehát QUENSTEDT "dogger α , β , és γ "-jának felelne meg. L. Prinz: Az Ék. Bakony id. jurakorú rétegeinek faunája. Földt. Int. Évk. XV. k. p. 18.





α és β) BENECKE ¹ szerint: «Eine weitere Gliederung an Ort und Stelle hat niemals durchgeführt werden können». Az alábbiakban két, egymástól petrografiailag is különböző szintből gyűjtött faunát mutatok be, a mely érdekes adatokat szolgáltat ezen terület sztratifráciájának ismeretéhez. BENECKE említett munkájában így jellemezi lelőhelyünket:

«Mischung von Versteinerungen an einem Punkte, die anderswo nach Horisonten geschieden sind, ist ja vielfach angegeben. Eines der merkwürdigsten Vorkommen ist jenes vom Cap San Vigilio bei Garda am Gardasee.»

A VACEK-féle alsó doggerkorú réteg, mint legutolsó leutazásomkor megfigyeltem, épenséggel nem csak 1 méter vastag. 1903-ban a sárga oolitra települve találtam meg először a vörös márványban az alsó doggerfaunát. 1905-ben ismét arra járva, vertikálisan (figyelembe véve a rétegek 25°-os ÉNY dőlését) kb. 15—20 méterrel magasabban gazdag lelőhelyre akadtam.

A bejárt terület geológiai viszonyainak ismertetését későbbre hagyva, most csak e két szint tőlem gyűjtött faunáját közlöm:

Felső réteg: Terebratula Aspasia MENEGH., *T. Aspasia* MENEGH. var. *minor* ZITT., *T. Aspasia* MENEGH. var. *major*. ZITT. *T. Rossii* CANAV. *T. Rossii* CANAV. var. nov., *Rhynchonella Vigili* LEPS. *Rh. Vigili* LEPS. var. *Erycina* STEF. *Rh. Vigili* LEPS. var. *Ximenesi* STEF. *Neritopsis Philea* ORB., *Arca Plutonius* DUM.? *Corbis Vigili* VACEK, *Himmites velatus* GOLDF. *Pecten cingulatus* PHILL, *Pholadomya corrugata* KOCH et DUNK. *Aspidoceras pugnax* VACEK. *A. pertinax* VACEK. *A. sagax* VACEK. *A. tenax* VACEK. *Erycites fallax*. BEN. (21 példány) *E. eximius* HANTK. et PRINZ, *E. retrorsicostatus* HANTK. et PRINZ, *E. inter-medius* PRINZ,² *Hammatoceras procerinsigne* VACEK,

¹ Die Versteinerungen der Eisenerzformation von Deutsch-Lothringen und Luxemburg, Abhandl. z. geol. Spezialkarte von Elsass-Lothringen. Strassburg. 1905. p. 535.

² A ritkított betűkkel szedett fajnevek azokat jelölik meg, a melyeket eddig csak Csernyéről ismertünk.

Hamm. planinsigne VACEK, *Hamm. cf. amaltheiforme* VACEK. *Harpoceras Aalense* ZIET. *Harp.* (Grammoceras) *acutum* TATE. *Harp.* (Lioceras) *aff. serpentinum* SOW. *Lyt. ophioneum* BEN. *Lyt. aff. quadrisulcatum* ORB. *Oppelia platyomphala* VACEK, *Opp. platyomphala* VACEK. var. nov., *Phylloceras aff. Böckhi* PRINZ, *Phyll. Gardanum* VACEK, *Phyll. tatricum* PUSCH, *Phyll. mediterraneum* NEUM. *Phyll. ultramontanum* ZITT. *Phyll. Zignodianum* ORB. *Tmetoceras scissum* BEN. *Rhacophyllites* sp. ind.

Alsó réteg: *Terebratula Gottschei* STEINM. *Hinnites velatus* GOLDF. *Coeloceras cf. modestum* VACEK. *Harpoceras* (Grammoceras) *Steinmanni* HAUG. *Phylloceras Emeryi* BETT. *Phyll. Nilssoni* HEB. *Phyll. baconicum* HANTK. et PRINZ. *Phyll. Hantkeni* SCHLOENB. et PRINZ. *Phyll. Zeles* ORB. *Phyll. ultramontanum* ZITT. *Rhacophyllites* sp. ind.

A szint ismerete nélkül gyűjtött fajok: *Harpoceras* (Grammoceras) *acutum* TATE. *Harp.* (Lioceras) *subcomptum* BRANCO. *Harp.* (Lioceras) *elegans* SOW. *Harp.* (Lioceras) *opalinoides* MEYER, *Erycites cf. gonionotus* BEN. *Rhynchonella aff. Cleisiana* LEPS.

A felső-szint gyűjtött anyagából ezenkívül LÖRENTHEY a *Sphenodus longidens* AG. sp.-t határozta meg.

A Csernyén és a Capo S. Vigilion közösen előforduló alsó doggerkorú fajok száma ezzel 36-ra emelkedett. A C. S. Vigilio-ról ismeretes alsó doggerkorú fajok száma pedig a fent közöltekkel 16-tal szaporodott.

A s. vigilioi fiatalabb jurarétegekből gyűjtött fajok leírása területünk geológiai viszonyainak tárgyalásával együttesen kerül közlésre.

A *Phyll. Hantkeni* SCHLOENB. et PRINZ sp. csernyei példánya HANTKEN szerint a *Harp. Boscense*, *Lyt. fimbriatum*, *Lyt. Sutneri* és a *Coel. pettos* társaságában került elő, tehát határozottan a középső liászból való. A csernyei felső liászból úgy a *Phyll. Hantkeni*, mint a *Phyll. baconicum* HANTK. et PRINZ is ismeretlen, utóbbit csak az alsó doggerből ismerjük. S. Vigilion, a vörös márvány alsó szintjében e két faj közösen fordult elő, hozzá még a *Phyll. ultramontanum* és néhány a felső liászra jellemző faj. Az alsó szintben tehát olyan középső, felső

líász-ra és alsó dogger-re jellemző fajok, a melyeket egyebütt különböző szintekben találunk, itt együttesen, egymás mellett foglalnak helyet.

Ezzel szemben a felső szint sokkal egyöntetűbb faunájú. Itt csak 2—3 QUENSTEDT-féle szint keverődéséről lehet szó. A dogger α , β és néhány legfeljebb a γ -ra emlékeztető alak. A máshol elkülönült opalinus és Muschionæ szinteket azonban itt nem tudjuk elválasztani. Ennek az érdekes jelenségnek magyarázatát ma még nem tudjuk megadni. Az valószínű, hogy a QUENSTEDT féle középeurópai szintek a mediterrán vidékeken fel nem találhatók.

A gyűjtött s. vigilioi kövületek között a legbecsesebb egy kis lytoceras-töredék, a mely felvilágosítást ad a *Lytoceratidae* NEUM. család tapadóizmának alakjáról. A s. vigilioi egyetlen e fajta példányunknak a lakókamrás része maradt épen. Látjuk a szájnyílás mögötti befűződést, a lakókamra köbelének egy részét és a házának kb. fél cm²-nyi darabkáját. A ház e kis darabkája, továbbá a *sima* köbél kétségtelenné teszi, hogy példányunk a *Lytoceratidae* családba tartozik.

Mielőtt a felfedezett tapadóizom képét lefestenők, először a kövülepéldány rendszertani helyzetét kell tisztáznunk.

A lytoceras és phylloceras génuszoknak van egy-egy olyan csoportja, a melyeket kizárólag külsejük alapján igen nehéz egymástól megkülönböztetni. A lytocerasok szóban forgó csoportja a *Lyt. tripartitum* RASP. sp. körül, a phyllocerasoké a *Phyll. tortisulcatum* QU. sp. körül csoportosul. Utóbbiak monografikus rövid összefoglalását *Pompeckj* írta meg (Beitr. z. e. Revis. d. Ammon. d. Schw. b. Jura. Stuttgart. 1893), az előbbienekről szétszórva találunk csak egyes adatokat *Hauer*, *Beltoni*, *Raspail*, *Quenstedt*, *Ooster*, *Simionescu* stb. munkáiban. A kamararajzok alapján természetesen könnyű a kérdés eldöntése. Az én egyetlen s. vigilio-i példányom azonban csak lakókamra, a melyen remekül látható a héj szerkezete, külső és belső díszítése, de a kamararajz nem.

A s. vigilioi befűződéses lytoceras héja rendkívül vastag, a 2 cm.-nél is kisebb átmérőnél jó egy mm. A házdísz rendkívül gazdag. A kb. 20—25 mm² terjedelmű kis héjdarabocskán

rácsos rendszerű diszítés látható. A szifótól némi (a kanyarulat oldala $\frac{1}{2}$ -ának megfelelő) távolságra egy, uralkodó, hosszanti borda látható. A hosszanti bordát (valószínűleg bizonyos állandó távolságban) harántbordák keresztezik, a melyek a köbélén nyomot hagynak, míg a hosszanti borda nem. A hosszanti és harántbordák természete e szerint különböző. Az első felületi diszítés, a második befűződés. A most leírt diszítésen kívül láthatunk még másodrendű diszítést is. A jobban kimagasló hosszanti főborda és a befűződések között rácsszerű diszítés foglal helyet. A főbordák és a befűződések közötti teret kitöltő rácsos házdiszen a hosszanti fonalak az uralkodók, a harántul elhelyezkedők az alárendeltek.

A *Lyt. tripartitum* csoportjának olyan faját, a melybe példányunk kétségtelenül beleilleszthető volna, nem ismerjük.

Külső alakra legjobban hasonlít még a *Lyt. Čizžeki* HAU. sp.-nek azon ábrájára, a melyet BETTONI¹ közöl.

A *Lyt. Čizžeki* sp.-t HAUER először 1853-ban írta le² néhány szóval a hierlatzi liászból, a rajza azonban csak 1856-ban jelent meg.³ Ezen rajz szerint a *Lyt. Čizžeki* sp. keresztmetszete letompított sarkú négyszöghöz hasonló, házdisze pedig változatosan csipkézett harántcsikokból áll. A köbél befűződéseinek a a héj külső felületén is befűződések felelnek meg, a mi ellentétben áll ZITTEL-nek e csoportról adott jellemzésével, hogy «die Steinkerne durch vereinzelte, entfernte Einschnürungen ausgezeichnet sind, denen auf der glatten oder feingestreiften Schale einfache Rippen entsprechen» etc.⁴ A mi s. *vigilioi* példányunkon úgy látszik a köbél befűződéseinek a nyoma a héj felületén alig látszik meg, a mit a héj rendkívüli vastagsága könnyen érthetővé tesz.

¹ Fossili domeriani d. prov. d. Brescia. Memoires d. la Soc. pal. Suisse. V. XXVII. 1900. p. 27. T. VIII. fig. 3.

² Über d. Gliederung d. Trias-, Lias- und Juragebilde, i. d. NO. Alpen. Jahrbuch d. k. k. R. A. IV. 1853 p. 756.

³ Über die Cephalop. a. d. Lias d. NO. Alpen. Denkschriften d. k. Akad. d. W. M.-n. Cl. Bd. XI. p. 67. T. XXI Fig. 4—6.

⁴ Handbuch d. Paleont. Bd. II. p. 441.

HAUER a Brescia-vidéki liászból ¹ két hasonló alakot SOWERBY *Lyt. Phillipsi*-jével azonosított, ezeket azonban BETTONI id. munkájában a *Lyt. Čizžeki*-vel egy fajba tartozónak jelentette ki. A HAUER-féle három ábrát nézve csupán, nagyon valószínűtlennek látszik BETTONI feltevése. A hierlatzi *Lyt. Čizžeki* megtermettebb példánya is sokkal szélesebb, vaskosabb alakú, mint az apró bresciai példányok, a mely utóbbiak között is maga HAUER még két változatot látott. HAUER *Lyt. Phillipsi* Sow. példányait MENEGHINI ² *Lyt. Grandonensis*-nek nevezte el, s egy hasonló, ebbe a csoportba tartozó fajt *Lyt. dorcadis* néven irt le. BETTONI a *Lyt. dorcadis* sp.-t is a *Lyt. Čizžeki* sp. tágnak gondolt határaiba vonta, de nem az egyes alakok genetikai összefüggésének kimutatásával, hanem egyszerűen majdnem minden magyarázat nélkül. Így járt GEYER *Lyt. Fuggeri*-nek nevezett faja is. Ezek szerint a reánk annyira fontos BETTONI-féle *Lyt. Čizžeki* néven közölt alak faji meghatározása pontosság dolgában némely kívánni valót hagyván, a mi s. vigilioi példányunk faji nevének eldöntése nem egyszerű kérdés. A szóba jöhető fajok: 1. *Lyt. Grandonensis* MENEGH., 2. *Lyt. dorcadis* MENEGH. 3. *Lyt. nov. sp.* (= *Lyt. Čizžeki* HAU. BETTONI példánya.) Az itt felsorolt alakok azonban a geologiai korok szerint jóval idősebbek a s. vigilioi példányuál.

Az Ammonoidea-rend mai rendszertana majdnem teljesen a héj díszítésén és építési módján alapul. Tagadhatatlan, hogy nagy valószínűség szerint a héj építési módja és az állat szervezete között igen szoros összefüggés van. A héj nagyobb különbségeinek valószínűleg a szervezet különbségei megfelelnek. Sohasem szabad azonban szemünk elől téveszteni, hogy a legfontosabb jellemvonásokat a *lakókamra belsejében* kell keresnünk. A kefalopodaház belső falain a bennlakó állat durva lenyomata látható, a mit a Nautilus Pompilius-nak *Waaagen*-től ³ közölt ábrái bizonyítanak.

¹ Über die Ammoniten a. d. sog. Medolo etc. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. M. u. Nat. Cl. 1861.

² Fossiles du Medolo. p. 37—40.

³ Über die Ansatzstelle der Haftmuskeln beim Nautilus und den Ammoniten. Palaeontographica. XVII. 1871.

Ha azonban a ma élő N. Pompilius-t valamely mezozóirétegben találunk megkövesedve, a *Waagen*-féle ábrákat annak köbeléről lerajzolni még teljesen épen megmaradás esetén sem tudnók. Míg tehát egyrészt kétségtelen, hogy a kövült kefalopodák rendszertanának, valamint az összes kefalopoda-faunának alapján levont következtetéseknek a lakókamra belsejének kutatásán kell alapulnia, addig azzal a ténnyel állunk szemben, hogy a kövült kefalopodák lakókamrájának belsejéről még ma is alig tudunk valamit. Az állat tapadó-izomzata segítségével erősíti magát a házához; ha valamelyik tagjának, úgy ennek kell a ház belső falán leginkább nyomot hagynia. Ha az ammonitesek tapadóizomzata csakugyan olyan szerkezetű, mint a milyennek *Waagen* idézett értekezésében a nautilusét leírja, akkor a lehető legszerencsésebb megtartás esetén lehet csak reményünk felfedezésére. *Waagen* az oroszországi jurát említi, mint a melynek kővületei kitűnő állapotban maradtak meg, s mint a mely alkalmas az ilyen kutatásokra. A most bemutatott példány bizonyítja, hogy a híres s. vigilioi (Garda-tó) lelőhely kővületei is épen olyan ép állapotban vannak.

OWEN¹ szerint minden kefalopodának házában meg kell lennie a tapadóizom nyomának. Problémánk tárgyalásával először SUESS² foglalkozott behatóbban. SUESS a phyllocerasoknál vélte felfedezni a tapadóizom benyomatát. A felsőbb jurarétegekben, valamint a neokomban olyan befűződéses phyllocerasok éltek, a melyek befűződései közepük táján, tehát a ház oldalán megtörttek, e törés helyén pedig kis nyelvalakú mélyedés foglalt helyet. SUESS szerint ez a «löffelförmiger Eindruck» «nur vom grossen Muskel herrühren kann». Azt a régi elméletet, a mely szerint a befűzések elhagyott, régi szájnnyílások, SUESS is elfogadta akkoriban. Innen ered azután az a tévedése, hogy a tapadóizom tapadási helyéül az *annulust*, vagy az *annulus* előtt helyet foglaló *myothekát* jelölte meg. WAAGEN abból indulva ki, hogy a tapadóizom, ezen az állat életére annyira fontos, be-

¹ Mem. on the pearly Nautilus. London. 1832. p. 17.

² Über Ammoniten. Sep. a. d. LXI Bd. d. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. Mat.-nat. Cl. 1870.

cses szerv nem lehetett kitéve a ház legjobban veszélyeztetett helyére, valószínűtlennek találta SUESS véleményét. De megerősítette WAAGEN-t egyébként a *Nautilus Pompilius*-on végzett vizsgálata¹ és ebben a nézetében: «Beim *Nautilus* ist die Form des Mundrandes ausschliesslich von der Form des Mantelrandes abhängig, die durch die Lage der Haftmuskeln nicht modifiziert wird.» A *Phyll. tortisulcatum* csoportjának SUESS-től említett befűződési teljesen azonos képződmények a *Lyt. Čzjžeki* vagy *tripartitum* befűződéseivel, a szájnnyílás maga okvetlenül még a befűződés előtt foglal helyet, s a *myotheka*-k (Ohren) arról ugranak még előre. Minden tapadóizom a kefalopoda házában belsejében homorodást, üreget keres, a melybe belekapaszkodhassék; a SUESS említette «löffelförmiger Eindruck» pedig csak kőbélén benyomat, a melynek a ház belsejének kiemelkedése, daganata felel meg. Arról le kell mondanunk, hogy a tapadóizom nyomát olyan gyakran tudjuk felfedezni, mint azt SUESS annak idején feltette; igazat kell adnunk MOJSISOVICSNAK, «Die Epidermiden (Runzelschichte und Hafteindrücke des Mantels auf der Innenseite der Schale) kommen nur ausnahmsweise vor».²

A *Nautilus Pompilius* tapadóizmának helyét «conchiliolin» (WAAGEN) lemezke jelzi, a melynek alakja letompított háromszöghöz hasonló. A mi *lytoceras*unk oldalán látható kidomborodott lemezke a *Naut. Pompilius* conchiliolin-lemezének felelhet meg. WAAGEN a *Naut. Pompilius* conchiliolin-lemezkéjét a következőleg jellemzi: «Die Platte besteht rein aus organischer Substanz ohne eingelagerte Kalkkörperchen, zeigt unter dem Mikroskop ein sehr feinblättriges Gefüge, in dem indess die einzelnen Lagen eine homogene Masse darstellen, die nur bei sehr starker Vergrösserung feine, höchst unregelmässige Linien erkennen lässt.»

A s. vigilioi *lytoceras* tapadó-izma nyomának képét a következőleg festhetjük: A lemezke nagysága kb. 4 mm. hosszú

¹ Über die Ansatzstelle des Haftmuskels beim *Nautilus* und den Ammoniden. Paläontographica. Bd. XVII. 1870.

² Die Cephalop. d. mediterr. Triasprovinz. Wien. 1882 p. 3.

és 3 mm. széles. (A táblán közölt ábra távlati rajz, tehát eltorzult körvonalakat mutat). Minden oldalról élesen körülhatárolt, kivéve a kifelé néző csúcsának a szájnylás felé eső részét, a hol kissé elmosódik. A lemezke pereme, ott a hol élesen határolódik, meredek, vastagsága a köldök felé növekedik. Diszítése egy erős harántbordából, elsőrendű harántcsikokból, továbbá másodrendű haránt- és hosszanti csikokból áll. A diszítés alkotóinak helyzetét nem a lemezhez, hanem magához a házhoz vettük, a harántborda tehát a házdiszen is harántnak felel meg. Úgy az egyetlen harántborda, mint az összes harántcsikok a lemezkenek a szájnylás felé eső peremével párhuzamosak. A szájnylás felé eső perem az egyetlen harántbordához hasonlóan megduzzadt, de kifelé, mint már említettük, teljesen elmosódik. A szájnylás felé eső perem és a harántborda között öt, a harántborda mögött még három elsőrendű harántbarázda foglal helyet. A barázdák közötti szalagok domborúak, és hosszában másodrendű párhuzamos harántcsikokkal díszítettek.

Az egész harántos diszítést keresztül szelik az előbb említett, s a másodrendű harántcsikoknál valamivel erősebb hosszanti csikok. A hosszanti csikok nem olyan egyenletesek, mint a harántosak. A barázdák közötti emelkedések miatt a gyengén görbülő szinusz-vonalhoz hasonlítanak és egyenlőtlenül erősebbek vagy gyengébbek.

A tapadóizom benyomatának közelén kívül *Lytoceras*-lakókamránk egyéb, szintén a tapadási felületre visszavezethető rajzokat is mutat. A tapadóizmot jelző lemezke felett a lakókamra domború felületén még egy, valamely hegyes gömbi háromszöghöz hasonló *mélyedést* találunk. E mélyedésnek képét a rajz hűen mutatja. A köpeny nyomának a szájnylás felé néző csúcsán még egy kicsi, valamivel erősebben bemélyedő gödröcske van, benne egy kis bordácskával. Ez a mélyedés megfelelne Mojsisovics *Naut. superbus* faja «appendix»-ének.

Összehasonlítva a *Lytoceras* most leírt rajzait a *Naut. Pompilius* megfelelő testrészeivel, a kettő között bizonyos hasonlatosságot találunk. A lakókamra oldalán elhelyezett erős tapadóizmok és az azokkal járó tapadási szalagok (annulus =

Verwachsungsband) nagyjában megegyeznek helyzetük tekintetében.

A *Lytoceras* tapadóizmának felfedezése ezzel az *Ammonoidea* és *Nautiloidea* alrendek rokonságának nagyon óhajtott megvilágításához is adott egy becses sugarat. Az bizonyosnak látszik a közöltek alapján, hogy az *ammonitesek* és *nautiloideák* tapadóizma és köpenylenyomata lényegesen nem különbözik egymástól.

Jura- vagy kréta-korú ammoniteseken a tapadó-izomnak vagy köpenynek nyomát — az előbb említett *Oppelia* sp. kivételével — eddig még nem ismertük.

A minden kézikönyvben közölt *Oppelia steraspis* OPP. sp. eredeti példányainak köpenylenyomatát a müncheni paleontologiai múzeumban alkalmam volt megtekinteni. Az utazáshoz szükséges szabadságot mesterem és igazgatóm Koch Antal dr. egyet. tanár úr az egyetemi munkaidőben is kegyes volt megadni, a mit e helyen külön is megköszönök.

A meglehetősen összepréselt példányokon a köpenynek nyoma keskeny *kidomborodó* szalag alakjában mutatkozik, a mi — köbélről lévén szó — a héjon barázdának felelt meg. Bár a példányok eléggé épek, nagyon valószínű, hogy a corrosio jelentékenyen elősegítette az annulus ellentállóbb anyagának kiélesedését. Semmi okunk sincs arra a feltevésre, hogy az *Oppelia steraspis* OPP. sp. és a ma élő *Naut. Pompilius* annulusának szerkezete között (természetesen eltekintve a helyzetüktől) bármilyen különbség is lenne. A tapadóizomnak semmi nyoma sem látszik az *Oppelia steraspis* OPP. sp. megvizsgált példányain.

A paleozoi és triasz ammoniteseket illetőleg azonban találunk itt-ott néhány megjegyzést. Eck¹ ilyenféle, de csak megközelíthető bizonyossággal is alig állítható nyomokat fedezett fel egy a *Ceratites semipartitus* MONTF. sp.-hez hasonló² kamrázott töredéken.

¹ Über einige Triasversteinerungen. VI. Eindrücke der Mantelhaftfläche und des Mantelhafrings bei *Ceratites semipartitus* MONTF. sp. Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. Bd. XXXI. 1879.

² A lerajzolt töredékből nehéz volna a fajmeghatározás helyességét kétség nélkül elfogadni.

Annál szebbek és becsesebbek azok az adatok, a melyeket Mojsisovics hallstatti gyűjtései szolgáltatnak. Eltekintve az *Orthoceras Styriacum* Mojs. sp.-ek tapadóizmának és az *Orthoceras lateseptatum* HAU. tapadási felületétől, Mojsisovics több nautilus és ammonites fajon is megtalálta a tapadóizom, illetve köpeny benyomatát. A *Pleuromutilus superbis* Mojs. és a *Nautilus* (?) *eugyrus* Mojs. fajok tapadóizmának nyomai alak és hely tekintetében olyan különbségeket mutatnak, a melyeket a nautiloideák rendszertanában döntő befolyásúaknak kell tartanunk.

Mojsisovics a bennünket közelebről is érdeklő *Rhacophyllites* (?) *occultus* Mojs. faj lakókamráján is talált olyanféle nyomot, a melyből a köpeny alakjára lehetne következtetni. A *Rhacophyllites*-ekhez hasonló, de velük teljesen nem azonosítható faj annulus-a feltűnően hasonlít a *Naut. Pompilius*-éra, bár a helye *közelebb van a szárnyiláshoz*, mint az utóbbié.

A nautiloideáktól teljesen eltérő helyen találjuk meg a köpeny benyomatát a *pinacoceratidáknál*. Az annulus itt a köldökből kiindulva nagy kanyarodással előre és kifelé hajlik. A köpeny helyét finom és gazdag disztítésű felület („stries creuses”) jelzi.¹ A *Tirolites carniolicus* Mojs. faj lakókamráján Mojsisovics egészen hátul, az első légkamra közvetlen közelében találta meg valamely izom helyét, a mely ha a tapadóizomtól származik, annak egy újabb típusát képviseli.

Az itt elmondottakkal ismeretessé vált a *Lytoceratidae*-család köpeny- és tapadóizmának alakja legalább főbb vonásaiban, mindenesetre azonban pontosabban, mint eddig akármelyik kipusztult kefalopoda-családé. Nagy nehézséget okoz az efajta paleontológiai vizsgálatoknál, hogy az állattan és az őslénytan között nincsen meg az okvetlenül szükséges szoros kapcsolat, az egymást kiegészítő munkálkodás. A ma élő nautilusok házát pontosan ma sem ismerjük, de még kevésbé azokat a jellem-

¹ Mojsisovics szerint: „Hafttring am vorderen Ende der Wohnkammer, kurz vor der Mündung, am Convextheile beginnend und über die Seitentheile bis in das hintere Ende der Wohnkammer zum Concavtheile hinabsinkend; Haftfläche des Mantels aus punkt- oder striemen-förmigen Erhabenheiten bestehend . . .”

vonásokat, a melyekből következtetnünk lehetne a szervezet különbségeire.

A lakókamra belső konfigurációjának rendszertani fontosságát WAAGEN ismerte fel, azért helyén valónak tartom, hogy az ő szavaival fejezzem be a véletlentől kezembe adott felfedezés ismertetését:

«Még nincsen minden pont kimerítve, a mely az ammonitesek rendszertani elrendezéséhez támasztékot nyújthatna, néhányat még le fog leplezni a jövő, a mely ma még sötétnek és homályosnak tetszik; s ha az összes ammonitesek tapadási felületét csak annyira ismernők, mint az Oppeliáét, már azzal is sokat nyernénk. Fájdalom, ennek az ellenkezője a mai állapot... «und so schliesse ich das Weitere neuen Entdeckungen anheimstellend».

★

Függelékül néhány érdekesebb s. vigilioi faj leírását közöljük:

Terebratula Gottschei STEINM.

1882. *Terebratula Gottschei* STEINMANN. Neues Jahrbuch f. Miner. etc. Bd. I. p. 252. Taf. XIV. Fig. 7—8.

A bolíviai (Caracoles) *Terebratula Gottschei* STEINM. sp. előfordulása S. Vigilion egyike az érdekesebbeknek, a melyeket e lelőhely nyújtott. E faj a *Terebratula perovalis* Sow. csoportjába tartozik. SEINMANN szerint nagyon változatos alakú; a legömbölyített és szögletes alakokat átmenetek kötik össze. A mi egyetlen s. vigilioi példányunk a legömbölyített változathoz tartozik, külső körvonalaiban STEINMANN 7. ábrájára hasonlít.

A szóban forgó s. vigilioi példány valamivel hosszabb, mint széles (14×13 mm.), vastagsága 7 és 8 mm. között van. A commissurák egyenletesen haladnak meggyömbösülés nélkül. A héj pontozott. A növekedési csikok rendkívül erősek, nagy ráncokat alkotnak.

STEINMANN a *T. Gottschei* sp. korát nem említi, úgyszintén TORNUST sem (Pal. Abh. p. 141). Legközelebbi rokonai, a *T. perovalis* Sow. csoportja, az egész jurában el vannak terjedve,

maga a *Ter. perovalis* typ. a középső és felső doggerban. Az a caracolesi sárga mészkő, a melyet STEINMANN (*Neues Jahrb. Bb. I. p. 253*) említ, a s. *vigilii* lelet alapján tehát valószínűleg felső liász-, alsó doggerkorú.

Phylloceras cf. *Zetes* ORB.

1893. *Phyll. Zetes* ORB. *Pompeckj. Beiträge z. Revis. d. Amm. p. 26.*

1900. „ „ „ *Bettoni. Foss. dom. p. IX t. 2. á.*

Münchenben járva, POMPECKJ professor figyelmeztetett a *phylloceras*-ok egy sajátosságos csoportjára, a melynek egyik képviselője, a mi *Ph. Zetes* ORB. sp.-ünk, általánosan ismeretes.¹ A müncheni paläontologiai muzeumban ezen csoport több olyan képviselőjét is láttam, a melyeken a tarajképződés kétségtelen nyomai láthatók. Az irodalomban eddigé az egyetlen *Kochites* subgen.² ismeretes a tarajképződésnek nyomairól. A müncheni, POMPECKJ prof. szívésségéből látott anyag feldolgozása volna hivatva eddigi gyér ismereteinket némileg kiegészíteni. A s. *vigilii* két kopott példány alapján kivihetetlen minden behatóbb tanulmányozás. Külsőjük teljesen megegyezik BETTONI idézett rajzával. A nagyobbik példányon (kőből) a *Phyll. Zetes* ORB. külső részére jellemző sűrű gyenge bordák nyomai is látszanak.

A *Phyll. Zetes* ORB. sp. tulajdonképen a középső liászra jellemző faj, S. *Vigilion* egészen bizonyosan nem ebből az emelethől került elő, hanem a liász-dogger határrétegekből. A fiatalabb «*Zetes*»-csoportba tartozó fajok közül a *Phyll. subobtusum* KUD. sp. (*Synon. Simionescu. Les ammonites jurassiques de Bucegi (= Bucses) Annales scientifiques de l'Université de Jassy. 1905*) áll hozzá legközelebb.

Méretetek :

Átmérő.....	75	106	mm.
Utolsó kany. magassága.....	45	65	„
„ „ szélessége.....	19(?)	27—28	„
Közv. az utolsó alatti kany. magass.	14(?)	19	„
„ „ „ szélessége.....	?	?	„
Köldök-átmérője.....	7—8	8	„

¹ Prinz. Tarajképz. a *phyll.* családjában. *Földt. Közl. 1905.*

² E csoport kevésbé gyakran szereplő fajai a *Loscombi*, *numismale*, *Elteni*, *Wechsleri*, *paucicostatum*, *dolosum*, *ibex*, *Boblayei* sp.-ek.

Harpoceras (Grammoceras) Steinmanni HAUG.

1885. Harpoceras Steinmanni HAUG. Monogr. d. Harpoc. N. Jahrb. etc. Bb. III. p. 673.

Az 5 mm. átmérőjű kanyarulat bordái még hiányzanak, az oldalai teljesen simák. A taraj azonban már határozott, teljes. A kamrarajzok meglehetősen nagy távolságban vannak egymástól, a nyergeket egy öblöske ketté osztja. Az 5 mm. kanyarulatra körülbelül 10—12 kamra esik. A bordák képződése, az e fölötti, tehát a kb. 9—10 mm. átmérőjű kanyarulatra esik, a mely a mi egyetlen, bár eléggé szép példányunkon el van mállva. A 16 mm. átmérőtől s onnan befelé kb. 40°-nyi nagyságú kanyarulatdarab, a mely eléggé épen került birtokunkba, már erős bordákkal van ellátva. A bordák itt erősek, sarlóalakúan a tarajhoz simulnak. A 16 mm-es kanyarulaton körülbelül 36—38 borda lehet. Az oldalakon a bordák már itt is egyesesek, csak ott, a hol a lapos oldalak gótívszerűen egyesülni készülnek, ott görbülnek hirtelen előre. Az 59 mm. átmérőnél a bordák száma 56. A bordák száma tehát a kanyarulatok növekedésével párhuzamosan szintén növekszik.

A kamrarajz a grammocerasok kamrarajzának typusa; összesen négy nyeregből áll.

A külső alak teljesen megfelel HAUG. eredeti leírásának. Az eredeti példány a la verpillière-i opalinus-szintből került elő.

Phylloceras Hantkeni SCHLOENB. em. PRINZ.

1904. Phylloceras Hantkeni Schloenb. Prinz. Ék. Bakony p. 30. XI. t.

A cserneyei *Phyll. Hantkeni* sp.-t HANTKEN középső liász-korúnak határozta meg. A s. vigilioi példány feltétlenül fiatalabb korú rétegből származik, mert olyan társaságban találtam, a mely a felső liász és az alsó dogger határát jellemzi.

Az erősen mállott, kopott példány ugyan lehet a *Phyll. Hantkeni* SCHLOENB. sp.-nek valamelyest megváltozott utódja, a melyet talán mutáció gyanánt később elkülöníthetünk, de tág köldöke, legömbölyített sarkú négyszöghöz hasonló keresztmetszete teljesen jelzett fajunkra ütnek.

Méretek:

Átmérő	67 mm.
Utolsó kanyarulat magassága.....	35 "
" " szélessége.....	27 "
Közv. az utol. alatti kany. magassága.....	15 "
" " " " szélessége	13 "
Köldök	11 "

Phylloceras baconicum HANTK. em. PRINZ.

1904. *Phylloceras baconicum*. Hantk. Prinz. Ék. Bakony pag. 34. XXXVII t. 2 á. XXVI t. 9 á.

A Csernyén olyan nagy számban előforduló *Phyll. baconicum* HANTK. em. PRINZ sp.-nek S. Vigilion is előfordulása újabb bizonyítéka a két hely jura-faunája rokonságának. A s. vigilioi példány és a csernyei példányok között alig lehet nagyobb különbség. Az előbbi házának némi maradványai láthatók a kőbelen, a melyek valószínűvé teszik, hogy a héj *teljesen sima* volt, tehát hiányzanának róla azok a finom csikok, a melyeket a *Phyll. Borni* PRINZ sp. házán láthatunk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906. április 2.-án tartott üléséből.)

A tábla magyarázata:

1. ábra. *Lytoceras* nov. sp. ind. (aff. *Čzjžeki* HAU.) Alsó dogger. C. S. Vigilio (Garda). Gyűjt. a szerző. Term. nagys. — Eredetije a budapesti egyetem őslénytani intézetében.
 2. ábra. Ugyanaz nagyítva.
 3. ábra. Ugyanazon példány házdíszének részlete. Kb. 10-szeres nagyítás.
-

SEISMIKUS HOSSZKÜLÖNBSEGMEGHATÁROZÁS.

KÖVESLIGETHY RADÓ 1. tagtól.

A földrengésekre vonatkozó terjedelmes számításaim eddig kivétel nélkül azt mutatták, hogy a seismikus hat elem közül a fészkek mélysége $h=0$ alakban adódik. Ebből azt a következtetést kellett levonnom, hogy a rengés egyik legérdekesebb eleme, a mely az eredet helyének kijelölésével a rengés okára is rámutathat, pusztán időadatokból meg nem határozható.

Mindenek előtt ki akarom mutatni, hogy ez nem csupán számításaink egy véletlen eredménye, hanem a seismikus hibaegyenlet szükségszerű következménye.

Ha τ azon idő, mely alatt a rengés az egységül vett föld-sugarat befutja, tehát a terjedésssebesség reciproka értéke, és T a rengés epochája, azaz a fészkekből való kipattanás ideje, akkor a hibaegyenlet

$$\begin{aligned} \psi \Delta \tau + \Delta T - \cos \alpha \cos e \tau \Delta b_0 - \cos b_0 \sin \alpha \cos e \tau \Delta l_0 + \\ + K \tau \frac{\Delta q}{1-q} - H \tau \frac{\Delta h}{1-h} = \Delta t \end{aligned} \quad 1)$$

alakban írható, a hol, mint «a makroseismikus rengések feldolgozása» című értekezésemben is

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}} [\phi + (1-2q') \operatorname{tg} \phi], \\ K &= \frac{1-q}{2q} (\sin e + H) - \frac{1-2q}{2q} \psi, \\ H^2 &= \sin^2 e - \frac{2q_0(1-2q')}{q(1-q)}, \end{aligned} \quad 2)$$

$$\sin e = \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}} [(1-2q') \operatorname{tg} \psi + 2q_0 \cot \psi],$$

$$q' = \frac{1}{2} q (1 + \rho^2), \quad q_0 = \frac{1}{2} q (1 - \rho^2),$$

mig ρ a fészek távolsága a Föld középpontjától, b_0, l_0 az epicentrum szélessége és hosszúsága, α és ψ valamely állomás az epicentrumra vonatkozó azimuthja és redukált távolsága, e az emersioszög, $h = 1 - \rho$ a fészek mélysége, q a seismikus index és Jt a feltételes seismikus elemekkel számolt ephemerida időhibája.

Az epicentrumtól nagyobb távolságra a fészek mélységének befolyása a hibaegyenlet coefficienseire elenyésző csekély, úgy hogy e coefficiensek kiszámítására bátran $h=0$ tehető. Ekkor a hibaegyenletből számítandó Jh természetesen magát a meghatározandó mélységet jelenti. Ezen egyszerű esetben következik a 2) egyenletrendszerből

$$\sin e = \frac{1-2q}{\sqrt{4q(1-q)}} \operatorname{tg} \psi, \quad (3)$$

és ha ebből ψ értékét T -be teszszük:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}} \left[\sqrt{4q(1-q)} \sin e + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4q(1-q)}{1-2q}} \sin e \right] = \\ &= \frac{2(1-q)}{1-2q} \sin e + \varepsilon, \end{aligned} \quad (4)$$

ha

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{[4q(1-q)]^k}{(1-2q)^{2k+1}} \sin^{2k+1} e. \quad (5)$$

Áll továbbá

$$H = \sin e, \quad (6)$$

és

$$K = -\frac{1-2q}{2q} \varepsilon. \quad (7)$$

Mindezen értékeknek az 1) hibaegyenletbe helyettesítése ad

$$\begin{aligned} \frac{2(1-q)}{1-2q} \sin e \left[J\tau - \frac{1-2q}{2(1-q)} \tau Jh \right] + \varepsilon \left[J\tau - \frac{1-2q}{2q} \tau - \frac{Jq}{1-q} \right] + \\ + Jt - \cos \alpha \cos e \tau Jb_0 - \cos b_0 \sin \alpha \cos e \tau Jl_0 = Jt, \end{aligned} \quad (8)$$

és azonnal látni, hogy csak öt ismeretlen határozható meg, a mely azonban hat seismikus elemet tartalmaz, a mennyiben a $\Delta\tau$, Δq és Δh ismeretlenek csak a két

$$\Delta\tau - \frac{1-2q}{2(1-q)} \tau \Delta h \quad \text{és} \quad \Delta\tau - \frac{1-2q}{2(1-q)} \tau \frac{\Delta q}{q}$$

combinatióban fordulnak elő. Világos tehát, hogy még abszolút pontos időadatok esetén is azon seismikus elem fog a három közül szigorúan 0 alakban adódni, a mely az eliminációs processusban utolsónak hagyatott meg. Csillagászati számításokban gyakorolt érzékem tehát helyesen sugalt, midőn a hibaegyenlet megoldásában épen a mélységet hagytam legutolsó elemnek, mert minden esetben kijelölhetők legalább a szélső határok, a melyeken belül a fészeknek feküdnie kell, míg a többi két elemre nézve ilyen határ nem volna könnyen megadható. Világos ugyanis, hogy $\Delta h=0$ eset a földfelszínnek, $\Delta h=1$ eset a Föld középpontjában fekvő fészeknek felelne meg. A mélység határozatlansága azonban a többi elemre gyakorlatilag nem folyik be.

Ha most a feltételezett mélység nem nulla, hanem véges, de kicsiny — hiszen 200 km-en túl nem szokott menni soha, a mi $h=0.0314$ -nak felelne meg —, akkor könnyen beláthatólag a $\Delta\tau$ és Δh coefficientsei egymással közel arányosak lesznek, és a szigorú arányosságtól való eltérés csak mélységrendű mennyiség. Az eliminatio-processus folyamán Δh — ha ezen elemet ismét utolsónak hagyjuk — két oly determinans hányadosául adódik, melyek mindegyike h^2 rendű és ezért a megoldás ezen kedvezőbbnek tetsző esetben is teljességgel bizonytalan.

Ha azonban az epicentrum legszorosabb közelségében maradunk, akkor a hibaegyenlet coefficientsei a φ gömbi távolsággal együtt eltűnő ϕ hatványai szerint bonthatók sorba. Ha ϕ^2 -nél megállunk, akkor a hibaegyenletnek itt érdekelt része:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}} \left\{ [\phi + (1-2q') \operatorname{tg} \phi] \Delta\tau + \right. \\ & \quad + \frac{\tau}{2q} [(1-2q') \phi - (1-2q) \operatorname{tg} \phi] \frac{\Delta q}{1-q} - \\ & \quad \left. - \tau [(1-2q') \operatorname{tg} \phi - 2q_0 \cot \phi] \frac{\Delta h}{1-h} \right\} = \Delta\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

vagy

$$\left[2(1-q') \Delta\tau + \left(1 - \frac{q'}{q} \right) \tau \frac{\Delta q}{1-q} + (1-2q' + \frac{2}{3}q_0) \tau \frac{\Delta h}{1-h} \right] - \\ - \frac{2q_0}{\phi} \tau \frac{\Delta h}{1-h} = \sqrt{4q(1-q)} \Delta l, \quad (10)$$

a miből azonnal látni, hogy Δq behatása $\Delta\tau$ -re egyáltalán nem különíthető el, és hogy Δh , a melynek coefficientse most $\frac{h}{\phi}$ rendű, tényleg meghatározható volna. ha az epicentrum körül sok állomás van, melyek számára $\frac{h}{\phi}$ igen különböző értékű. Ezen eset a gyakorlatban alig lehet valósúlva, mert a mikroseismikus állomásoknak rendkívül sűrű hálózatát tételezi fel. Talán Olaszországban és Japánban leginkább várható e téren némi siker.

Előbb idézett értekezésemben levezettem az emersioszög egyenletének soralakját. Ha e jelenti az emersioszöget, a midőn a mélység h , e_0 ellenben, a midőn a mélység zérusnak van feltételezve, akkor a csekélyebb befolyású h tagok elhanyagolásával volt:

$$\operatorname{tg} e = \frac{h}{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \varphi + \frac{1}{24} \frac{1-x}{1+x} \varphi^3 + \dots$$

és ebből

$$\operatorname{tg} e - \operatorname{tg} e_0 = \frac{h}{\varphi}.$$

Az emersioszög tehát még nagy távolságban is tetemesen érzékenyebb a fészek mélysége iránt, mint a lökésidő, és ugyanazt tapasztaltuk a

$$x = \frac{q}{1-q}$$

elemmel szemben is.

Még jóval e levezetés és következtetés megtétele előtt megragadta már figyelmemet a hibaegyenletből folyó

$$v \frac{dt}{d\varphi} = \cos e, \quad (11)$$

vonatkozás,¹ a melyben

$$u = \frac{d\varphi}{dt} \quad (12)$$

a rengésnek felszíni, látszó sebessége. Ennek átlagos értékét nevezik a mai seismologusok «terjedésssebességnek». Világos, hogy ezen sebesség két közel fekvő pont között telegraphikus átvitel segítségével nagy pontossággal lesz meghatározható, és az elmélet dolga, megállapítani, hogy ez úton mi eredmény várható.

A mennyiben a Föld színe mentén terjedő hullám nyilván () emersioszög alatt lép ki, a (11) egyenlet nem is valamely speciális seismikus elmélet folyománya, hanem a SNELLIUS-féle ismert törési törvény kifejezője.

Jól sejtettem már néhány évvel ezelőtt, hogy az emersioszög megfigyelésével kell majd kiegészítenünk az időadatokkal hiányosan meghatározható elemeket, és már székfoglaló értekezésemben² is úgy h -t, mint q -t tényleg az emersioszögből határoztam meg, a nélkül azonban, hogy ezt magát kielégítő pontossággal lemérhettem volna. Igaz, hogy elvben a vertikális és horizontális componensű inga seismogrammjaiból levezethető, de senkisé is lehet kétségben az iránt, hogy ilyen megállapítása csak nagyon gyarló lesz.

Az emissioszög és vele a fészek mélységének pontosabb meghatározására kigondoltam a seismikus hosszkülönbségmeghatározás módszerét. Meggyőződtem azután, hogy seismikus triangulatio néven egészen hasonló módszer Japánban már 1894 óta használatos, még pedig eleinte csak a felületi sebesség, újabban már a fészek mélységének lemérésére is. Később azután G. LIPPMANN is gondolt ki hasonló eljárást,³ de ennek éppen nincs meg a megkívánható pontossága. A japáni triangulatio is úgy berendezés, mint különösen módszer dolgában éppen nem kifogástalan, és csak az epicentrum nagy közelségének köszönhető, hogy a mélység számára jó értékeket kaptak.

Gondoljunk két A és B állomást, melyek nagyjában az

¹ Math. és Term.-tud. Ért. XXIII. k. 62. l.

² Math. és Term.-tud. Ért. XIII. k. 402. l.

³ Compt. Rend. CXXXIX. 780. 1904.

epicentrumon át menő legnagyobb körben fekszenek. Japán földrengésekkel szemben például Budapest és Ó-Gyalla eléggé kedvező. Mindkét állomás érzékeny, lehetőleg egyforma seismometerrel van ellátva; ingájának súlya mágnessel helyettesítendő, mely sodronytekercsben lenghet. A két tekercs vezető összekötetésben van és a vezetékbe úgy itt, mint ott, galvanometer van bekapcsolva. A galvanometer tükrére ejtett és onnan visszaverődő fénysugár érzékeny papírral bevont forgó hengerre registrál. B. GALITZIN vizsgálataiból¹ tudjuk, hogy a galvanometer teljes hűséggel követi a seismograph lengéseit.

A Japán felől érkező lökés először a keleti *A* állomást találja és szinte egyidejűleg jelez az *A* és *B* hely hengerére. Néhány másodperc (Budapest—Ó-Gyalla esetén az első phasis számára 5.7, a leglassúbb negyedik phasis számára 4.5 másodperc) múlva a lökés a nyugoti *B* helyre is érkezett, és egyidejűleg *B* és *A* hengerére jegyez. A módszernek nagy előnye, hogy igen kis időközöket mérven, a jelző órának állásától teljesen függetlenek vagyunk, és csupán a néhány másodperc közre alig ható járásával lesz dolgunk. Japánban, a hol természetesen elég seismikus energia van rendelkezésre, az áramkört labilis felállítású oszlopocska eldölése zárja.

Ha $\partial\varphi$ a két állomás távolsága az epicentrumon át menő legnagyobb kör mentén, ∂t a két forgó hengerrel leolvasott és így az áramidőtől megszabadított időköz közepe, akkor nyilván

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad (13)$$

a mennyiben ez a differentialquotienssel felcserélhető. Tudjuk, hogy a hodograph második differentiái igen kicsinyek, és ezért a két állomás távolsága tetemes lehet, a mi u pontos meghatározására döntő. Csak az epicentrum legszomszédságában kívánatos, hogy a 13) szerint számolt u magasabb differentialquotienssek segítségével redukáltassék.

A kísérlet olcsóbbá tétele megkívánja, hogy már meglevő

¹ Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen. St. Petersburg. 1903.

vezeték használtassék fel, és hogy a drága fényképi registrálás syphonrecorderrel való jelzéssel felcserélteessék. Az ó-gyallai—budapesti telephonvezeték kitünően beválnék, és a két áramrendszer teljesen elütő nagyságrendje miatt a telephon- és seismikus inductionáram egymást nem is fogná befolyásolni.

Az elmélet levezetésére ismét «földrengési elemek számlása» című dolgozatom 40), 42b) és 11a) egyenletéből indulok ki, de megjegyzendő, hogy a differentiatio alkalmával $\cos e$ nem mint φ , ρ , q függvénye fogandó fel, a mely 11b) által van megadva, hanem egyszerűen $\frac{v}{u}$ helyett áll. Ebben u közvetlenül észlelhető, v pedig a többi állomás időadataiból levezetendő.

Az eredmény kétféle alakban állítható elő, a szerint, a mint a hosszkülönbségmeghatározást önálló műveletnek tekintjük, vagy pedig az időadatokból nyert meghatározásnak kiegészítőjéül fogjuk fel. Az első esetben természetesen a közvetlen φ , az utóbbiban a redukált ψ távolsággal fogjuk kifejezni a fellépő mennyiségeket.

Ha 40)-ben minden mennyiséget változónak tekintünk és a differentialquotiensben fellépő $\cos \varphi$ -t ugyanazon egyenletből folyó

$$\cos \varphi = \frac{\cos^2 \psi - 1 + 2q'}{2q\rho \cos \psi} \quad (14)$$

segítségével elimináljuk, lesz

$$\frac{\cos^2 \psi + 1 - 2q'}{\cos \psi} \sin \psi \Delta \psi - \sin^2 \psi \frac{\Delta q}{q} + [q(1 - \rho^2) - \sin^2 \psi] \frac{\Delta \rho}{\rho} - \\ - 2q\rho \sin \varphi \cos \psi \Delta \varphi = 0. \quad (15)$$

42b) ad hasonlóan

$$\sqrt{\frac{1-q}{q}} \sin^2 \psi \Delta \cos e + \rho \sin \varphi \cos \psi \Delta \psi - \sin \varphi \sin \psi \Delta \rho - \\ - \frac{\rho \sin \varphi \sin \psi}{2q(1-q)} \Delta q - \frac{\cos^2 \psi - 1 + 2q'}{2q \cos \psi} \sin \psi \Delta \varphi = 0. \quad (16)$$

A két egyenletből $\Delta \psi$ eliminálandó, és az eredményben még benmaradó $\sin \varphi$ a 42b)-ből folyó

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{1-q}{q}} \frac{\cos e \sin \phi}{\rho}, \quad (17)$$

$\sin^2 \varphi$ pedig a fenti 14) egyenlet által fejezendő ki.

A kissé hosszadalmas, de egyszerű számítás eredménye:

$$\begin{aligned} 2[q(1-q)]^{\frac{3}{2}} \cos e \sin \phi \cos \psi [(1-2q') - (1-2q) \cos^2 \psi] \frac{\Delta \rho}{\rho} + \\ + \sqrt{q(1-q)} \cos e \cos \psi \sin^3 \psi [(1-2q') - (1-2q) \cos^2 \psi] \Delta q + \\ + q(1-q) [(1-2q') \cos 2\psi + (1-2q)(1-2q \cos^2 \psi) \cos^4 \psi] \Delta \varphi - \\ - 2[q(1-q)]^{\frac{3}{2}} \cos \psi \sin^3 \psi (\cos^2 \psi + 1 - 2q') \Delta \cos e = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

és ebben még

$$\begin{aligned} q' &= \frac{1}{2} q (1 + \rho^2), \\ \cos e &= v \frac{\delta t}{\delta \varphi} \end{aligned} \quad (19)$$

teendő. $\Delta \varphi$ továbbá, mint id. helyen 64)-ben

$$\Delta \varphi = -\cos a \Delta b - \cos b_0 \sin a \Delta l \quad (20)$$

által helyettesítendő. A $\cos e$ -ben szereplő ismeretlenek az epicentrum helye és a terjedési sebesség, tehát a hibaegyenlet összesen öt ismeretlent tartalmaz: Δh , Δq , Δv , Δb , Δl , egygyel kevesebbet, mint az időadatokból nyert hibaegyenlet, a melyben még T , a lökés kipattanás ideje is szerepel.

Ha mindent φ -ben akarnánk kifejezni, a mi által az eljárás önállóbbá és egyszerűbbé is lesz,

$$\rho^2 \left[\cos^2(\varphi - e) + \frac{q}{1-q} \sin^2 \varphi \right] = \cos^2 e \quad (21)$$

egyenlethől kell kiindulnunk.

A differentiatio eredménye:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \varphi \frac{\Delta \rho}{\rho} + \rho^2 \left[\frac{q}{1-q} \sin 2\varphi - \sin(2\varphi - 2e) \right] \Delta \varphi + \\ + \frac{\rho^2}{(1-q)^2} \sin^2 \varphi \Delta q - \left[\rho^2 \frac{\sin(2\varphi - 2e)}{\sin e} + 2 \cos e \right] \Delta \cos e = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Ebből könnyen megítélhetjük a módszer pontosságát. A többi hiba elhanyagolásával írhatjuk

$$2 \cos^2 e \frac{\Delta \rho}{\rho} = \left[\rho^2 \frac{\sin(2\varphi - 2e)}{\sin e} + 2 \cos e \right] \cos e \frac{\Delta \delta t}{\delta t}, \quad (23)$$

vagy 1 $\rho = h$ elhanyagolásával

$$\Delta h = \left[1 + \frac{\sin(2\varphi - 2e)}{\sin 2e} \right] \frac{\Delta \delta t}{\delta t}. \quad (24)$$

Japán—Európa számára közel $\varphi = 90^\circ$, tehát

$$\Delta h = -2 \frac{\Delta \delta t}{\delta t},$$

vagy, ha Δh kilometerekben kívántatik,

$$\Delta \delta t = -\frac{\delta t}{2r} \Delta h.$$

Ó-Gyalla és Budapest között a leggyorsabb és leglassúbb phasis időkülönbsége 5.7 és 4.5 másodperc; ha tehát egy japáni rengés fészekmélységét 10 km-re pontosan kívánók tudni, akkor az időközt $\frac{1}{220}$, illetve $\frac{1}{28}$ másodpercire pontosan kellene ismerni. Tehát van remény, hogy a későbbi phasisokból még távoli rengések fészke is eléggé jól adódik. Az epicentrum közelében azonban igen jó eredményeket kapunk, mert ekkor $\Delta \delta t$ hibája alig foly be.

Ha a 22) egyenletben $\rho = 1$, és már használt jelöléssel

$$\frac{q}{1-q} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} \quad \text{és} \quad 2e = \varphi - \varphi',$$

akkor egyszerűen, és a legtöbb esetben mégis elegendő pontossággal a

$$2 \cos^2 e \Delta h - \sin(\varphi + \varphi') \Delta \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{(1-q)^2} \Delta q - 2 \frac{\sin \varphi}{\sin e} \cos \varphi' \Delta \cos e = 0 \quad (25)$$

egyenletet kapjuk. Ebben már nem fenyeget az a veszély, hogy két ismeretlen coefficientse egymással közel arányos volna. Mindezenesre módszert nyertünk, a melylyel úgy a mélység, mint a seismikus q index meghatározható, holott ezek csupa időadatból épen nem, vagy csak hiányosan adódnak.

A talált látszó sebesség 13) másodrendű tagokig a 12) differentialquotienssel azonosítható, ha az A és B állomás C közép-helyére, tehát

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad b = \frac{b_1 + b_2}{2} \quad (26)$$

hosszúságú és szélességű helyre vonatkoztatjuk; l_1, b_1, l_2, b_2 az A és B állomás földrajzi koordinátái.

Tekintsük a gömbi háromszögeket, a melyek E epicentrum, A, B és C állomások és P polus között szerkeszthetők. Legyen $CE = \varphi$, $AE = \varphi_1$, $BE = \varphi_2$, és legyen $a = CEP$ a C hely azimuthja E -ből, $c = ECF$ az E epicentrum azimuthja C -ből nézve. A gömbháromszögtan egy ismeretes differentialegyenlete szerint áll akkor az A vagy B helyekre

$$\partial \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi = -\cos c \partial b_2 + \cos b_0 \sin a \partial l_2 \quad (27a)$$

és

$$\partial \varphi_1 = \varphi_1 - \varphi = -\cos c \partial b_1 + \cos b_0 \sin a \partial l_1, \quad (27b)$$

a hol

$$\partial l_1 = l_1 - l, \quad \partial b_1 = b_1 - b, \quad \partial l_2 = l_2 - l, \quad \partial b_2 = b_2 - b. \quad (28)$$

Ha röviden

$$\partial l = l_2 - l_1, \quad \partial b = b_2 - b_1, \quad \partial \varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (29)$$

akkor a két 27) egyenlet különbsége ad:

$$\partial \varphi = -\cos c \partial b + \cos b_0 \sin a \partial l. \quad (30)$$

Ezek után ad 13):

$$u = \cos b_0 \sin a \frac{\partial l}{\partial t} - \cos c \frac{\partial b}{\partial t} \quad (31)$$

és ezen sebesség vonatkozik azon φ epicentrumi távolságra, a mely l, b koordinátákkal van számítva. l_0, b_0, a és c a számítás elején természetesen többé-kevésbé hibás, mert az epicentrumnak l_0, b_0 koordinátáit csak közelítésben ismerjük.

Ha a két észlelő állomásnak és ebből folyólag a C közép-állomásnak helyét hibátlanak tekintjük, akkor a gömbháromszögtan hibaegyenletei szerint

$$\begin{aligned} \Delta a &= \cos \varphi \Delta c + \sin b_0 \Delta l_0, \\ \Delta c &= -\cos \varphi \Delta a + \sin b \Delta l_0 - \cos b_0 \sin (l - l_0) \Delta b_0, \end{aligned}$$

és ha ezekből Δa és Δc értékét keressük :

$$\begin{aligned}\sin \varphi \Delta a &= \cos b \cos c \Delta l_0 + \cos \varphi \sin a \Delta b_0, \\ \sin \varphi \Delta c &= -\sin a \Delta b_0 + \cos b_0 \cos a \Delta l_0.\end{aligned}\quad 32)$$

31)-nek differentiatiója ad, ha b_0 és l_0 változónak vétetik :

$$\frac{\partial \omega}{\partial l_0} = \frac{\cos b_0 \cos a}{\sin \varphi} \left(\cos b \cos c \frac{\partial l}{\partial t} + \sin c \frac{\partial b}{\partial t} \right), \quad 33)$$

és hasonlóan, ha

$$\cos b \cos c = \sin b_0 \sin \varphi - \cos b_0 \cos \varphi \cos a$$

tételre hivatkozunk :

$$\frac{\partial \omega}{\partial b_0} = -\frac{\sin a}{\sin \varphi} \left(\cos b \cos c \frac{\partial l}{\partial t} + \sin c \frac{\partial b}{\partial t} \right). \quad 34)$$

Azonkívül még 20) értelmében

$$\Delta \varphi = -\cos a \Delta b_0 - \sin a \cos b_0 \Delta l_0 \quad 35)$$

teendő, és ezzel feladatunk meg van oldva.

Ha az állomások távolabb esnek egymástól, semhogy a TAYLOR-sor első tagjával beérhetnők, akkor a NAPIER-féle analógiákból $\varphi_2 - \varphi_1$ véges értéke gyorsan convergáló LAGRANGE-féle sorral származtatható.

Legyen most röviden

$$\begin{aligned}\cos b \cos c \delta l + \sin c \delta b &= p, \\ \cos b \sin a \delta l - \cos c \delta b &= r,\end{aligned}\quad 36)$$

akkor 18) és 22) egyenleteinkben még

$$\begin{aligned}\cos e &= \frac{v}{r} \delta t, \\ \Delta \cos e &= \frac{\delta t}{r} \Delta v + \frac{v}{r} \Delta \delta t - \frac{v p \delta t}{r^2 \sin \varphi} (\cos b \cos a \Delta l_0 - \sin a \Delta b_0) \quad 37)\end{aligned}$$

teendő, és több megfigyelés esetén a javítások úgy határozandók meg, hogy $\Delta \delta t$ négyzeteinek összege minimum legyen. Ha a módszer mint önálló művelet szerepel, akkor legalább öt állomásra van szükségünk.

Nézetem szerint jelentős anyagi áldozatok nélkül is lehetséges volna, hogy legalább az Association Internationale Sismologique-ban képviselt állomások főbb observatoriumai a seismikus hosszkülönbség állandó hálózatába bevonassanak. Ekkor természetesen a differentialokról véges differentiákra kellene átmennünk.

Ezúttal nem szükséges, hogy a makroseismikus területre külön kifejtsük a hibaegyenletet, mert 22) bármilyen φ számára egyaránt érvényes és kényelmes.

Ha csak néhány ilyenmű megfigyelésünk van, akkor a hibaegyenlet a következő módon használandó fel:

A lökés megérkezésének megfigyelt idejéből a hodographikus hibaegyenlet a következő megoldásokat adja:

$$\begin{aligned} \Delta l_0 &= a + a' \Delta h, & \Delta b_0 &= \beta + \beta' \Delta h, \\ \Delta v &= \gamma + \gamma' \Delta h, & \Delta q &= \delta + \delta' \Delta h, \end{aligned}$$

a melyek mind a meg nem határozható Δh függvényéül jelentkeznek. E megoldások 35) és 37) tekintetbe vételével 18)-ba vagy 22)-be helyettesítendők, a mi $\Delta \delta t = 0$ feltevés mellett

$$m \Delta h = n$$

alakú egyenletre vezet, a melyből Δh adódik.

A módszer nem ment fel az alól, hogy az emersioszög közvetlen meghatározására is utat keressünk, mert hiszen most a még szintén ismeretlen és más úton meghatározandó v segítségével fejezzük ki. Ha ez lehetséges lesz, a mint fent idézett értekezésemben (38. l.) érintettem, akkor Δe hibaegyenletében már csak Δh , $\Delta \varphi$, Δq , összesen négy ismeretlen van, a mi a megoldás biztonságát tetemesen fokozza.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 május 14.-én tartott üléséből.)

A SEISMIKUS HULLÁMFELÜLET ÉS A SEISMIKUS TÁVOLHATÁS TÖRVÉNYE.

KÖVESLIGETHY RADÓ I. tagtól.

Az az elmélet, a mely eddigi seismikus számításaim alapját teszi, mint többször hangsúlyoztam, merőben geometriai. Olyan, mint az astronomiában a pályameghatározás elmélete, a mely tisztán geometriai és phoronómiai vonatkozásokon épül fel.

Ilyen elmélet szükségképen hiányos és egyoldalú, megkívánja, hogy physikai kiegészítője is kövesse. Az átmenet a seismikus hullámfelület segítségével lehetséges, a mennyiben ez geometriai alapon már most is levezethető, míg másrészt a Föld rugalmassági potenciáljából is származtatható. A két eredmény egybevetése megteremti a dinamikai seismológiát.

Kiindulok a «Földrengési elemek számolása»¹ című értekezésemnek 35) és 38) egyenletéből, a melyek a hullámfelületnek már is kész parameteres előállításai.

Ha poláris tengelyül a földrengéstengelyt választjuk, azaz a rengésfészeknek és a Föld középpontjának összekötő vonalát, ha ρ és $u' - u = \varphi$ a hullámfelület meridiángörbájének egy tetsző P pontjának coordinátái, ρ_0 a fészek távolsága a Föld középpontjától, v a terjedési sebesség, $t - T$ a terjedés ideje, és q a seismikus index, akkor volt:

$$\sqrt{4q(1-q)} v(t-T) = \psi + [1 - q(\rho^2 + \rho_0^2)] \tan \phi, \quad (1)$$

$$\sin^2 \phi + 2q\rho\rho_0 \cos \varphi \cos \phi - q(\rho^2 + \rho_0^2) = 0, \quad (2)$$

a melyekből a ϕ parameter, a redukált távolság eliminációja folytán a hullámfelület meridiángörbéje adódik. Minthogy az

¹ Math. és Term.-tud. Ért. XXIII. k. 32—68. I.

alapul vett ROCHE-féle törvény értelmében a sűrűség csupán a Föld középpontjától számított távolság függvénye, a hullámfelület pontalakú fészek esetén természetesen forgási felület, melynek tengelye maga a rengési tengely.

A 2) egyenlet

$$\cos \psi = q\rho\rho_0 \cos \varphi \pm \sqrt{1 - q(\rho^2 + \rho_0^2) + q^2\rho^2\rho_0^2 \cos^2 \varphi} \quad 2')$$

alakja azonnal mutatja, hogy

$$\psi = y \mp x \quad 3)$$

alakban írható. A $\cos y$ és $\cos x$ -ben rationalis és irrationalis részek egyenlítése ad

$$\cos y \cos x = q\rho\rho_0 \cos \varphi, \quad 4)$$

$$(1 - \cos^2 y)(1 - \cos^2 x) = 1 - q(\rho^2 + \rho_0^2) + q^2\rho^2\rho_0^2 \cos^2 \varphi. \quad 5)$$

Ha az utóbbi egyenletet levonjuk az előtte álló négyzetéből, lesz

$$\cos^2 y + \cos^2 x = q(\rho^2 + \rho_0^2), \quad 6)$$

és ha ezt a 4) egyenlet kétszeresével összevetjük, a következő két egyenlethez jutunk:

$$(\cos y + \cos x)^2 = q(\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 \cos \varphi) = qr'^2, \quad 7)$$

$$(\cos y - \cos x)^2 = q(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi) = qr^2. \quad 8)$$

Ebben r és r' nyilván azon radiusvectorok, melyek a hullámfelület P pontjához a fészekből, és a fészeknek a rengéstengelyén fekvő symmetriapontjából vonhatók. Az utóbbi pont egyszerűség kedvéért antifocusnak nevezhető.

Most már áll:

$$\cos y = \frac{\sqrt{q}}{2} (r' + r), \quad 9)$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{q}}{2} (r' - r). \quad 10)$$

Az 1) egyenlet jobboldali második tagja 6) és 3) miatt

$$\begin{aligned} [1 - q(\rho^2 + \rho_0^2)] \operatorname{tg} \phi &= (1 - \cos^2 x - \cos^2 y) \frac{\sin(y \mp x)}{\cos(y \mp x)} = \\ &= \frac{\cos(y + x) \cos(y - x)}{\cos(y \mp x)} \frac{\sin(y \mp x)}{\cos(y \mp x)} \end{aligned}$$

alakban is írható, a mi ismét

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2y) \quad \text{vagy} \quad -\frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2y),$$

a szerint, a mint a felső, vagy az alsó jelt választjuk. Az eredmények összefoglalása szolgáltatja a hullámfelület

$$2\sqrt{4q(1-q)}v(t-T) = (2y - \sin 2y) \mp (2x - \sin 2x) \quad (11)$$

egyenletét, a mely teljes analogonja a csillagászatban jól ismert LAMBERT-féle egyenletnek.

Ha végre 9) és 10) segítségével elimináljuk x és y -t, akkor a hullámfelületnek következő bipoláris egyenlete származik:

$$\begin{aligned} 1 - 4q(1-q)v(t-T) &= \arccos \frac{\sqrt{q}}{2}(r' + r) \mp \arccos \frac{\sqrt{q}}{2}(r' - r) - \\ &= \frac{\sqrt{q}}{2}(r' + r) \sqrt{1 - \frac{q}{4}(r' + r)^2} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{q}}{2}(r' - r) \sqrt{1 - \frac{q}{4}(r' - r)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Hogy az előjelek helyesen vannak megállapítva, arról meggyőződhetünk a $\varphi = 0$, $\varphi = 180^\circ$ és $\lim q = 0$ eset tárgyalása által; az utóbbi eset egyenes terjedésnek felel meg, a mely esetben a hullámfelületnek gömbnek kell lennie. Ezúttal egyszersmind látni, hogy az alsó jel az antifocusnak, a felső pedig a tulajdonképeni fészeknek felel meg.

$v(t-T)$ a hullámfelület jellemzője; ha ennek állandó, de tetsző értéket adunk, nyerjük mindazon pontok összességét, a melyekig $t-T$ idő alatt a rengés eljutott. A felület megszerkesztése nem nehéz, mert egy pillantás a 12) egyenletre mutatja, hogy confocalis ellipszisekkel és hyperbolákkal könnyen végezhető; a gyújtópontok a rengés fészke és antifocusa. A szerkesztés és taglalás részleteibe nem bocsátkozom ezúttal, mert ezzel JÁNOSY IMRE tanár úr volt szives foglalkozni.

Ha q negatív, akkor a cyclometrikus függvények helyébe a megfelelő hyperbolikus függvények fognak lépni, az egyenlet forma szerint teljesen változatlan marad.

Ha végre θ azon szög, melyet r radiusvector a rengéstengellyel bezár, akkor ez

$$r'^2 = r^2 + 4\rho_0^2 - 4r\rho_0 \cos \theta,$$

vagy

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(r' - r + 2\rho_0)(r' + r - 2\rho_0)}{(r - r' + 2\rho_0)(r + r' + 2\rho_0)}$$

által van adva. A 9) és 10) egyenletekhez hasonlóan

$$\cos \alpha = \sqrt{q} \rho_0$$

téhető, a mire θ a

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{y-a}{2} \operatorname{tg} \frac{y+a}{2} \cot \frac{a-r}{2} \cot \frac{a+r}{2}$$

egyenletből számítható.

A hullámfelület levezetett egyenlete matematikailag a leg-elegánsabb forma, a melyre hozható, de nem az egyetlen. Nevezetesen szerkesztés céljából nem eléggé explicit. Számolás céljára a legjobb alakot azáltal nyerjük, ha független változó gyanánt azt az ε szöget hozzuk be, mely alatt a sugár a fészken át menő gömböt elhagyja. Ha ezt $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ határok között változtatjuk, akkor a hullámfelület meridiángörbájének minden pontját megkapjuk. Az egyenletnek ezen alakja már székfoglaló értekezésemben¹ is megvan.

A hullámfelület kérdésével szorosan összefügg a távolbhatás kérdése is, a mely eléggé fontos és érdeket keltő, és mely a CANANI-féle egyenlet révén már most is felhasználható.

Gondoljunk két rengéssugarat, a mely a fészken átmenő gömb felszínéből ε és $\varepsilon + d\varepsilon$ emissioszög alatt indul. Ha e sugarakat a rengéstengely körül forgatjuk, akkor a hullámfelületen egy ds szélességű övet szelnek ki, melynek területe, mint forgásfelület zónája

$$df = 2\pi y ds, \quad (13)$$

¹ Math. és Term.-tud. Ért. XIII. k. 363 407. l. 59) egyenlet.

ha ds a hullámfelületen a $d\varepsilon$ -nak megfelelő ívelem, y pedig a zóna forgássugara, tehát

$$y = \rho \sin \varphi. \quad (14)$$

Legyen E az emersioszög, a mely alatt a sugár a hullámfelület P pontján átmenő gömbből kilép, akkor ez egyszersmind azon szög is, melyet a P ponthoz vont ρ radiusvector a hullámfelülettel bezár, mert ρ a gömbre, a rengéssugár pedig a hullámfelületre merőleges. E szerint

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} = -\cot E \quad (15)$$

és ebből

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \frac{\rho}{\sin E} d\varphi, \quad (16)$$

úgy hogy a felületelem

$$df = 2\pi\rho^2 \sin \varphi \operatorname{cosec} E d\varphi. \quad (17)$$

Az energia megmaradásának elve kívánja, hogy az ε és $\varepsilon + d\varepsilon$ nyilású sugárpalástban foglalt intensitás változatlan legyen. Szükséges tehát a $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ viszony ismerete.

A fentidézett (1. l.) értekezésem 33) és 35) egyenlete ad

$$(1-q) \cos^2 \varepsilon = q\rho^2 \rho_0^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \psi}. \quad (18)$$

De réteges gömbben történő törés esetén áll [id. h. 4)] az a szabály, hogy a törésmutató, a radiusvector és az emersioszög cosinusának szorzata állandó, úgy hogy

$$(1-q) \cos^2 \varepsilon = \rho_0^2 (1 - q\rho_0^2) \cos^2 \varepsilon \quad (19)$$

tehető. A két utóbbi egyenlet egyesítése vezet a [42c] alatt adott analog

$$\sqrt{4q\rho_0^2 (1 - q\rho_0^2)} \sin \varepsilon = q(\rho^2 - \rho_0^2) \cot \psi - [1 - q(\rho^2 + \rho_0^2)] \operatorname{tg} \psi \quad (20)$$

egyenlethez.

Ez úgy, mint 1), ρ , ψ és ε szerint differentiálendő, miközben $t - T$ a hullámfelület értelmezése szerint állandónak tekin-

tendő. $\frac{d\phi}{d\varepsilon}$ -nek a két egyenletből történt eliminációja után lesz

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = \sqrt{4q\rho_0^2(1-q\rho_0^2)} \frac{[1-q(\rho^2+\rho_0^2)+\cos^2\phi]}{4q\rho(1-q\rho^2)} \operatorname{tg} \phi \cos \varepsilon, \quad (21)$$

és 15)-tel egyesítve és 17)-be helyettesítve

$$df = -\frac{\pi\rho_0 \sqrt{1-q\rho_0^2}}{\sqrt{q(1-q\rho^2)}} [\cos^2\phi + 1 - q(\rho^2 + \rho_0^2)] \sin \varphi \operatorname{tg} \phi \cos \varepsilon \sec E d\varepsilon. \quad (22)$$

A fészek körül végtelen kis r sugarú gömböt képezlek, melyen belül a rengéssugár görbülete elhanyagolható legyen. Ha az intensitás felületegységenként i , akkor ezen gömbnek ε és $\varepsilon + d\varepsilon$ sugarak közé eső övén az intensitás i_ε lesz

$$i_\varepsilon = 2\pi r^2 \cos \varepsilon i d\varepsilon, \quad (23)$$

és az egész gömbnek intensitása

$$I_0 = 4\pi r^2 i, \quad (24)$$

minthogy a sugarak egyenes volta miatt ezek a gömb felületét még egyenletesen eloszolva találják. Ezek szerint

$$i_\varepsilon = \frac{1}{2} I_0 \cos \varepsilon d\varepsilon, \quad (25)$$

a hol I_0 a fészekben szabaddá vált összes intensitást jelenti. Az i_ε intensitásnak meg kell maradnia. Ha tehát ρ , φ helyen ugyanazon $d\varepsilon$ által megszabott df területen az intensitás területegységenként I , akkor

$$I df = i_\varepsilon, \quad (26)$$

azaz

$$I = \frac{\sqrt{q(1-q\rho^2)} \cos E \cdot I_0}{2\pi\rho_0 \sqrt{1-q\rho_0^2} \sin \varphi \operatorname{tg} \phi [1 + \cos^2 \phi - q(\rho^2 + \rho_0^2)]}. \quad (27)$$

Hasonlóan, mint 19)-ben, tehető 18)-ban

$$\rho \sqrt{1-q\rho^2} \cos E = \sqrt{q\rho\rho_0} \frac{\sin \varphi}{\sin \phi}, \quad (28)$$

a mi által az intensitás végre

$$I = \frac{q}{2\pi} \frac{\sqrt{1-q\rho^2}}{\sqrt{1-q\rho_0^2} [1 + \cos^2 \phi - q(\rho^2 + \rho_0^2)] \sin \phi \operatorname{tg} \phi} I_0 \quad (29)$$

végleges alakban adódik. A φ gömbi távolság nem hozható be egyszerűen, de igenis a φ' szög, a melyet idézett dolgozatomban is használtam. A 2) egyenlet segítségével ugyanis könnyen

$$1 + \cos^2 \psi - q(\rho^2 + \rho_0^2) = 2 \cos \psi (\cos \psi - q \rho \rho_0 \cos \varphi)$$

alakra hozható, vagy a 2') egyenlet értelmében, az antifocusra vonatkozó alsó jel elhagyásával,

$$1 + \cos^2 \psi - q(\rho^2 + \rho_0^2) = 2 \cos \psi \sqrt{(1 - q\rho^2)(1 - q\rho_0^2) - q^2 \rho^2 \rho_0^2 \sin^2 \varphi}.$$

Ha most

$$\sin \varphi' = \frac{q \rho \rho_0}{\sqrt{(1 - q\rho^2)(1 - q\rho_0^2)}} \sin \varphi, \quad (30)$$

akkor

$$I = \frac{q I_0}{4\pi (1 - q\rho_0^2) \sin^2 \psi \cos \varphi'}, \quad (31)$$

a mely numerikus számolásra kényelmesebb. Remélhető egyszerűsödik, hogy ezen egyenlet az egyes phasisok között fennálló rokonság felkutatásában is hasznavehető lesz.

Az intenzitás egyenletét természetesen földfelszíni állomásokra fogjuk rendszeresen alkalmazni, tehát $\rho = 1$ teendő. Noha az egyenlet megengedi, hogy valamely állomáson észlelt intenzitásból magának a fészeknek intenzitását számoljuk, rendszeren mégis csak mindent az epicentrum intenzitására fogunk redukálni. Ez esetben ψ helyébe ψ_0 teendő, a hol ψ_0 id. ért. [60b] egyenlete által van adva. A h mélység harmadrendű tagjaig menve

$$I_e = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{1-q}{1-q\rho_0^2}} \frac{I_0}{h^2} \quad (32)$$

és 29) és 31) hányadosa:

$$I = \frac{2qh^2 I_e}{[1 + \cos^2 \psi - q(1 + \rho_0^2)] \sin \psi \operatorname{tg} \psi},$$

vagy a közelítés ugyanazon fokával

$$I = \frac{2qh^2 I_e}{[1 - 2q + \cos^2 \psi] \sin \psi \operatorname{tg} \psi}, \quad (33)$$

és

$$I = \frac{qh^2 I_e}{(1 - q) \sin^2 \psi \cos \varphi'}. \quad (34)$$

A seismikus æquatorban $\varphi=90^\circ$; ekkor

$$\cos^2\phi = 1-2q,$$

és

$$\frac{I_{\frac{\pi}{2}}}{I_e} = \frac{h^2}{2\sqrt{1-2q}}. \quad (35)$$

Az epicentrum antipodus pontjában $\varphi=\pi$ számára

$$\cos\phi = 1-2q$$

és

$$\frac{I_\pi}{I_e} = \frac{h^2}{4(1-q)^2}. \quad (36)$$

I természetesen mindig a hullámfelület területegységéből merőlegesen kilépő intensitást jelenti.

Mint hogy a képlet discussiója némi nehézségeket okoz, kiszámítottam az intensitásokat az epicentrumtól annak antipodus pontjaig azon feltevés mellett, hogy

$$q = \frac{1}{2}, 0, -2, -7 \text{ és } -\infty.$$

A mélységet $h = 0.0157 \text{ rad} = 100 \text{ km}$ -nek, az epicentrumi intensitást 10^8 -nak vettem.

Földrengés intensitásának eloszlása a Föld színén.

φ	$q=0.0$ $\frac{I}{I_0}$	0.5 $\frac{I}{I_0}$	-2.0 $\frac{I}{I_0}$	-7.0 $\frac{I}{I_0}$	$-\infty$ $\frac{I}{I_0}$
0°	1000000	1000000	1000000	1000000	∞
10	8110	8095	8046	8062	8050
20	2044	2023	1991	1980	1980
30	920	899	862	854	854
40	514	506	468	458	457
50	345	324	283	273	270
60	247	225	183	169	164
70	187	165	121	103	96
80	149	126	65	60	44
90	123	100	55	32	0
100	105	81	38	16	0
110	92	67	21	8.0	0
120	82	56	18	3.6	0
130	75	48	14	2.7	0
140	70	41	11	1.8	0
150	66	36	9	1.4	0
160	64	32	8	1.1	0
170	62	28	7	1.0	0
180	62	25	6.5	0.96	0

$q=0$ megfelel a hürmenti terjedésnek, ez adja tehát a legnagyobb intenzitásokat. Minden más esetben az intenzitás kisebb. Fölötte nevezetes $q=-\infty$ esete, a melyet még röviden tárgyalok.

A 2') egyenlet sorfejtése ad ez esetben, ha $\rho=1$, és $h=1-\rho_0$, a fészkek mélysége, kis mennyiség:

$$\cos \psi = (1 + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{2} h^3 + \dots) \sec \varphi.$$

Ebből

$$\operatorname{Tang} \psi = \sin \varphi \left[1 + \left(\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + \dots \right) \cotg \varphi \right],$$

és

$$\sin \psi = \tg \varphi \left[1 + \left(\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + \dots \right) \operatorname{cosec}^2 \varphi \right].$$

és így h^3 elhanyagolásával

$$\frac{I}{I_e} = \frac{h^2}{\sin \varphi \tg \varphi}.$$

Az intenzitás ezen esetben az epicentrumban (mathematikailag) végtelen nagy, de már néhány foknyi távolságban majdnem ugyanaz, mint bármely más q esetén. A seismikus æquatorban, $\varphi=0$ esetében, nullá válik és azontúl is az marad. Ez teljes mása a hodograph magaviselésének, a mely a félföldön túl szintén állandó úgy, hogy $q=-\infty$ esetében valamennyi, az epicentrumra nézve a másik félgömbön fekvő hely a lökést egyszerre kapja. Most tudjuk meg, hogy ezen egyidejűleg érkező lökés intenzitása null.

Mint a hodographnál, úgy az intenzitásgörbe is csak nagyobb távolságban érzékeny q értéke iránt; bárminő legyen azonban q , az intenzitás mindig kisebb, mint $q=0$ esetén.

Az intenzitásváltozásnak ezen törvényébe a földanyag okozta absorptio még nincsen betudva.

A LEGNAGYOBB ENERGIAFORGALOM ELVÉRŐL.

ZEMPLÉN GYŐZŐ-től.

A «Mathematikai és Physikai Lapok» 1902. évfolyamában¹ megvizsgáltam, mily differenciálegyenletekre vezet OSTWALD elve a legnagyobb energiaforgalomról a tisztán mechanikai jelenségek körében.

E vizsgálat szerint valamely szabadon mozgó pont bármily erőterben OSTWALD elvének megfelelően oly mozgást végezne, melynél a *sebesség iránya minden pillanatban megegyezik a pontra ható erő irányával*. Ha tehát OSTWALD elve alapján akarnók a valóságban végbemenő mozgásokat leírni, oly erőket kellene bevezetnünk, melyek mindig a mozgó pont sebességének irányában működnek. Megegyezés az OSTWALD- és NEWTON-féle mechanika közt csakis akkor állhat fenn, midőn bármely időpontban a sebesség iránya megegyezik a gyorsulás irányával, tehát *csakis egyenesvonalú mozgás* esetén.

Világos, hogy — mivel maguk a differenciálegyenletek megszabják a sebesség irányát — a mozgás kezdőállapotának megadásánál nem választhatjuk tetszés szerint a kezdősebességet, csak abszolút nagyságát adhatjuk meg, iránya már a szintén megadott erőter által meg van határozva. *Az egész tárgyalásban tehát kizárólag oly kezdősebességek szerepelnek, melyek a ható erővel egyirányúak.*

E körülményt, mely az alább elmondandókra nézve döntő fontosságú, előbbi, az OSTWALD-féle elvre vonatkozó közleményeimben úgy a magyar, mint a német szövegezésben külön kiemeltem.²

¹ 11. k. 318. l.

² Math. és Phys. Lapok 12. k. 381. l. (1903) és Annalen d. Physik, 13. k. 840. l. (1904).

Az OSTWALD-féle elvre vonatkozó legelső értekezésem megjelenése óta többen foglalkoztak ezen elvnek analitikai fogalmazásával.¹ Mindezen vizsgálatok összhangzó eredménye ugyanaz, melyet már legelső dolgozatomban kimutattam, hogy ugyanis az OSTWALD-féle elv — lényeges átfogalmazások nélkül — a mechanikai jelenségek leírására *nem alkalmas*.

A physikus szempontjából tehát az elvnek további taglalása mindenesetre már csak mérsékelt érdeklődésre tarthat igényt.

Hogy mégis bátorkodom a kérdést újból szóba hozni, annak oka FEJÉR barátomnak idézett vizsgálata bevezető részében közölt amaz állítása, hogy a C. NEUMANN-féle eljárás, melyet én is alkalmaztam az OSTWALD-féle elv tárgyalásánál, egyáltalában nem vezet a mozgás differenciálegyenleteihez. A magyar szöveg 5. lapján, a szöveg alatti jegyzetben kijelenti FEJÉR úr, hogy az elvnek általam adott analitikai fogalmazását «illuzórius»-nak tekinti.

C. NEUMANN² eljárását legelőször ama speciális esetben alkalmazta, midőn a kezdősebesség zérus (ez épen egyik kivételes eset, melyben az OSTWALD-féle elv — legalább egyetlen időelem alatt — a NEWTON-féle axiómákkal megegyező eredményre vezet). Ezt az eljárást alkalmaztam én zérustól különböző kezdősebesség esetén. Az eljárás abban áll, hogy a t kezdőidőpontból kiindulva előállítjuk a mozgó pont $t + \tau$ időpontbeli sebességét (\bar{u} , \bar{v} , \bar{w} -t) az OSTWALD-féle maximum követelésnek megfelelő *közelítő* képlettel, mint a t időpontbeli sebesség (u , v , w) és az ugyanakkor ható külső erő (X , Y , Z) valamint τ függvényét.

Az így nyert képletekben elvégzem a határátmenetet $\tau = 0$ -ra vonatkozólag és a

¹ E. FÖRSTER: Zeitschrift für Math. und Physik, 49. k. 84. l. (1903); RÉTHY M.: Math. és Term. Értesítő 21. k. 459. l. (1903), Math. és Phys. Lapok 13. köt. 111. l. (1904), Mathem. Annalen 59. köt. 554. l. (1904); FEJÉR L.: Math. és Természettud. Értesítő 23. k. I. f. (1905), Math. Ann. 61. k. 422. l. (1905).

² Ber. der kg. sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig 44. k. 184. l. (1892).

$$\lim_{\tau=0} \frac{\bar{u}-u}{\tau}, \quad \lim_{\tau=0} \frac{\bar{v}-v}{\tau}, \quad \lim_{\tau=0} \frac{\bar{w}-w}{\tau} \quad 1)$$

kifejezéseket tekintem *gyorsulási összetevőknek*.

FEJÉR úr kifogása ezen eljárás ellen az, hogy tetszés-szerint választott u, v, w mellett, az én közelítő képleteim szerint számított $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ nem is konvergál u, v, w -hez, ha τ -t minden határon túl kisebbítjük és így az 1) alatti határértékek nem léteznek.

Ezen állítást FEJÉR úr egyszerű geometriai képen igazolja, melyből az is kiviláglik, hogy ha a kezdősebesség zérus (mint C. NEUMANN vizsgálatában), akkor az 1) alatti határértékek léteznek.

Megemlíti azután FEJÉR úr — szövegalatti jegyzetben —, hogy van még egy eset, melyben $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ u, v, w -hez konvergál, az, midőn a kezdősebesség iránya megegyezik az erő irányával, ezzel az esettel azonban tovább nem foglalkozik.

Pedig — a mint e sorok bevezetésében hangsúlyoztam — az én tárgyalásaim kizárólag erre a FEJÉR úr által tovább nem részletezett esetre vonatkoznak, midőn u, v, w X, Y, Z -vel arányos.

Ki fogjuk mutatni, hogy ebben az esetben az 1) alatti határértékek mindígy léteznek.

Az én közelítő képleteim ¹ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ számára a következő alakban írhatók fel:

$$\bar{u} : \bar{v} : \bar{w} = X : Y : Z. \quad 2)$$

Ezekhez járul az eleven erő tételének közelítő kifejezése (m a mozgó tömege):

$$\frac{1}{2} m (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 - u^2 - v^2 - w^2) - \frac{\tau}{2} \{X(u + \bar{u}) + Y(v + \bar{v}) + Z(w + \bar{w})\} = 0. \quad 3)$$

Kiküszöbölve \bar{v} -t és \bar{w} -t, azt kapjuk, hogy:

¹ I. első dolgozatom 330. lapján a 11), 12), 13) egyenleteket.

$$\bar{u} = \frac{X\tau}{2m} + \sqrt{\frac{X^2\tau^2}{4m^2} + \frac{\frac{\tau}{m}(Xu + Yv + Zw) + u^2 + v^2 + w^2}{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2 + \left(\frac{Z}{X}\right)^2}}. \quad 4)$$

E képlet tetszőleges kezdősebességnél érvényes; ha a kezdősebesség iránya megegyezik az erő irányával, akkor

$$u = \lambda X, \quad v = \lambda Y, \quad w = \lambda Z. \quad 5)$$

Ezen egyenleteket tekintetbe véve, \bar{u} képlete nagy mértékben egyszerűsödik és átmegy a következőbe:

$$\bar{u} = \frac{X\tau}{m} + \lambda X,$$

épp így:

$$\bar{v} = \frac{Y\tau}{m} + \lambda Y, \quad 6)$$

$$\bar{w} = \frac{Z\tau}{m} + \lambda Z.$$

Tehát:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau=0} \frac{\bar{u}-u}{\tau} &= \frac{X}{m}, \\ \lim_{\tau=0} \frac{\bar{v}-v}{\tau} &= \frac{Y}{m}, \\ \lim_{\tau=0} \frac{\bar{w}-w}{\tau} &= \frac{Z}{m}. \end{aligned} \quad 7)$$

Az 1) határértékek tehát valóban mindig léteznek. A 7) alatti egyenletek azonban egyúttal a NEWTON-féle mozgásegyenletek a t időpillanatra. Ha tehát a kezdősebesség iránya megegyezik az erő irányával, akkor a t időpont utáni első időelemben a mozgás a NEWTON-féle mozgásegyenletek szerint megyen végbe. Mi történik azonban azután? Két eset lehetséges:

a) midőn az erő iránya a mozgás folyamán mindig ugyanaz (az erővonalak egyenesek);

b) midőn az erő iránya pontról pontra változik.

Az a) eset az eddigiek alapján már teljesen el van intézve: tegyük fel, hogy a mozgó a t időpillanatban A-ban volt; ha sebessége az erő irányába esett, akkor — mint láttuk —

gyorsulásának iránya is meg fog egyezni az erő irányával s a mozgó a t utáni első időelem alatt az erővonalon eljut pl. B -be. B -ben sebességének iránya ismét megegyezik az erő B -beli irányával s így az előbbi eredmények újból alkalmazhatók: a B pontbeli gyorsulás szintén az erő irányába esik s így a pont továbbra is az erővonalon marad s i. t. Ha tehát az erővonalak egyenesek s a kezdősebesség ezekkel párhuzamos, a pont OSTWALD elve szerint ugyanazt a mozgást fogja végezni, mint a NEWTON-féle mechanikában. Ez az eredmény teljes összhangzásban van előbbi — ezen esetre vonatkozó — fejtegetéseimmal.

A b) esetben a mozgó A -ból az erővonal érintője mentén jut egy oly \bar{A} pontba, melyben az erő iránya nem egyezik meg az akkori sebesség irányával. Ez esetre tehát az előbbi eredmények közvetlenül nem alkalmazhatók és részletesebben kell foglalkoznunk azzal az esettel, midőn a kezdősebesség iránya nem egyezik meg az erő irányával.

★

Ha az u, v, w t időpontbeli sebesség iránya eltér a X, Y, Z erő irányától, akkor az én közelítő képleteim szerint számított $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ τ -nak minden határon túl való kisebbedésével nem konvergál u, v, w -hez, hanem bizonyos u_1, v_1, w_1 sebességhez, melynek iránya X, Y, Z irányával megegyezik; a 4)-ből ugyanis az következik, hogy:

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0} \bar{u} &= u_1 = X \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \bar{v} &= v_1 = Y \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \bar{w} &= w_1 = Z \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}}\end{aligned}\quad 8)$$

A sebességnek tehát az A pontban két különböző iránya van: abszolút nagyságra azonban az u, v, w és u_1, v_1, w_1 sebességek — a mint a 8) alatti képletekből látható — megegyeznek. Ezen látszólagos ellenmondásnak helyes értelmezése a következő: *maximumfeladatunknak ez esetben megoldása*

nem folytonos, az A pontban a sebesség rohamos irányváltozást szenved.

Physikai értelmezése a dolognak a következő volna: A mozgó u, v, w sebességgel *érkezik* az A pontba, ott sebessége nagyságának megtartásával hirtelen az erő irányába fordul és ezen megváltozott irányú u_1, v_1, w_1 sebességgel *mozog tovább*.

Képzeljünk pl. egy *lejtődarabot*, melyen tömegpontunk mondjuk a földnehézség erőterében mozog: az A pont legyen a lejtő alsó szélén. Hacsak a lejtő nem függélyes, a mozgó A -ba mindenesetre oly sebességgel *érkezik*, melynek iránya nem egyezik meg az erő irányával. Itt a lejtő szélén OSTWALD elve szerint a sebesség pillanatnyi változással átmenne a függélyes erő irányába eső sebességbe, a *pálya megtörnék* és a pont *lefelé* esnék tovább.

Hasonló nem folytonos mozgás jön létre a Newton-féle mechanikában is, ott, ahol a lejtő megszűnik, csak hogy itt nem a sebesség szenved a szakadást, hanem a *gyorsulás* s így a pálya maga nem törik meg, érintője folytonos marad, csak *görbülete* szenved rohamos változást.

Alkalmazzuk most már ezen eredményeket az előbbi *b)* esetre.



Érkezzék a mozgó ismét az erővel párhuzamos sebességgel az A pontba (l. a rajzot). Hopy kevesebbet kelljen írni, szorítkozzunk tárgyalásainkban síkbeli mozgásokra; az eredmény közvetlenül átvihető térbeli mozgásokra.

A -ban legyen tehát a sebesség u, v , az ezzel párhuzamos erő, melyről fölteszszük, hogy csak az x, y koordináták függvénye, X, Y . A pont τ idő alatti elmozdulása a megelőző képletek szerint közelítőleg kiszámítható: a pont ezek szerint

egyenes pályán eljut az \bar{A} pontba: itt sebessége \bar{u} , \bar{v} . \bar{A} -ban azonban az erőnek (\bar{X} , \bar{Y} -nak) iránya nem egyezik meg az \bar{u} , \bar{v} sebesség irányával, itt tehát a pálya megtörik és a pont új sebességgel \bar{u}_1 , \bar{v}_1 -vel mozog tovább; \bar{u}_1 , \bar{v}_1 a 8) képletek szerint kiszámíthatók. Most már a sebesség megint az erővel egyirányú, tehát megint az *a)* esettel van dolgunk és kiszámíthatjuk a mozgást a $t+\tau \dots t+2\tau$ időközben, mely alatt a mozgó közelítő képleteink szerint ismét egyenes pályán \bar{A} -be érkezik \bar{u} , \bar{v} sebességgel; itt az erő iránya megint eltér a sebesség irányától, a pálya tehát újból megtörik s az erővonal érintője irányában folytatódik s i. t.

Képleteink alapján tehát a pont mozgását közelítőleg elő tudjuk tüntetni az $A \bar{A} \bar{A} \dots$ tört vonallal és meg tudjuk szabni ugyancsak közelítőleg a pont mozgását e pályán.

Ki fogjuk mutatni, hogy — ha τ minden határon túl kisebbedik — a pálya az A -n keresztülmenő erővonal felé konvergál s a pont ezen erővonalon mozog az eleven erő tételének megfelelően, ugyanúgy, a mint megelőző dolgozataimban állítottam.

A sebességeket az $A \bar{A} \bar{A}$ pontokban az 5), 6) és 8) képleteink alapján megállapíthatjuk:

$$u = \lambda X, \quad v = \lambda Y, \quad (9)$$

$$\bar{u} = X \left(\frac{\tau}{m} + \lambda \right), \quad \bar{v} = Y \left(\frac{\tau}{m} + \lambda \right), \quad (10)$$

$$\bar{u}_1 = X \sqrt{\frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{X^2 + Y^2}} = X \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{X^2 + Y^2}} \left(\frac{\tau}{m} + \lambda \right) = X K \left(\frac{\tau}{m} + \lambda \right)$$

$$\bar{v}_1 = Y K \left(\frac{\tau}{m} + \lambda \right)$$

$$\bar{\bar{u}} = X \frac{\tau}{m} + \bar{u}_1 = X \left\{ \frac{\tau}{m} + K \left(\frac{\tau}{m} + \lambda \right) \right\}$$

$$\bar{\bar{v}} = Y \frac{\tau}{m} + \bar{v}_1 = Y \left\{ \frac{\tau}{m} + K \left(\frac{\tau}{m} + \lambda \right) \right\} \quad (12)$$

A pont mozgásának differenciálegyenleteit úgy nyerjük, hogy előállítjuk a pont közelítő, gyorsulását, az $\frac{\bar{u}_1 - u}{\tau}$, $\frac{\bar{v}_1 - v}{\tau}$ kifejezéseket. (Azért nem elegendő az $\frac{\bar{u} - u}{\tau}$, $\frac{\bar{v} - v}{\tau}$ közelítés a

gyorsulás számára, mert ezek nem adnak számot a pont sebessége *irányának* megváltozásáról, a mit pedig a gyorsulástól megkövetelünk.) E kifejezéseknek $\tau=0$ -ra vonatkozó határértékei léteznek és — tekintve, hogy a t kezdőidő tetszésszerint választható — megadják a pont mozgásegyenleteit.

Minthogy

$$\begin{aligned} \bar{X} &= X + \frac{\partial X}{\partial x} (u + \bar{u}) \frac{\tau}{2} + \frac{\partial X}{\partial y} (v + \bar{v}) \frac{\tau}{2} \\ \bar{Y} &= Y + \frac{\partial Y}{\partial x} (u + \bar{u}) \frac{\tau}{2} + \frac{\partial Y}{\partial y} (v + \bar{v}) \frac{\tau}{2} \\ \bar{u}_1 - u &= XK \frac{\tau}{m} + X(K-1)\lambda + \frac{K\tau^2}{2m} \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (u + \bar{u}) + \frac{\partial X}{\partial y} (v + \bar{v}) \right\} \\ &\quad + \frac{K\lambda\tau}{2} \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (u + \bar{u}) + \frac{\partial X}{\partial y} (v + \bar{v}) \right\} \\ \lim_{\tau=0} \frac{\bar{u}_1 - u}{\tau} &= \frac{X}{m} + X\lambda \lim_{\tau=0} \frac{K-1}{\tau} + \lambda \left(\frac{\partial X}{\partial x} x' + \frac{\partial X}{\partial y} y' \right). \end{aligned} \quad 13)$$

Még $\lim_{\tau=0} \frac{K-1}{\tau}$ -t kell kiszámítani:

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2}} = \left(\frac{X^2 + Y^2}{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left[1 + \frac{2X}{X^2 + Y^2} \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} (u + \bar{u}) \frac{\tau}{2} + \frac{\partial X}{\partial y} (v + \bar{v}) \frac{\tau}{2} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2Y}{X^2 + Y^2} \left\{ \frac{\partial Y}{\partial x} (u + \bar{u}) \frac{\tau}{2} + \frac{\partial Y}{\partial y} (v + \bar{v}) \frac{\tau}{2} \right\} \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 1 - \frac{X}{X^2 + Y^2} (\bar{X} - X) - \frac{Y}{X^2 + Y^2} (\bar{Y} - Y), \\ \lim_{\tau=0} \frac{K-1}{\tau} &= -\frac{1}{(X^2 + Y^2)} \left(X \left[\frac{\partial X}{\partial x} x' + \frac{\partial X}{\partial y} y' \right] + \right. \\ &\quad \left. + Y \left[\frac{\partial Y}{\partial x} x' + \frac{\partial Y}{\partial y} y' \right] \right). \end{aligned}$$

Tehát $\lim_{\tau=0} \frac{\bar{u}_1 - u}{\tau}$ valóban létezik s így e határértéket tekinthetjük a mozgó pont t időpontbeli gyorsulásának:

$$\begin{aligned}
 x'' &= \frac{X}{m} - \frac{x'}{(X^2 + Y^2)} \left(X \frac{dX}{dt} + Y \frac{dY}{dt} \right) + \frac{x'}{X} \frac{dX}{dt} = \\
 &= \frac{X}{m} + \frac{x'}{(X^2 + Y^2)} \left(Y^2 \frac{dX}{dt} - XY \frac{dY}{dt} \right) = \\
 &= \frac{X}{m} + \frac{Y}{X} x' \frac{1}{X^2 + Y^2} \left(Y \frac{dX}{dt} - X \frac{dY}{dt} \right)
 \end{aligned}$$

vagy

$$x'' = \frac{X}{m} - \frac{X^2 y'}{X^2 + Y^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{Y}{X} \right), \quad (14)$$

ehhez az egyenlethez járul az

$$\frac{x'}{y'} = \frac{X}{Y} \quad (15)$$

egyenlet, mely a pálya minden pontjában ki van elégítve, hiszen \bar{u} , \bar{u}_1 , $\bar{\bar{u}}$ valamennyien τ minden határon túl való kisebbedésével $u=x'$ felé konvergálnak, úgyszintén \bar{v} , \bar{v}_1 , $\bar{\bar{v}}$ v felé.

A 14) és 15) alatti egyenletek azonosak ama differenciál-egyenletrendszerrel, melyet előbbi közleményeimben felállítottam: ezek az erővonalakon az eleven erő tétele szerint mozgó pont mozgásegyenletei.¹

★

Ez által — az előbb alkalmazott eljárás tökéletesítése után is — igazolva látjuk összes előbbi eredményeinket s egyúttal kiterjesztettük a vizsgálatot arra az esetre is, midőn a kezdősebesség nem párhuzamos az erővel. Az összes eredményekből világosan látni, hogy mi teszi képtelenné az OSTWALD-féle elvet a mechanikai jelenségek leírására: az, hogy nem veszi számba az anyag tehetetlenségét.

¹ L. Math. és Phys. Lapok 12. k. 381. l. és Ann. d. Phys. 13. k. 844. l. II* egyenletrendszer. A megegyezés a 14) képlettel teljes lesz, ha az x'' kifejezésében tekintetbe vesszük a 15) alatti egyenletet.

AZ ELHAJLÍTOTT FÉNY POLÁROZÁSÁNAK ÚJ TÖRVÉNYSZERŰSÉGEI.

FRÖHLICH IZIDOR r. tagtól.

(Kivonat.)

A czímben kifejezett vizsgálatokkal nagyobb-kisebb megszakításokkal már huzamosabb idő óta foglalkoztam, de csak az elmúlt öt év folyamán voltam abban a helyzetben, hogy összes szabad időmet szakadatlanul és kizárólagosan ezen kutatásokra fordíthassam.

Ezek első gyümölcseként két évvel ezelőtt mutathattam be e helyen ily tárgyú, terjedelmes dolgozatomat,¹ mely üvegrácsokról visszaverődve elhajlított fénysugarak polározási állapotára vonatkozik.

Azóta e vizsgálatokat folytatólagosan és érdemlegesen kibővíteni és új irányokba terelni törekedtem; fáradozásaimat ismét siker koronázta; úgy gondolom, általános érdekű és fontosságú új törvényszerűségeket állapíthattam meg, melyek a szorosan az észlelésnek alávetett jelenségek keretén túl is érvénnyel bírnak.

Több ok késett idetartozó eredményeim összefoglaló közzétételére; közülük szabadjon csak a két főbbet felemlítenem.

Az egyik a kutatások megfigyelési és észleleti anyagában rejlik: ugyanis ezen anyagnak szakadatlanul, jóformán határ

¹ FRÖHLICH IZIDOR r. t.: Üvegrácsokról visszaverődve elhajlított fény polározási viszonyai általános törvényszerűségeinek kísérleti megállapítása. M. T. Akadémia Math. és Term.-tud. Értesítője, XXII. kötet, 207—312. l., Budapest, 1904. [Előterjesztve a M. T. Akadémia III. osztályának 1904. évi márczius hó 14.-én tartott ülésén.]

nélkül felszaporodó mennyisége s az ennek kísérleti úton való megszerzésével, valamint feldolgozásával elválaszthatatlanul járó igen jelentékeny idő- és munka-áldozat végre azt a meggyőződést érlelte meg bennem, hogy már csak az üvegrácsok létesítése, *térbelileg* elhajlított sugár-összeségek kimerítő, minőleges és mennyileges megvizsgálása is oly munkát igényel, mely még a legszívósabb és legügyesebb egyes tudós munkaképességét messze túlhaladja, hacsak nem kíván a szó szoros értelmében egy teljes emberéletet e kutatásoknak szentelni.

Másrészt elérkezettnek látom az időt, hogy a lehetőség szerint egységesen foglaljam össze azon számos új törvényszerűséget, melyet egy másodrendű fénylő középpontból induló sugarak polározási állapotára nézve kísérletileg megállapítanom sikerült; ezzel a szakköröknek alkalmat kívánok nyújtani a nyert eredmények megbirálására s a fiatalabb érdeklődőknek buzdítást és serkentést biztos új eredményekkel kecsegtető további vizsgálatokra.

A mi a jelen közlemény külső formáját illeti, szabadjon megjegyezni, hogy ez lényegében véve áttekintő kivonata e tárgyú német nyelvű terjedelmes munkámnak, mely a Tekintetes Akadémia által oly hathatósan támogatott «*Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*» című vállalat XXII. kötetében fog megjelenni és külön kiadványképen is fog könyvkereskedői forgalomba jönni; ez már részben ki van szedve.¹

E munkám magában foglalja a M. T. Akadémia Math. és Term.-tud. Értesítőjében megjelent, fent idézett dolgozatomat, de kiterjed a közölhető formában lévő további vizsgálataimra is.

Minthogy azonban *súlyt helyezek rá, hogy az utóbbiak is előbb a Tek. Akadémiának mutattassanak be és közleményei során előbb jelenjenek meg magyarul mint más nyelven*: ez alkalommal most jelzett terjedelmes munkám részletes kivonatát közlöm, melyben az eddig nyert összes, érdemleges kísérleti

¹ A munka címe: «*Experimentelle Erforschung und theoretische Deutung der allgemeinen Gesetzmässigkeiten der Polarisation des durch Glasgitter gebeugten Lichtes.*» Leipzig, B. G. Teubner. 1907.

és *elméleti* eredményeimet áttekinthetőleg, de röviden csoportosítani és ismertetni töreksem.

★

I. Az elhajlitott fény polározása állapotának kérdése majdnem oly régi, mint az elhajlitási rácsok okozta interferentiának kérdése; a reá vonatkozó irodalom igen terjedelmes és jelentékeny; ebből folyólag könnyen magyarázható és megbocsátható, ha munkám *első, történelmi* részében arra töreksem, hogy az idetartozó, eddigi fontosabb dolgozatok kissé pontosabb és részletesebb kritikai méltatását és áttekintését nyújtsam s közülük különösen azokat vegyem közelebből figyelembe, melyek ugyanoly jelenségekkel foglalkoznak, mint nevezett munkám kísérleti része.

Számos ily dolgozatra munkám többi részében is több ízben hivatkoztam; de a figyelmes olvasó tüstént látni fogja, hogy az egyes kutatók a legtöbb esetben különböző körülmények között létesülő különböző jelenségeket vizsgáltak meg, úgy hogy nem lehet azon csodálkozni, ha az így talált eredmények egymással nem egyezők, sőt gyakran egymással ellentétesek.

★

II. Munkám *második, elméleti* része azon gömbhullámok physikai előállításával foglalkozik, melyek a megvizsgált jelenségeknél jelentkező polározásbeli elrendezések leírására alkalmasak; ilyenek a *circumaxiális*, a *meridionális* és az *isogonális* gömbhullámok rendszerei.

Az első rendszer oly hullámvectort tüntet elő, melynél ez tengelykörüli párhuzamos körök mentén, azaz circumaxiális módon van elrendezve; a második olyat, melynél a hullámvector az ezen tengelyt tartalmazó meridiánok mentén van elrendezve.

A harmadik rendszer hullámvectora oly sajátosságú, hogy mindazon pontokban, melyek egy meghatározott tengelyt tartalmazó valamely meridiánban fekszenek: a pontokhoz tartozó vectorok e meridiánhoz képest egy- és ugyanazon hajlást mutatnak, és pedig mindig akkora hajlást, mint a mekkorát az e tengelyben fekvő pont vectora mutat e meridiánhoz.

Az első két elrendezést már régóta ismerték és aránylag

szűk érvényességi körben alkalmazták; így G. G. STOKES elméleti fejtegetésének eredménye a vectorok irányelrendezésére nézve, RÉTHY MÓR, KÖNIG WALTER gömbhullámai e két elrendezést szolgáltatottak; a harmadik rendszert magam szerkesztettem a tapasztalat alapján, igen nagy számú észleletek eredményeképen s a jelenségek terjedelmes csoportjára nézve érvényesnek találtam; fent említett jellemző sajátosságainál fogva isogonális rendszernek neveztem el.¹

A fentemlített gömbhullámok rendszereit úgy a szilárd-rugalmas testek rugalmassági elmélete alapján, valamint az electromágnességi fényelmélet felfogása alapján tárgyalom és ezek mindegyikének keletkezésére nézve, meghatározott, egyszerű physikai feltételekből indulva ki, a fennálló differentiális egyenleteknek a kielégítendő feltételekkel is megegyező szigorú megoldása segélyével teljes magyarázatot nyújtó physikai képet nyújtok.

E mellett különös gondot fordítok e rendszerek energia-viszonyaira, melyek a jelenségek létesülésénél fontos szerepet visznek. Ezen elméleti rész behatóbb gondolatmenetét nyújtom ezen ismertetés végén (II) alatt.

★

III. A munka *harmadik, kísérleti része* az összehasonlíthatatlanul legfontosabb és legterjedelmesebb rész.

¹ Az irodalomnak szorgos átkutatásánál utólagosan azt találtam, hogy egy tisztán elméleti, de mostanáig teljesen hatástalan maradt dolgozatában H. A. ROWLAND (On the propagation of an arbitrary electromagnetic disturbance, on spherical waves of light, and the dynamical theory of diffraction, Philosophical Magazine (V), vol. XVII, p. 413—437, 1884) valamivel több, mint húsz évvel ezelőtt jelentékeny matematikai segédeszközök felhasználásával egy specziális berendezés esetére nézve ugyanezt a hullámrendszert képezte. De ROWLAND e rendszernek fent említett legfontosabb sajátosságát, ugyanis az *isogonális* elrendezést fel sem említette, továbbá a legkisebb törekvést sem mutatta, hogy elméletileg talált gömbhullámát a tapasztalattal összehasonlítsa, a mi nemcsak az akkori ismeretek alapján történhetett volna a legnagyobb könnyűséggel, hanem egyszersmind további ily irányú vizsgálatokra is igen hathatós serkentésül szolgált volna; miért is jogosan állíthatjuk, hogy elméleti, hypothesises hullámrendszere igazi physikai jelentőségét nem ismerte fel.

1. Ebben az volt a czélom, hogy az üvegrácsok által elhajlított fény polározása viszonyait *mindenekelőtt kizárólagosan tapasztalati úton vizsgáljam meg*, és pedig előre kizárva a bármily feltevésen is alapuló elmélet okozta kísérleti megtevesztést vagy befolyásolást, s felszabadulva az ily feltevésekből folyó, gyakran egészen akaratlanul és nem tudatosan keletkező elfogultságtól.

E szerint semmiképen sem volt szándékomban csak oly kísérleteket végezni, melyek a valamely feltevésből következő egyik vagy másik folyomány igazolására vagy nem igazolására alkalmasnak látszanának, hanem arra törekedtem, hogy általános és rendszeres kutatásokkal a fent körvonalozott jelenségek jellemző fő sajátságait kísérletileg állapítsam meg.

Az ezen részben egész terjedelmükben leírt rendszeres vizsgálataim az eddigi összes ily kutatásoktól főleg a következő három körülménynél fogva különböznek:

a) Míg eddig mindig csak azon elhajlított sugarak képezték a megvizsgálás tárgyát, melyek a rácsok barázdáira merőleges síkban, az ú. n. elhajlítási síkban haladnak, melyek *e szerint valamenynyien egy és ugyanazon síkban vannak*: addig szükségesnek láttam, hogy az elhajlított sugaraknak azon egész térbeli összességét vizsgáljam meg, mely a rács normálisának egy-egy meghatározott iránya mellett létesíthető. Forgatva ugyanis változatlan beeső sugárnyaláb mellett a rácsot saját normálisa körül, azaz saját síkjában, akkor ez által a rácsozott felület által határolt egyik és másik féltér bármily irányába is küldhetünk elhajlított sugarat, melynek fényerőssége észrevehető és polározási állapota megfigyelhető.

A sugarak ezen térbeli rendszereinek megvizsgálása oly törvényszerűségnek megállapítására vezetett, melyeket a csak egy síkban elhajlított sugarak kutatása segélyével részben alig, részben ébenséggel nem lehetett volna felismerni.

β) Arra nézve, hogy a használt rácsok barázda-közeinek a jelenség polározás-állapotára netán gyakorolt befolyását meg lehessen itélni, oly rácsokat alkalmaztam, melyek *egyik felületén egymásra merőleges két vonalrendszer volt húzva*; így az ily rácsok egyike barázda-közeinek értékei 0.5 mm. és 0.001160 mm.

voltak. Az első köz az ily használatos intervallumoknak körülbelől legnagyobbika; a második köz ellenben körülbelől jelzi azt a határt, melyig emberi ügyesség használható vonalozást tud üvegen létesíteni. A használt rácsok többnyire azok voltak, melyeket, miként idézett első közleményem 239. lapján már egy ízben felemlítettem, főtisztelendő PALATIN J. GERGELY sztr. Benedek-rendi tanár Pannonhalmán volt szíves rendelkezésemre bocsátani.

A fentjelzett eljárás szerint bármily térbeli irányba egy-másután lehetett egy s ugyanazon keresztezett rács egyik, illetve másik barázda-rendszere által elhajlított, az észlelésre még elég intensív sugarakat küldeni és ezeket megvizsgálni; így lehetséges volt quantitativ megfigyelések által megállapítani, hogy *üvegrácsok* által elhajlított fénysugarak polározási állapota az esetek túlnyomóan legnagyobb részében a rácsköz nagyságától, az elhajlított sugarat alkotó fény nemétől és ennek fényerősségétől független; oly eredmény, melyet már körülbelől harmincz évvel ezelőtt, bár sokkal szűkebb érvényességi terjedelemben, találtam.¹

Ezen nevezetes, egyszerű tulajdonságok indítottak arra, hogy a megvizsgálandó elhajlítási jelenségek létesítésére kizárólagosan üvegrácsokat használjak.

γ) Hogy elkerüljem az üvegrácsokban keletkező zavaró belső visszaverődéseket, a melyek hatását «hamis fény» elnevezéssel szokás jelölni: homályosra csiszoltam e rácsoknak rendszeren simára csiszolt hátsó felületét és bevontam az így érdeessé tett lapját alkalmas fekete mázzal; ez által sikerült a hamis fényt legalább a visszaverődve-elhajlított sugárösszeségből teljesen kizárni.

2. A munkámban most következő *quantitativ* vizsgálatok a *levegőbe visszaverődve elhajlított fényre* vonatkoznak; ezekről már többször idézett 1904. évi dolgozatomban már részben beszámoltam a Tek. Akadémiának; minthogy azonban az akkor beterjesztett megfigyeléseimhez azóta több mint tizenötezer új

¹ FRÖHLICH IZIDOR: Az elhajlott fény polarisatiója. Előterjesztve a M. Tud. Akadémia III. osztályának 1876. évi november 6-án tartott ülésén; továbbá idézett dolgozatom (M. T. Akadémia Math. és Term.-tud. Értesítője, XXII. kötet, 1904.) 221. lapján levő 2. sz. lábjegyzet.

észleleti adat járult, szabadjon most az e tárgyra vonatkozó, összesen több mint *huszonötezer beállításon* s *leolvasáson* alapuló tapasztalati eredményeimet összefoglalnom.

Minden egyes beeső sugárnyalábból keletkező elhajlított s megfigyelt térbeli sugár-összeség megfigyelési sorozatai táblázatos összeállításban vannak rendezve s a hozzátartozó törvényből elméletileg számított számsorozattal összehasonlítva.

Ezenkívül minden egyes ily sugárrendszerhez tartozó polározássíkok térbeli elrendezését alkalmas stereographikus vetítésben készített képek mutatják; összesen *tizenöt* ily *vetületi kép* készült, melyek az említett elrendezés jó áttekintését nyújtják.

E sorozatokban és képekben a fent jelzett huszonötezer megfigyelési adat van feldolgozva: az ezeken kívül még meg-ejtett qualitativ vizsgálatok felette nagy száma még közelítőleg sem becsülhető meg.

Az alábbiakban felsorolom az e vizsgálatokból folyó új törvényszerűségek közül a legfontosabbakat s a belőlük vonható következtetések közül a legnevezetesebbeket.

A) Ha *nem polározott* (természetes) fény a rács üveganyaga polározás-szöge alatt esik a rácsozott felületre, akkor a visszaverődve-elhajlított sugarak közül mindazok, melyek a beeső sugár továbbterjedése irányával oly szöget képeznek, mely a polározás szögével egyenlő, azaz a mely sugarak mind a beeső sugár körül a polározás szöge nyílásával szerkesztett egyenes körkúpon haladnak: *síkban polározvák* és pedig e sugarak a beeső- és a mindenkori elhajlított sugarat tartalmazó síkban vannak polározva: ez a *polárlúp törvénye*.

B) Ha *síkban polározott* fény a rács üveganyaga polározási szöge alatt esik a rácsozott felületre, akkor a visszaverődve-elhajlított sugarak közül mindazok, melyek a beeső sugár továbbterjedése irányával ugyanakkora szöget képeznek, mint a nevezett polározási szög, melyek e szerint a beeső sugár körül a polározás szöge nyílásával szerkesztett egyenes körkúpon haladnak, a következő sajátságot mutatják: e sugarak a polározónak kellő forgatása által mindig elolthatók, azaz e sugarak fényerőssége a polározó alkalmas helyzeténél zérus intensitást mutat. Ez az (eloltás-kúp) *extinctiókúp törvénye*.

E két tapasztalati tétel magában foglalja a közönséges MALUS-BREWSTER-féle törvényt és ennek megfordítását mint egészen speciális eseteket; de általában véve épen nem tekintendők e törvénynek valamint megfordításának általánosításaképen.

3. Ezután következik azon visszaverődve-elhajlított sugárösszeségek egészen részletes, quantitativ megvizsgálása, melyek a legkülönbözőbb beesés-szögek s a legkülönbözőbb beesési azimutok mellett síkban polározott beeső fényből keletkeznek.

A) Ha a beesés szöge ismét a rács üveganyagának polározási szögével egyenlő és a beesési azimut 90° , akkor a visszaverődve-elhajlított rendszer sugarainak polározás-síkjai oly elrendezést mutatnak, mely a szabályosan visszaverődött, most jóformán teljesen eloltott sugár, mint symmetria-tengely körül igen szépen, egészen biztosan felismerhető és elég pontosan mérhető, teljesen circumaxiális rendszerrel egyező; ez a *circumpoláris polározás törvénye*. Ha a beesési azimut ugyanaz marad, de a beesés szöge 90° -tól 40° -ig változik, akkor még mindig az előbbihez hasonló elrendezés áll elő, melynek symmetria-tengelye, bár mindig a beesés síkjában van, a beesési szög szerint más-más helyzetű; ez elrendezés a *circumaxialis polározás általánosabb jellegű törvényét* juttatja kifejezésre.

Ez az utóbbi törvény még akkor is érvényes, a mikor a beesés szögének említett határértékei között a beesés azimutja a 90° -tól mérsékelt mértékben tér el.

B) Ha a beesés azimutja 0° és a beesés szöge tetszőszerinti, akkor a visszaverődve-elhajlított rendszer fénysugarainak polározás-síkjai mindig ugyanazt a geometriai térbeli elrendezést mutatják a rács normálisához és a beeső fény polározása síkjához, mint szilárd geometriai kerethez képest. Ugyanis: a rács normálisán át tetszősszerinti síkot fektetve, az ezen síkban haladó összes elhajlított sugarak polározás-síkjai e síkhoz képest egyenlő hajlást mutatnak. Ezen elrendezést már magyar dolgozatomban is részletezett okoknál fogva a *stereographikusan-parallel polározás törvényének* nevezem.

Abban a speciális esetben, mikor a beesés normális, azaz a beesés szöge is 0° , a most említett törvény szintén érvényes, de egyszerűbb alakot ölt, mert ekkor a rács normálisa

egybeesik a szabályosan visszaverődött sugárral. Ezen esetben ugyanis mindazok a visszaverődve-elhajlított sugarak, melyek e normálist tartalmazó valamely egy-ugyanazon síkban haladnak, e síkhoz képest egy s ugyanazon polározási azimutot mutatnak és pedig ugyanazt az azimutot, melyet a szabályosan visszaverődött sugár ugyane síkhoz képest mutat; ezt az elrendezést az *isogonális polározás nevezetes törvénye* nevével jelzem; ez a stereographikusan-parallel elrendezésnek legegyszerűbb esete.

Fent megállapítottam azt a minden kétséget kizáró módon tapasztalati tényként felismert igazságot, hogy 0° beesési azimut mellett a keletkezett visszaverődve-elhajlított sugarrendszer polározás-síkjainak térbeli elrendezése a beesés szögétől független és aránylag egészen csekély eltérésektől eltekintve, mindig a stereographikusan-párhuzamos polározás törvényét követi. Ezen nevezetes kísérleti igazság kikerülhetetlenül egyszerű, de kényszerítő következtetéshez vezet a gerjesztő fényvectornak saját polározás-síkjához való relatív helyzete, illetve irányítása tárgyában. Ugyanis: egyrészt a síkban polározott fény interferentiája ismert tapasztalati jelenségei kényszerítő módon vezetnek arra a következtetésre, hogy a homogén és isotrop közegekben a síkban polározott fényvectornak a sugár továbbterjedése irányára merőlegesnek kell lennie, közelebbről pedig e vector csak a sugár polározása síkjában vagy reá merőleges irányban lehet; másrészt áll az épen fent említett tapasztalatok szerint, hogy zérus beesési azimut mellett a visszaverődve-elhajlított fényrendszer sugarai polározási síkjainak térbeli elrendezése a beesés szögétől független: e szerint ez utóbbi ténykörülmeny csak úgy állhat fenn, ha a másodrendű, gerjesztő fényvectornak az elhajlító felülethez viszonyított geometriai elhelyezése is a beesés szögétől független.

Ebből kizárólagosan kényszerítő módon, függetlenül a fény természetére vonatkozó bármily hypothesisitól, következik, hogy a másodrendű fényhullámot gerjesztő fényvector csak merőleges lehet saját polározás-síkjára.

C) Az idetartozó további megfigyelések oly esetekre vonatkoznak, melyekben a beesési azimut 0° és 90° között van, míg a beesés szöge is tetszésszerű; ilyen eset a fent fel-

soroltakon kívül *kilencz* volt a részletes quantitativ észlelés tárgya, úgy hogy összesen tizenöt ily visszaverődve-elhajlított térbeli sugárrendszer sugarai vizsgáltattak meg. Ezen C) csoport jelenségei szemlátomást engedik felismerni azt az átmenetet, melyet e csoport sugarai polározás-síkjaiknak elrendezésében a teljes circumpoláris polározástól kezdve fokozatosan a stereographikusan-parallel elrendezésig mutatnak.

A vizsgálatok további folyamában oly tapasztalati tények kerültek napvilágra, melyek azt a kényszerítő következtetést engedik meg, hogy az ú. n. «*irreguláris reflexió*» és az ú. n. «*irreguláris refractió*» helytelen feltevés; azaz, hogy a STOKES-féle, erre vonatkozó felfogás tarthatatlan, az a felfogás ugyanis, hogy optikailag különböző két közeg közös határfelületén történő fényelhajlásnál, *mielőtt* a beeső sugárnyaláb az elhajlító felülethez érkezik, e nyalábnak elhajlítása, azaz elemi hullámokra való szétesése és azután minden egyes elhajlított sugárnak szabályszerű törése vagy visszaverődése állana be; de vannak kísérleti tények, melyek e feltevésnek ellentmondanak.

Ellenben kimutatják a megfigyelések, hogy FRESNEL közönséges visszaverődési formulái az üveg és levegő közös határfelületére vonatkozólag az itt használt legszűkebb közre, 0.001160 mm-re nézve is még mindig igen jól egyeznek a tapasztalattal.

Úgy gondolom, hogy az ezen III, 3. részben közölt megfigyelési eredmények a kísérleti tények oly halmazát foglalják magukban, hogy ezek alapján az üvegrácsokról visszaverődve-elhajlított térbeli sugárrendszerek polározási állapota, bármily beesési azimut mellett és bármily beesési szögre nézve, nagyjában és jellemző vonásaiban kísérletileg felismertnek tekinthető.

A munka kísérleti részének 4. és 5. alatt következő két szakasza nem tartalmaz ugyan számbeli adatokat; mindazonáltal a bennük leírt és tárgyalt megfigyelések az új törvényszerűségek egész sorozatának egészen kétségtelen módon való megállapítására vezettek, melyek a más körülmények között keletkezett elhajlított sugárrendszerekre nézve ugyanolyan fontosságúak, mint az eddig ismertetett törvényszerűségek a megelőző 3. pontban felsorolt jelenségekre nézve.

4. A levegővel érintkező üvegrács felületén ugyanis nemcsak olyan fényelhajlás léphet fel, mely a megelőző 3. pontban képezte a vizsgálat tárgyát; azaz nem csak *levegőből üvegbe* történő visszaverődéssel egybekapcsolt elhajlítás következhetik be, hanem *üvegből levegőn üvegbe* (azaz *belső visszaverődéssel* egybekapcsolt) fényelhajlítás is; hasonlóképen *üvegből levegőbe* (azaz *külső töréssel*) és végre *levegőből üvegbe* (azaz *belső töréssel* egybekapcsolt) elhajlítás.

A jelzett esetek kifogástalan megfigyelése végett egy külön e célból készült ZEISS-féle kicsiny színszóródású borosilikát-korona-üvegből csiszolt félgömböt használtam, melynek kör-síkjára a mindenkor vékony üveglapú rácsot *sim*a lapjával kevés terpentinolajjal odaragasztottam. A leggyakrabban használt ily üvegrács köze középértékben 0.001840 mm volt; anyagának közép-törésmutatója 1.5176; a félgömbanyagának átlagos törésmutatója 1.5023;¹ végre a használt terpentinolaj törésmutatója középértékben 1.48.

§ 1(a) A *belsőleg visszaverődve-elhajlított sugárrendszerek* esetében, azaz *üvegből levegőn üvegbe* történt elhajlításnál a megfigyelések arra vezettek, hogy ekkor a *polárkúp* és az *eloltáskúp törvénye*, továbbá a *circumpoláris* és a *circumariális polározás törvénye* s végre még az *isogonális polározás törvénye* is fennáll; mindezek azonban *szűkebb érvényességi körben* lépnek fel.

b) Az *üvegből levegőbe töréssel elhajlított sugárrendszer* megfigyelése arra a tapasztalatra vezetett, hogy *síkban polározott, normálisan beeső sugárnyaláb* esetében ezen elhajlított rendszer egész terjedelmében az *isogonális polározás törvénye* áll fenn, ugyanaz a törvény, mely ugyanily beesésnél a *levegőből üvegbe* történő visszaverődve-elhajlított rendszerre nézve fennáll. Hasonlóképen adódott, hogy *0° beesési azimutnál*, de *tetszésszerűn* *beesésszög mellett* a *stereographikusan-parallel polározás ugyanazon törvénye* érvényes mint ott; ezért itt is áll a *másodrendű fényhullámokat gerjesztő fényreceptor*nak *polározási síkjához viszonyított helyzetére, irányítására nézve ugyanaz a kényszerítő erejű következtetés* mint ott.

¹ E három adatot SELÉNYI PÁL tanárjelölt volt szíves meghatározni.

Más beesési azimutokra és tetszésszerű beesés-szögekre nézve a beeső sugár folytatása körül lévő sugarak számára az isogonális polározás szűkebb térbeli érvényességi körben áll fenn. 90° beesési azimutnál jelentékenyen ellipszisben polározott elhajlitott sugarak keletkeznek.

c) Végre a levegőből üvegbe töréssel elhajlitott sugárrendszeren tett észleleteim kimutatták, hogy síkban polározott fénynyaláb merőleges beesésénél az isogonális polározás törvénye csak azon elhajlitott sugarakra nézve érvényes, melyek az irányváltozás nélkül tovább haladó sugár körül, ennek közelségében fekszenek; ugyanez a törvényszerűség áll fenn tetszésszerű beesési azimutoknál, tetszésszerű beesési szögek mellett azon elhajlitott sugarakra nézve, melyek a beeső sugár továbbterjedési iránya közelségében haladnak tovább. E jelenségek keretében úgy a 0° -szögű, mint a 90° -szögű beesési azimutnál az elhajlitott sugarak nagymérvű elliptikus polározást mutathatnak; de itt sem a stereographikusan-parallel, sem a circumaxiális polározás törvénye már nem áll fenn.

Mindezen, a 3. és a 4. alatt felsorolt tapasztalati tényekből egy egyszerű, általánosabb jellegű, de szűkebb érvényességű körrel bíró törvény emelkedik ki. Ugyanis úgy a levegőbe vagy az üvegbe visszaverődve-elhajlitott sugárrendszerekben, valamint a levegőbe vagy az üvegbe töréssel elhajlitott sugárrendszerekben mindazok az elhajlitott sugarak, melyek a beeső fénynyaláb egyenes körűl közelebbi közelségben haladnak, az isogonális polározás törvényét mutatják. Ezen nevezetes sajátsgot a polározás síkja megtartására irányított törekvés törvényének nevezhetjük.

5. Munkám utolsó szakasza az üvegrácsok által elhajlitott oly fénysugarak polározása megvizsgálására vonatkozik, mely sugarak akkor keletkeznek, a mikor a rácsozott felület vele közeli egyenlő törésmutatójú közeggel határos. Ekkor a rácsozott felület mindkét oldalán majdnem egyenlő optikai sajátsgú közegek terülnek el s az így létesülő fényelhajlás úgy tekinthető, mint ha ez a közeg változtatása nélkül, avagy ugyanabban az optikai közegben keletkeznék.

‘Az ily esetekben tett megfigyelések közül az egyedüli ellenvetés nélküli észleletek K. EXNERTől származnak; e physikus egy üvegrácsot barázdált felületével kevés olajjal egy félhengeralakú lencse síkjára — és pedig barázdaival párhuzamosan a henger tengelye irányával — ragasztott és e rács lapjára normálisan bocsátott síkban polározott fényt, mely a rács barázdáihoz képest 45° -os azimutot mutatott. Így keletkeztek a rácsozott lap és a vékony olajréteg közös határfelületén igen kicsiny töréssel járó, átmenve-elhajlított sugarak, melyek mind a barázdák irányára, azaz a hengerlencse tengelyére merőleges síkban feküdtek. Megvizsgálva e sugarakat analysator segélyével, STOKES törvénye érvényességét állapíthatta meg, azaz a polározás-síkoknak egyszerű circumaxiális elrendezését az említett *egy síkra* nézve, és pedig kielégítő pontossággal.

Ezt a vizsgálatot a nevezett physikus csak *egy* meghatározott beesési szög és *egy* meghatározott beesési azimut mellett és pedig csak a barázdák irányára merőleges *síkban* elhajlított sugarakra nézve végezte; ennek szűk körben érvényes eredménye nem elegendő általánosabb törvények megállapítására; ezért szükségesnek tartottam az ilyenmű kutatást egyrészt *tetszésszerű* beesési szögek és *tetszésszerű* beesési azimutok mellett az *átmenő* (töréssel egybekapcsolt) *elhajlításnál* keletkezett mindenkor *egész, térbeli sugárrendszerekre* kiterjeszteni; másrészt pedig e vizsgálatot ugyanily módon az itt egyidejűleg keletkező *visszaverődve-elhajlított* sugárrendszerek észlelésével kiegészíteni.

Kifogásolhatlan megfigyelések végzése céljából a mindenkor használt üvegrácsot barázdás felületével terpentinolajjal reá ragasztottam a 4. alatt említett ZEISS-féle üvegfélgömb sima lapjára.

a) A nagy gonddal végezett megfigyelések mindenekelőtt megerősítették a mult század közepe táján STOKES által először talált, később Lord RAYLEIGH által is igazolt azon tapasztalati törvényt, mely a fénynek a levegőben vagy folyadékokban lebegő kicsiny testecskéken való elhajlításánál fellépő polározódására vonatkozik.

E törvény ugyanis lényegében véve a következőképen

fejezhető ki: Ha nem polározott (természetes) fény esik ily részecskékre, akkor az «elhajlított» vagy a «szétszóródott» sugarak közül mindazok, melyek a beeső nyalábra merőlegesek, *elhajlítási síkjukban polározottak*. Ellenben ha a beeső sugárnyaláb síkban van polározva, akkor az az «elhajlított» vagy «szétszóródott» sugár, mely a beeső sugár polározása síkjára és haladása irányára egyidőben merőleges, *zérus fényerősséget mutat*. Ezen vonatkozások tulajdonképen, a II. és (II.) alatt tárgyalt hullámrendszereink nézpontjából tekintve, csak *első jelei* annak, hogy az ezen esetekben elhajlított (szétszóródott) sugarak polározássíkjai a circumaxiális elrendezés szabályát látszanak követni, és pedig itt a symmetria tengelye csakis a beeső sugár polározás-síkjára és haladási irányára merőleges egyenes lehetne.

Az általam részletesen megvizsgált esetben, mikor *üveg és olaj közös határfelületén történik a fényelhajlás, az említett circumaxiális elrendezés törvénye az egész térbeli sugárrendszerre nézve érvényesnek bizonyult; a symmetria tengelye a fent jelzett irány; de e törvény csak akkor érvényesül, ha az elhajlítás létesítésénél a beeső vagy az elhajlított sugarak, vagy úgy az előbbiek, mint az utóbbiak az olajrétegen áthatolnak; nem áll e szerint a polározás-síkoknak ezen elrendezése, a mikor belső visszaverődéssel egybekötött elhajlítás történik üvegből olajon át üvegbe vissza.*

b) A további vizsgálatok folyamán azt is találtam, hogy *síkban polározott fénynek normális beesésénél a polározás síkjainak elrendezése úgy a megtörve-elhajlított, mint a visszaverődve-elhajlított sugárrendszerekre nézve ugyanazon circumaxiális törvénynek hódol*. Ugyanis a két rendszer polározás-síkjai-*nak elrendezése közös symmetria-tengelyt mutat, nevezetesen ez az az egyenes, mely a beeső sugár polározás-síkjára merőlegesen, a rács síkjában fekszik; az elrendezés az e tengely körül elterülő egész térben teljesen szimetrikus.*

Változtatva most a beesés szögét tetszés szerint, de *e* közben állandóan megtartva a zérus beesési azimutot: a szorgos megfigyelések kimutatták, hogy *mindenkor ugyane törvénye a teljes circumaxiális elrendezésnek, mindig ugyanezen symmetria-tengely körül kétségtelenül fennáll.*

E szabályszerűségben a természet egyik legegyszerűbb és legszebb törvénye nyilatkozik meg;¹ egyszersmind az a tény-körülmény, hogy e törvény a jelzett viszonyok között független a beesés szögétől, ismét ahhoz a kényszerítő erejű következtetéshez vezet, *hogy függetlenül a fény természetére vonatkozó bármily feltevéstől, a másodrendű fényhullámot gerjesztő fény-vector csak merőleges lehet polározás-síkjára.*

c) A többi, más beesési azimutok mellett keletkező jelenségek közül itt csak a 90° -os beesési azimutnál jelentkezőt említem fel különösen. Ugyanis az üveg és olaj határfelületén fellépő polározási szög, a törésmutatók csekély különbségénél fogva, a 45° közelségében van; ezen beesés-szög mellett a visszaverődve-elhajlított sugárösszeség a szabályosan visszaverődött, most eloltott sugár iránya körül mint tengely körül teljesen kialakult circumpoláris polározást mutat.

Ezen elrendezés typusa ugyanaz marad, ha a beesés szöge a 90° és 35° közötti közben tetszés szerinti értékű; de a symmetria tengelyének a beesés síkjában jelentkező irányítása e közre nézve némi különbözőséget mutat. Az ezen esetben egyidejűleg fellépő törve-elhajlított sugárrendszer polározás-síkjai nagyjában partiális circumaxiális elrendezést mutatnak, de sehol sem teljesen tengelykörülít.

Ha a beesési azimut 0° és 90° közötti közben tetszés szerinti értékű, akkor a keletkező elhajlított sugárrendszerek

¹ Nagy meglepésemre állapíthatom meg e helyen azt, hogy a rubinüvegben lévő ultramikroskopos testecskék által létesített optikai jelenségeknél, közelebbről pedig az ily egyes, a 0.0001 mm-nél jelentékenyen kisebb részecske jelenlétele folytán keletkezett másodrendű sugárrendszerre nézve a polározás-síkjainak teljes, circumaxiális elrendezéseinek ugyanazon törvénye lép fel, mint a szövegben említett, rács okozta fényelhajlításnál, ugyanabban a közegben, üvegben. Az észlelő, H. SIEDENTOPF leírja ugyan az egyes elhajlítási korongokban fellépő polározási állapotot s ezt körvonalos képekben elő is állítja (DRUDE'S, Annalen der Physik, Band 10, p. 12, 1903.); de sehol sem mondja, hogy ezen állapot törvényszerűségét felismerte; hasonlóképen nem vették ezt észre az azóta e tárggyal foglalkozó buvárok. E képek másolatát munkám végén közlöm: egyetlen egy pillantás rájuk felismerteti e sorok olvasójával a circumaxiális polározásnak fent talált törvényét.

polározás-síkjainak elrendezési rendszerei fokozatos átmeneteket képeznek az épen most jellemzett elrendezési főtípusok között.

De itt is az oly elhajlított sugarakra nézve, melyek *a beeső nyaláb egyenese közelségében haladnak, igen közelítőleg érvényes az isogonális polározás törvénye, azaz a polározás-síkja megtartására irányuló törekvés.*

A munkámban közlött valamennyi tapasztalati tényből azonban minden kétséget kizáró módon kiderül, hogy az üvegrácsok által létesített elhajlításnál az elhajlított sugarak polározási állapota nem úgy keletkezik, hogy a beeső sugár polározási állapota e sugár elhajlítása folytán az elhajlított sugáréba megyen át; hanem akként, hogy a másodrendű gerjesztési középontból, azaz az elhajlítás helyéből kiinduló gerjedések folytán a térnek minden pontjában, függetlenül a rácsköztől, a fény nemétől (színétől), melyből az elhajlított sugár áll, és függetlenül ennek erősségétől, egy egészen meghatározott polározási állapot létesül és áll fenn, mely azonban csak úgy figyelhető meg, ha gondoskodunk arról, hogy a tér e helyén eléggé intenzív elhajlított sugár álljon elő.

★

(II) Szabadjon végre e helyen még közelebbről szólanom a munkámban kísérletileg megvizsgált jelenségeknek ugyane munkámban részletesen tárgyalt és fejtegetett *elméleti értelmezéséről.*

Már fent, II. és III, 2. alatt említettem, hogy RÉTHY Mór tagtárs körülbelül huszonöt évvel ezelőtt — aránylag igen szűk-körű, harmincz évvel ezelőtt üvegrácsokról levegőbe visszaverődve-elhajlított fénysugarakon végzett megfigyeléseim formai összefoglalására — *geometriai előállítást*, illetve *leírást* alkalmazott; ezt néhány évvel később W. KÖNIG folytatólagos kiegészítéssel használta.

Ezen előállítás lényegében véve egyszerű gömbhullámokból áll, melyek kifejezései egyenlők a végtelen kiterjedésű szilárd-rugalmas közegek differentiálegyenleteinek egyszerű típusú megoldási rendszereivel, tekintet nélkül azonban a gerjesztő középponti ok physikai feltételeire, úgy, hogy e leírás tulajdonképen geometriai jellegű.

Úgy találtam, hogy az elhajlitott fény polározási síkjainak, térbeli elrendezésére vonatkozó tapasztalati tudásunk jelen állásánál a jelzett leírási mód még mindig a legegyszerűbb, különösen, ha e hullámokat alkalmas módon általánosítjuk.

Ez előállítási eljárást az által törekedtem *physikai magyarázat jelentőségére* emelni, hogy hozzá e hullámrendszerek *gerjesztése* tárgyában egyszerű, lehetséges vagy legalább valószínű *physikai képet* alakítottam, a mit akként sikerült létesítenem, hogy W. VOIGTNAK a fénylő pontokról szóló elméletét úgy a szilárdrugalmassági, valamint az electromágnességi felfogás alapján általánosítottam, illetve az egyszerű főtípusokat teljesen megfejtettem és alkalmas módon kombináltam.

Elméleti képem főbb körvonalai a következők :

a) *A szilárd-rugalmassági elmélet alapján.*

(1) Ha valamely homogén, isotrop közegben egy kicsiny merev golyó bármily külső oknál fogva középpontján átmenő, változatlan irányú tengely körül állandóan egyszerű harmonikus, oscillatorius mozgást végez és a környező rugalmas közegnek a gömb felületét érintő pontjai a folytonosság elve szerint mindig a gömbfelületen maradva, vele együtt végeznek oscillatorius rezgést: akkor az ezen gerjesztő rezgés által a környező, végtelen kiterjedésű rugalmas közegben létesített rezgési állapot a tér minden pontjára nézve teljesen meghatározható, mert ezen esetben a fennálló differentiális egyenletek rendszere *egy egyszerű, typusszerű megoldásának alapul vételével* és a jelzett felületi feltételeknek szigorú tekintetbe vételével a szóban forgó rugalmasságtani probléma teljesen megfejthető.

A gerjesztő gömböcskétől nagyobb távolságban lévő helyeken a gerjesztett rezgési állapot olyan, hogy valamely nagyobb sugarú gömb felületén lévő pontokban a rugalmas közegrészek translatorius rezgései e gömbfelület azon párhuzamos körei mentén mennek végbe, melyek közös tengelye a gerjesztő merev gömböcske forgó rezgése forgási tengelyének egyenese; ellenben ugyanezen rugalmas részek rotatiós rezgéseinek tengelyei mindenütt e nagyobb gömb ugyanezen közös tengelyéhez tartozó meridiánjai mentén levő érintőkkel esnek egybe.

E szerint a gerjesztő gömböcskétől számított nagyobb

távolságban a gerjesztett állapot továbbterjedésének iránya (a nagyobb gömbfelület mindenkor sugarának iránya), a gerjesztett rezgés translatorius és rotatorius componense, a tér minden pontjában egymásra merőleges három irány.

Az így keletkező gömbhullám *translatorius oscillatiói* e szerint egy *circumaxiális vectorrendszert*, *rotatorius oscillatiói* egy *reá orthogonális meridionális vectorrendszert* alkotnak.

(2) Ha valamely homogén és isotrop rugalmas közegben egy kicsiny, merev gömböcske bármily külső oknál fogva közép-pontján átmenő, változatlan irányú egyenes mentén állandóan egyszerűen harmonikus translatorius (lineáris) rezgést végez, és a rugalmas közegnek e gömb felületét érő pontjai a folytonosság elve szerint e felületen maradvával együtt végzik e rezgést: akkor az ezen gerjesztő rezgés által a környező, végtelen kiterjedésű rugalmas közegben létesített rezgési állapot a tér minden pontjára nézve teljesen meghatározható, mert ezen esetben is a fennálló differenciálegyenletek rendszere *egy másikkal, szintén egyszerű, típuszerű megoldásának alapul vételével* és a jelzett felületi feltételeknek szigorú tekintetbe vételével a szóban forgó rugalmasságtani probléma teljesen megfejthető.

A gerjesztő gömböcskétől nagyobb távolságban lévő helyeken a gerjesztett rezgési állapot olyan, hogy valamely nagyobb sugarú gömb felületén lévő pontokban a rugalmas közegrészek translatorius rezgései e gömbfelület *azon meridiánjai* mentén mennek végbe, melyek közös tengelye a gerjesztő merev gömböcske translatorius rezgésének egyenese; ellenben ugyanezen rugalmas részek rotációs rezgéseinek tengelyei mindenütt e nagyobb gömb ugyanezen közös tengelyéhez tartozó *parallel körei* mentén levő érintőkkel esnek egybe.

E szerint itt is áll, hogy a gerjesztő forrástól számított nagyobb távolságban a gerjesztett állapot továbbterjedésének iránya (a nagyobb gömb mindenkor sugarának iránya), a gerjesztett rezgés translatorius és rotatorius componense a tér minden pontjában egymásra merőleges három irány.

Az így keletkező gömbhullám *translatorius oscillatiói* ilyenformán egy *meridionális vectorrendszert*, *rotatorius oscillatiói* egy *erre orthogonális circumaxiális vectorrendszert* alkotnak.

(3) Ha a merev gömböcske a nevezett közegben *egyszerre* végez állandóan translatorius és ennek irányára merőleges tengelyű rotatorius oscillatiót, akkor a keletkező gerjesztett rezgési állapot az épen (1) és (2) alatt jellemzett állapotok összegének helyesen képezett eredője. Ha még azt az egyszerű feltevélt viszsziük be, hogy az (1) és a (2) rendszernek egész energiája egymással egyenlő, akkor a rugalmas közegben, a gerjesztő forrástól nagyobb távolságban e két rendszer együttes fellépésének eredménye oly *isogondlis oscillatiók rendszerei*, melyeknek translatorius és rotatorius vectorai a nagyobb gömbfelületen elterülő körök két rendszere mentén, és pedig következőképen vannak elrendezve:

A gerjesztő forrás egyensúlyi helyzete körül, mint középpont körül nagyobb gömbfelületet szerkesztve és középpontján át, merőlegesen a gerjesztő gömböcske translatorius és a reá merőleges rotatorius oscillatiója változatlan irányaira átmérőt húzva, akkor ennek belépő helye a gömbfelület meghatározott pontja, melyen át e gömbhöz két érintőt húzunk: az első a gerjesztő gömböcske translatorius oscillatiója irányával, a második rotatiós oscillatiója tengelyével párhuzamos. Szerkeszszük most az oly gömbi körök rendszerét, melyek síkjai mind az első érintőt tartalmazzák: akkor az eredő translatorius rezgések mind e körök érintőinek mentén mennek végbe; míg az eredő rotatorius rezgések tengelyei mind oly gömbi körök érintői mentén vannak elrendezve, mely körök síkjai mind a második érintőt tartalmazzák.

E körök két rendszere egymást merőlegesen metsző trajectoryák; e szerint itt is az eredő gerjesztett állapot az, hogy ennek továbbterjedési iránya (a nagyobb gömbfelület mindenkor sugarának iránya), s a rugalmas részek translatorius és rotatorius rezgéseinek iránya a tér minden pontjában egymásra merőleges három irány.

(4) Minthogy a beeső, gerjesztő, síkban polározott fény a szilárd-rugalmassági elmélet szerint nem más, mint sík hullámfelületű, transversális, egyszerű lineáris oscillatió, melynek translatorius és rotatorius rezgése egymásra, mindkettő pedig a beeső fénysugár továbbterjedése irányára merőleges: ez a sugár az

elhajlítás gerjesztése helyén a rugalmas részecskékre egyszerre translatorius és rotatorius oscillatiót kényszerít. Ha ily részecskéket gömbalakúnak veszünk fel, akkor ily rezgő gömböcske oly másodrendű fényhullámok gerjesztő forrásának tekinthető, mely maga körül létesíti az (1), a (2) és a (3) alatt taglalt gömbhullámrezgések vector-rendszereit, és pedig a szerint, a mint a gerjesztő oscillatió rotatorius, vagy translatorius része, vagy egyszerre mind a két componense a hatásos.

Így ezen elmélet alapján az észlelt törvényszerűségek fesszelen magyarázatot nyernek s a bonyolódottabb jelenségek is a jelzett eredmények alkalmas kombinálásával előállíthatók.

(5) Az (1), (2), (3) alatt említett elméleti fejtegetések szerint az ott nyert megoldási eredmények a gerjesztő gömböcske felszínén uralkodó feltételek szigorú tekintetbe vételével megállapítottak és a rugalmas tér minden helyére nézve kivétel nélkül pontosan érvényesnek találtattak; a gerjesztő forrástól számított nagyobb távolságban az eredmények nagyobb értékű tagjaival szemben a kisebb értékűek elhanyagolhatók és így fennmaradnak azok az egyszerű vectorrendszerek, melyeket e pontozatokban részleteztem.

De az analytikai fejtegetések sajátosságainak behatóbb puhatolása azt az egyszerű, nevezetes eredményt juttatta felszínre, hogy a gerjesztő forrástól számított nagyobb távolságban egészen eltűnik a felületi feltételeknek, valamint e forrás alakjának befolyása a gerjesztett állapotra és csakis a forrás megadott jellegű oscillációjához illeszkedő egyszerű típusa a differentiálegyenletek megoldási rendszerének marad fenn.

Ezen eredmény physikai értelmezése az, hogy a másodrendű gerjesztő középponttól számított, a hullámhosszúsághoz képest nagy távolságokban — e szerint a fényjelenségek esetében már néhány milliméter távolságban — a keletkező vector-rendszer csakis a gerjesztő középpont egyszerű, típuszerű oscillatiója által van meghatározva és egészen független attól, mily alakot akarunk e középponti testecskének tulajdonítani és milyeneknek akarjuk az e testecskén uralkodó felületi feltételeket tekinteni.

β) Az electromossági-mágnességi fényelmélet alapján:

(1) Ha valamely homogen, isotrop dielectrikumban egy kicsiny gömbalakú részecske elektromos állapota, bármely külső oknál fogva, középpontján átmenő valamely meghatározott egyenes mentén állandóan egyszerűen harmonikus *electromos oscillatiót* mutat és a környező dielectrikumnak e gömböcske felületét érő részei a folytonosság elve szerint mindig ugyanoly állapotot mutatnak, mint a gömböcskének felületi részei: akkor ezen gerjesztő *electromos oscillatio* által a környező, végtelen kiterjedésű dielectrikumban létesített *electromágnességi állapot* a tér minden pontjára nézve teljesen meghatározható, mert ezen esetben az *electromágnességi tér differentiális egyenletei egy egyszerű, típuszerű megoldása alapul vételével*, a jelzett felületi feltételeknek szigorú tekintetbe vételével, a szóban forgó probléma teljesen megfejthető.

A gerjesztő gömböcskétől nagyobb távolságban lévő helyeken a gerjesztett *electromágnességi állapot* olyan, hogy valamely nagyobb sugarú gömb felületén lévő közegrészekben az *electromos oscillatiók* azon meridiánok érintői mentén mennek végbe, melyek közös tengelye a gerjesztő *electromos oscillatio* irányának egyenese; ellenben ugyanezen közegrészekben az *electromos rezgésekkel* elválaszthatatlanul egybekapcsolt *mágnességi oscillatiók* irányai mindenütt e meridiánokra merőleges párhelyes körök érintőivel esnek egybe.

Ezek szerint a gerjesztő *electromos oscillatiótól* számított nagyobb távolságban a gerjesztett állapot továbbterjedésének iránya (a nagyobb gömbfelület mindenkor sugarának iránya), s a gerjesztett állapot *electromos és mágnességi oscillatiója* a tér minden pontjában egymásra merőleges három irány.

Az így keletkező gömbhullám *electromos oscillatiói* e szerint *egy meridionális vectorrendszert, mágnességi oscillatiói* egy erre merőleges *circumaxiális vectorrendszert* alkotnak.

(2) Ha valamely homogen isotrop dielectrikumban egy kicsiny gömbalakú részecskének *mágnességi állapota* bármely külső oknál fogva, középpontján átmenő valamely meghatározott egyenes mentén állandóan egyszerű harmonikus *mágnességi oscillatiót* mutat és a dielectrikumnak e gömböcske felületét érő részei

a folytonosság elve szerint ugyanazt a mágnességi állapotot mutatják, mint e felület részecskéi: akkor ezen gerjesztő mágnességi oscillatio által a környező, végtelen kiterjedésű közegben létesített electromágnességi állapot a dielectrikum minden pontjára nézve teljesen meghatározható, mert ezen esetben is az electromágnességi tér differentiálegyenletei egy *egyszerű*, de *más típuszerű megoldásának alapul vételével*, a jelzett felületi feltételeknek szigorú tekintetbe vételével, a szóban lévő electromágnességi probléma teljesen megfejthető.

A gerjesztő oscillatiótól számított nagyobb távolságban lévő helyeken a gerjesztett electromágnességi állapot olyan, hogy valamely nagyobb sugarú gömb felületén lévő közegrészekben a mágnességi oscillatiók azon meridiánok érintői mentén mennek végbe, melyek közös tengelye a gerjesztő mágnességi oscillatio irányának egyenese; ellenben ugyanezen közegrészekben a mágnességi rezgésekkel elválaszthatatlanul egybekapcsolt electromos oscillatiók irányai mindenütt e meridiánokra merőleges parallel körök érintőivel esnek egybe.

Ezek szerint a gerjesztő mágnességi oscillatiótól számított nagyobb távolságban a gerjesztett állapot továbbterjedésének iránya (a nagyobb gömbfelület mindenkor sugarának iránya), s a gerjesztett állapot mágnességi és electromos oscillatioja a tér minden helyén egymásra merőleges három irány.

Az így keletkező gömbhullám *mágnességi oscillatiói* e szerint *egy meridionális vectorrendszert*, *electromos oscillatiói* egy erre merőleges *circumaxiális vectorrendszert* alkotnak.

(3) Ha a dielectromos közeg *gerjesztő*, gömbalakú részecskéjének állapota *egyidőben* mutat állandóan electromos és mágnességi oscillatiót, melyek iránya egymásra merőleges, akkor a keletkezett electromágnességi állapot az épen (1) és (2) alatt részletezett állapotok összegének helyesen képezett eredője. Ha még azt a feltételt visszük be az előállott kifejezésekbe, hogy a gerjesztő gömböcskében az electromos és a mágnességi oscillatio energiája egymással egyenlő (és ez itt egyenértékű azzal a feltétellel, hogy az (1) és (2) rendszerek energiája egyenlő egymással), akkor ezen két rendszer együttes fellépésének eredménye az oly *isogonális oscillatiók rendszerei*, melyeknek electromos és

mágnességi vectorai a nagyobb gömbfelületen elterülő körök két rendszere mentén és pedig következőképen vannak elrendezve:

Szerkeszszünk a gerjesztő oscillatiókat vivő gömböcske körül nagyobb gömbfelületet, s húzzunk középpontján át, merőlegesen a gerjesztő electromos és mágnességi oscillatiók egymásra merőleges irányaira átmérőt, akkor ez az átmérő a gömbfelületen át meghatározott pontban lép be a gömb terébe; e pontban a gömbfelülethez két érintőt húzzunk: az első a gerjesztő electromos oscillatió irányával, a második a gerjesztő mágnességi oscillatió irányával párhuzamos. Szerkeszszük most az oly körök rendszerét, melyek síkjai mind az első érintőt tartalmazzák: akkor a nagyobb gömb felületi részeinek eredő electromos oscillatiói mind e körök érintői mentén mennek végbe; míg ugyane felületi részek eredő mágnességi oscillatióinak irányai mind az oly gömbi körök érintői mentén vannak elrendezve, mely körök síkjai mind a második érintőt tartalmazzák.

A gömbi körök ezen két rendszere egymást orthogonálisan metsző trajectoriák; e szerint itt is az eredő gerjesztett állapot az, hogy ennek továbbterjedési iránya (a nagyobb gömbfelület mindenkor sugarának iránya), s a dielectromos közegrészek electromos és mágnességi rezgéseinek iránya a tér minden pontjában egymásra merőleges három irány.

(4) Minthogy a beeső, gerjesztő, síkban polározott fény az electromágnességi elmélet szerint nem más, mint sík hullámfelületű, transversális, egyszerű lineáris oscillatió, melynek electromos és mágnességi rezgése egymásra, mindkettő pedig a beeső fénysugár továbbterjedése irányára merőleges: ez a sugár az elhajlítás gerjesztése helyén a dielectromos közeg részecskéire egyszerre electromos és mágnességi oscillatiót kényszerít; ha ily részecskét gömbalakúnak veszünk fel, akkor az ily electromágnességi állandó oscillatióban tartott gömböcske oly másodrendű fényhullámok gerjesztő forrásának tekinthető, mely maga körül létesíti az (1), a (2) és a (3) alatt taglalt gömbhullám-oscillatiók vectorrendszereit, és pedig a szerint, a mint a gerjesztő oscillatió electromos vagy mágnességi része, vagy egyszerre mind a két összetevője a hatásos.

Így ezen elmélet alapján is az észlelt törvényszerűségek egyszerű, valószínű vagy legalább lehetséges alapon, fesztelen magyarázatot nyernek s a bonyolódottabb jelenségek is a jelzett eredmények alkalmas egybevetésével előállíthatók.

(5) Itt is áll az, hogy az (1), (2), (3) alatt körvonalozott elméleti fejtegetések szerint, az ott nyert megoldási eredmények, a gerjesztő oscillatiókat vivő gömböcske felszínén uralkodó feltételek szigorú tekintetbe vételével megállapítottak és a dielectrikummal telt tér minden helyére nézve pontosan érvényesnek találhatnák; a gerjesztő forrástól számított nagyobb távolságban az eredmények kifejezéseiben a nagyobb értékű tagokkal szemben a kisebb értékű tagok elhanyagolhatók és így fenmaradnak azok az egyszerű vectorrendszerek, melyeket e pontozatokban részletesen megismertettem.

De itt is, az analytikai fejtegetések sajátosságainak behatóbb megvizsgálása azt az egyszerű, nevezetes eredményt állapította meg, hogy a gerjesztő forrástól számított nagyobb távolságban egészen eltűnik a felületi feltételeknek, valamint a forrás alakjának befolyása a gerjesztett állapotra és fenmarad csakis a forrás megadott oscillatiójához illeszkedő egyszerű typusa a differentialegyenletek megoldási rendszerének.

Ezen eredmény physikai értelmezése itt is az, hogy a másodrendű gerjesztő középponttól számított, a hullámhosszúsághoz képest nagy távolságokban — e szerint a fényjelenségek esetében már néhány milliméter távolságban — a keletkező vectorrendszer csakis a gerjesztő középpont egyszerű, típus-szerű oscillatiója által van meghatározva és egészen független attól, hogy mily feltevészerű alakot akarunk tulajdonítani azon részecskének, melyen a gerjesztő oscillatiók végbe mennek és milyeneknek akarjuk az e részecske felszínén fellépő felületi feltételeket tekinteni.

★

Az eddig ismert, az elhajlitott fény polározására vonatkozó, többnyire igen bonyolódott elméletek igen számosak; közülük a jelentékenyebbek G. G. STOKES, Lord RAYLEIGH, H. A. ROWLAND, J. J. THOMSON, H. POINCARÉ, A. SOMMERFELD elméletei, hasonlóképen a HUYGHENS-féle elvnek G. KIRCHHOFF

által kezdeményezett szigorúbb formulázása, s a HERTZ által MAXWELL elmélete alapján létesített egyszerű előállítása az electromos oscillatióknak. Ezen elméletek egyike sem vezet tökéletesebb eredményekre itt megvizsgált jelenségeink előállításánál, sőt közülük a legtöbb sokkal kevesebbre képes, mint a mit az egyszerű gömbhullámrendszerekkel és ezek alkalmas kombinálásával elérhetni.

Miként már fent jeleztem, kifejtett egyszerű képeim alapján sikerült az elhajlított sugárrendszerek valamennyi észleleti sorozatát physikai módon előállítanom, illetve leírnom; néhány észleleti sorozatra nézve a megegyezés igen jó; más sorozatoknál, melyek az átmeneti jelenségekhez tartoznak, kevésbé jó; e megegyezést könnyen tehettem volna pontosabbá, ha kissé bonyolódottabb gömbhullámokat vettem volna fel; ámde közülük csak a legegyszerűbbeket kívántam érvényesíteni és alkalmazni.

Nem akarom állítani, hogy ezzel a szóban forgó jelenségek általános elméletét bírnánk; ilyenrel például akkor rendelkez-nénk, ha pontosan ismernők, miképen függenek az egyes leíró gömbhullámok jellemző paraméterei a beesés szögétől, a beesés azimutjától és az elhajlásnál közreműködő közegek optikai állandóitól.

Hogy a jelenségek igen lényegesen függenek azon közegtől, melyben az elhajlás létesül, már közvetetlenül kiderül a fent III, 3. B) és III, 4. b); továbbá III, 5. b) alatt ismertetett egyszerű tapasztalati tényekből. Ugyanis síkban polározott fény normális beesése esetében, ha üveg és levegő közös határfelületén *levegőbe* történik a fényelhajlás, akkor az isogonális polározás törvénye áll fenn; ellenben, mikor ugyanezen rács esetében a fényelhajlás optikailag véve ugyanazon közegben megy végbe, akkor a circumaxiális polározás törvénye érvényes.

Közelfekvő az a gondolat, hogy fokozatosan megváltoztatva azon közeg törésmutatóját, mely közegben az elhajlított sugarak keletkeznek, a polározássíkok elrendezéseinek oly sorozatát állítsuk elő, melyek a most említett két elrendezési törvény közötti fokozatos átmenetet közvetítik. Ily elrendezések megvizsgálása alkalmas arra, hogy a törésmutatótól való függésüket lehessen

megállapítani és bennük egy általánosabb elmélet támpontjait lehessen nyerni.

Az ilyenmű szélesebb alapú elmélet első kezdete abban az alkalmazásban is látható, melynek segítségével a polárkúp törvénye és az eloltási kúp törvénye meghatározni engedi a circumaxiális polározás symmetria-tengelyét; hasonlóképen összefüggő, általánosabb törvényszerűséget mutat az a jelenségcsoport, mely 0° beesés-azimutnál, de tetszésszerinti beesésszögnél keletkezik. Mindazonáltal még igen távol vagyunk egy általános, összefoglaló és egyszersmind kielégítő elmélettől; s a most részletezett meggondolás értelmében kérdéses, vajjon az ezen munkámban közölt tapasztalati anyag ily elmélet megalkotására elegendő-e.

Ezen megjegyzés különösen azon körülménynél fogva látszik jogosultnak, mert a fényelhajlás bármely esetében az egy időben létesülő töréssel-elhajlított és visszaverődéssel-elhajlított sugárrendszerek polározás-síkjaiknak elrendezése általában véve csak egymástól lényegesen különböző gömbhullámrendszerek által állítható elő.

Érvényes ugyan itt is a beeső sugár egyeneséhez elég közelségben elhaladó elhajlított sugarakra nézve az elhajlító felület mindkét oldalán keletkező rendszerekben, elég közelítéssel, a polározás síkja megtartásának törvénye, és ezzel, legalább szűkebb érvényességi körben, kifejezést nyer az elhajlító felület síkján innen és túl fellépő sugarak polározási állapotának bizonyos folytonossági vonatkozása.

Arra nézve azonban, hogy valamely elméletet kielégítő módon lehessen ellenőrizni, mindezen sugárrendszereket teljeseen, *quantitative* pontosan kell ismernünk; ily ismerettel azonban az e munkámban közlött szám adatok alapján csak a levegőbe visszaverődve-elhajlított rendszerekre nézve rendelkezünk, míg a többi rendszer polározás-viszonyairól jóformán csak qualitativ tapasztalataink vannak.

Kivételt képeznek azok az esetek, mikor az elhajlítás optikailag ugyanazon közegben, normális beesésnél, vagy pedig tetszésszerinti beesés-szögnél, de állandóan 0° beesés-azimutnál létesül; ekkor a törve-elhajlított és a visszaverődve-elhajlított

sugárrendszer polározási állapotát egy és ugyanazon, térbelileg is teljes, egyszerű circumaxiális gömbhullám tünteti elő.

Eddigi elméleti felfogásainkat csak oly módon egyeztet-hetjük meg e szép tapasztalati törvénnyel, ha felvesszük, hogy a szilárd-rugalmasságtani elmélet szerint a beeső fénysugárnak csak translatorius-oscillatorius, vagy csak rotatorius-oscillatorius gerjesztése a hatásos; hasonlóképen, hogy az electromágnességi elméletben a beeső fénysugárnak csak mágnességi-oscillatorius vagy csak electromossági-oscillatorius gerjesztése hatásos.

E következtetés fennáll a teljes circumaxiális polározás valamennyi esetére; de ebből a fényvectornak saját síkjához való helyzetére nézve kényszerítő következtetés nem vonható.

Azon esetekben, mikor normális beesésnél *levegőbe* megtörve- vagy visszaverődve-elhajlított sugárrendszer létesül: erre nézve mindkét esetben fennáll az isogonális polározás törvénye; a részletezett elméleti felfogások e törvénnyel teljesen megegyeztethetők, ha felvesszük, hogy a szilárd-rugalmasságtani elmélet szerint a beeső fénysugárnak úgy translatorius-, mint rotatorius-oscillatorius gerjesztése egyidőben hatásos; épen így, hogy az electromágnességi elmélet szerint a beeső fénysugárnak úgy mágnességi-, mint electromos-oscillatorius gerjesztése hat egyidőben.

De ebből sem vonható kényszerítő erejű következtetés a fényvector irányítására nézve.

Mindkét elméleti felfogás a gömbhullámok ugyanazon rendszereihez vezet; a közlött jelenségek s észleleti adatok e szerint nem alkalmasak e két elmélet között döntést létesíteni.

Azonban arra a sokat vitatott kérdésre nézve: milyen a fényvector helyzete polározás-síkjához képest, a mely kérdésnek fontosságát azonban nem becsülöm túl, arra a meggyőződésre jutottam, hogy ezt az e munkámban tárgyalt jelenségek egy nevezetes csoportja minden kétségen kívül dülőre hozta.

Ugyanis azon elhajlított sugarak rendszerei, melyek 0° beesési azimut mellett, de tetszésszerűen beesés szögénél keletkeznek, mikor fény *levegőből üvegen* *levegőbe* visszaverődéssel leszen elhajlítva, vagy mikor fény *üvegből* *levegőbe* megtöréssel *szenved* elhajlítást, vagy mikor fény optikailag véve majdnem

ugyanazon közegben szenved visszaverődéssel és töréssel egybekötött elhajlítást: nagyszámú és feltétlenül megbízható és mindenkor könnyen ellenőrizhető megfigyeléseim szerint azt a közös sajátságot mutatják, hogy polározás-síkjaik elrendezései — az elhajlított sugarak rendszerei mind e négy sorozatánál — a beesés szögétől függetlenek.

Ebből a tapasztalatból, függetlenül a fény természetére vonatkozó bármily feltevészerű felfogástól, kényszerítő szükségességgel folyik az a következtetés, hogy a gerjesztő fényvector saját polározás-síkjára merőleges. E következtetést épen oly biztosan megállapítottnak tekintem, mint a vectornak sugarához való transversalitását.

*

Hadd járuljon e munka bármily csekély mértékben hozzá, hogy a physikusoknak érdeklődése a fénygerjedés szétterjedésének folyamatai és törvényei tárgyában ezentúl is megmaradjon; könnyű módon fog bármely tapasztalt kutató oly utat találni, melyen haladva, további vizsgálataival a tudomány új, értékes céljai felé közeledhetik.

Hadd fejezzem ki végre még itt azt a kívánságomat, hogy e terjedelmes és fáradságos, de nem gyümölcstelen kutatások e haza tudományos talaján, melyen termettek, folytatásukat is találják.

*

Szabadjon még megjegyeznem, hogy az ez alkalommal bemutatott, egyenként 51 cm átmérőjű, forgathatólag és hajlíthatólag felszerelt hat nagy gömb, melyen festett körök rendszerei tüntetik elő úgy a polározás-síkok észlelt helyzeteinek elrendezését, valamint az elméletileg megszerkeszthető vectorrendszereket, a budapesti KOGUTOWICZ MANÓ ÉS TÁRSA, magyar földrajzi intézet R.-T. gyáraiban készült.

A szükséges körrendszereket MICULA VAZUL, NÁDASDI DÁNIEL, SZÉNFFY ZOLTÁN egyetemi bölcsészethallgatók szíves közreműködésével körzővel és színes krétával nagy gondnal szerkesztettük és rajzoltuk e gömböknek sötét palaszínnel bevont felületére; e görbéket azután FABINYI EDE budapesti címfestő ugyanilyszerű olajfestéssel rögzítette, úgy hogy e vonalrend-

szerek igazi térbeli alakjuk és elrendezésük szerinti képei a fent felmerülő vectorrendszereknek s ezek sajátosságainak szemléltető módon való tanulmányozására igen alkalmasak. Közelebb-ről pedig:

az *első* gömbön elterül a gömb forgástengelye körüli *circumaxiális párhuzamos körök rendszere*;

a *második* gömbön elterül a gömb forgástengelye körüli *circumaxiális párhuzamos körök rendszere* és az *elhajlítási síkokat mutató oly meridiánok rendszere*, melyek közös tengelye a *beeső sugár iránya*, mely a legnagyobb párhuzamos körben fekszik;

a *harmadik* gömbön elterül az *isogonális elrendezést mutató körök rendszere* és az *elhajlítási síkokat érzéktő oly meridiánok rendszere*, melyek közös tengelye a *beeső sugár iránya*; e sugár az előbbi rendszer legnagyobb körében fekszik; ez az utóbbi kör merőleges a gömb forgási tengelyére;

a *negyedik* gömbön elterül az a vectorrendszer, mely egy kicsiny merev gömböcske rotatorius oscillatioja vagy ennek tengelyéhez párhuzamos mágnességi oscillatioja által létesül: ugyanis a *gömb forgástengelyét tartalmazó meridiánok* s az e *tengelyre merőleges párhuzamos körök rendszere*; a beeső gerjedés továbbterjedésének iránya szintén merőleges e tengelyre;

az *ötödik* gömbön elterül az a vectorrendszer, mely egy kicsiny, merev gömböcske translatorius oscillatioja vagy ennek irányával párhuzamos electromos oscillatioja által létesül: ugyanis a *gömb forgástengelyére merőleges átmérőt tartalmazó meridiánok* és az ezen átmérőre *merőleges párhuzamos körök rendszerét*; a beeső gerjesztés továbbterjedésének iránya merőleges az említett átmérőre s a legnagyobb párhuzamos körben fekszik;

a *hatodik* gömbön elterül az *isogonális elrendezést mutató azon körök két rendszere*, mely létesül, ha egy kicsiny merev gömböcske egy időben végez translatorius és rotatorius oscillatiót, vagy ily gömböcske egy időben electromos és mágnességi gerjesztő oscillatióval bír; e rendszerek a negyedik és az ötödik gömbön elterülő rendszerek összegezésének eredményei.

A bemutatott rajzok elseje a szövegben említett ZEISS-féle, üvegből készült félgömböt s a használt üvegrácsoknak reá ragasztása módjait mutatja; a második a sík hullám gerjesztette translatorius és rotatorius rezgést érzékíti; a harmadik a H. SIEDENTOPF-féle, a szövegben jelzett qualitativ megfigyelések ábráit tizenötszörös nagyításban mutatja, négy phásisban.

E rajzokat is a fentemlített három fiatal segéderő készítette; ezen fáradozásukért e helyen is kifejezem köszönetemet.

Végezetül még egy mintát mutattam be, mely a gömböcskén fellépő electromos vagy mágnességi oscillatio érzékitésére alkalmas.

★

Szabadjon e helyen még csak azt jeleznem, hogy a fenti közlemény kéziratának 1906. május hó 14.-én részéről történt benyújtása után, az 1906. év nyári hónapjaiban közvetlen qualitativ és quantitativ kísérleteket végeztem és végeztettem az igen kicsiny lebegő részecskék létesítette fényelhajlás polározása tárgyában. Ugyanis, ha concentrált napfény esik gyertyalángra vagy ennek füstjére, az ebben lebegő igen kicsiny szénrészecskék minden irányban elhajlitják a rájuk eső fényt, mert másodrendű fénygerjedés középpontjává válnak. A megfigyelések minden kétséget kizáró módon kimutatták, hogy itt is a teljes, térbeli circumaxiális polározás törvénye, és pedig kielégítő pontossággal áll fenn.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 május 14.-én tartott üléséből.)

A PALEARCTIKUS FAUNATERÜLET TINGITIDÁI.

HORVÁTH GÉZA r. tagtól.

A Tingitidák a Hemipterák rovarrendjének egyik meglehetősen népes családját alkotják, melyet négyizülekű csápok, kétizülekű tarsusok és többnyire egynemű szárnyfedők jellemeznek. Első monographiájuk 1844-ben, tehát 62 évvel ezelőtt jelent meg a cseh tudományos akadémia kiadványaiban Dr. FIEBER XAV. FERENCZ német entomologus tollából, a ki munkájában (Entomologische Monographien) 61 európai és 17 exotikus faj leírását és többnyire rajzát is közölte.

Az azóta felfedezett Tingitidák száma évről-évre mindinkább szaporodott, úgy hogy a PUTON-féle Hemiptera-katalogusnak 1899-ben megjelent negyedik kiadása¹ csupán a palearktikus faunaterületről már 165 fajt sorol fel.

Ez oknál fogva érdemesnek tartottam e rovaresalád palearktikus fajait tüzetesen tanulmányozni és szigorú kritikával rendszeresen feldolgozni. Hogy ezt sikeresen megtehessem, szükséges volt az eddig ismeretes fajokat részint saját magamnak összegyűjteni, részint a meglevő bel- és külföldi gyűjteményekben megvizsgálni.

A leggazdagabb palearktikus Tingitida-gyűjteménye ez idő szerint a Magyar Nemzeti Múzeumnak van. Ezt bátran és nem minden büszkeség nélkül állíthatom, mert Akadémiánk matematikai és természettudományi állandó bizottságának anyagi támogatása folytán, a melyért ezuttal is őszinte köszönetet

¹ Dr. A. PUTON : Catalogue des Hémiptères de la Faune paléarctique. 4^e éd. Caen. 1899.

mondok, alkalmam volt Európának majdnem valamennyi nyilvános és nagyobb magángyűjteményével megismerkedni s azoknak Tingitida-anyagát áttanulmányozni. Így megvizsgáltam a bécsi, brüsszeli, florenczi, frankfurti, genfi, genuai, helsingforsi, londoni, nápolyi, párisi és szerajevói muzeumok anyagát, valamint A. L. MONTANDON (Bukarest), Dr. A. PUTON (Remiremont), O. M. REUTER és J. SAHLBERG (Helsingfors) barátaim gyűjteményeit. Érdekes tanulmányi anyagot kaptam továbbá Dr. A. CHOBAUT (Avignon), A. J. F. FOKKER (Zierikzee), J. M. DE LA FUENTE (Pozuelo de Calatrava), J. GULDE (Frankfurt), Dr. HENSCH ANDOR (Krapina), B. E. JAKOWLEFF (Eupatoria), D. JOAKIMOFF (Szófia), M. ROYER (Páris), A. THÉRY (Philippeville) és másoktól.

Ily gazdag anyagra támaszkodva, abban a szerencsés helyzetben voltam, hogy majdnem valamennyi eddig leírt palearktikus Tingitida-fajt színről-szinre láthattam, sőt több új fajt és fajváltozatot is felfedezhettem.

Dolgozatomból, mely egész terjedelmében egy színes táblával a Magyar Nemzeti Múzeum természetrajzi osztályainak folyóiratában (Annales historico-naturales Musei Nationalis Hungarici) latin nyelven fog megjelenni, kitűnik, hogy ez az érdekes rovarcsalád a palearktikus faunaterületen 21 nembe sorozott 213 fajjal van képviselve.

A nemek és fajok felismerését megkönnyítendő, ismertető bélyegeiket synoptikus táblázatokban állítottam össze. Kiváló gondom volt arra, hogy a gyakran meglehetősen hasonló és változékony rokon fajokat egymástól lehetőleg élesen megkülönböztessem és határvonalait szabatosan megállapítsam. A fajbeli összetartozandóság vagy különbözőség felismerését e rovaroknál nemcsak a szín- és alakbeli változékonyság nehezíti meg, hanem némelykor a dimorphismus, jelesen a pterygo-dimorphismus tünete is. A dimorphismusnak ez a kategóriája, mint tudjuk, abban nyilvánul, hogy valamely faj egyéneinek egy része tökéletesen kifejlett repülőszervekkel bír, míg másik részénél a repülőszervek többé-kevésbé el vannak satnyulva. A szárnyfedőknek és szárnyaknak fejlettsége vagy elsatnyulása aztán rendszeren a mellkas alakjára is átidomító hatást gyakorol. Néhány Tingitida-faj (péld. *Acalypta sejuncta*, *nigrina*,

marginata és *parvula*, *Dictyonota Henschi*) erősebben kifejlődött ivari dimorphismust is mutat, a mit szintén figyelembe kell venni.

Valamennyi Tingitida növényi nedvekkel él; az egyes fajok táplálkozás dolgában mindig bizonyos meghatározott növényekre vannak utalva. Azért a tápláló növényeket, a mennyire azokat vagy magam megfigyeltem, vagy a szakirodalomban elég hiteleseknek találtam, minden fajnál feljegyeztem.

A mi a tápláló növények hiteles megállapítását illeti, a Tingitidáknál ép úgy mint a többi növényevő rovarnál is arra kell ügyelnünk, hogy vajjon az illető növény csakugyan táplálékul szolgál-e a rajta talált rovarnak, vagy pedig csak időleges vagy esetleges tartózkodási helyül? Mert ez az utóbbi eset elég gyakran előfordul, jelesen a Tingitidáknál is. Nem ritkán találhatunk ugyanis egyes példányokat oly növényeken, a melyek nem nyújtanak nekik táplálékot, s a melyekre, rendes tápláló növényükről valamely szélroham vagy valami más véletlenség folytán elkerülvén, csak ideiglenesen telepedtek le. Sőt Dél-Európában ősszel és télen rendszeren tapasztalhatjuk, hogy némely faj, miután tápláló növénye elszáradt, tömegesen át-vándorol tülevelű fákra és más örökzöld növényekre. Így péld. felemlíthetem, hogy Dél-Franciaországban tél derekán nagy mennyiségben találtam a *Monosteira unicastata* fajt a tengeri fenyő (*Pinus maritima*) és a seprős zanót (*Spartium scoparium*), a *Serenthia atricapilla* fajt pedig az amerikai *Sequoia virginiana* ágain és levelein.

Az alábbiakban közlöm a palearktikus Tingitidák rendszeres névjegyzékét, mely egyszersmind a dolgozatomban követett rendszertani beosztás képét adja. E jegyzékben a Magyar Birodalom területén — beleértve Dalmáciát, Boszniát és Hercegovinát is — eddig talált fajokat és fajváltozatokat csillaggal * jelöltem meg, a miből kitűnik, hogy területünkön 76 Tingitida-faj fordul elő, vagyis az összes palearktikus fajoknak valamivel több mint egy harmada.

Subfam. PIESMINAE.

Piesma LEP. SERV.

- *1. capitata WOLFF.
- *2. maculata LAP.
*var. viridis JAK.
- *3. quadrata FIEB.
*var. dilatata JAK.
- *4. variabilis FIEB.
- *5. Salsolæ BECK.
- *6. Silenes HORV.
7. convexicollis JAK.
- 8. pupula PUT.
- 9. tenella HORV.
- 10. Kolenatii FIEB.
- 11. rotundata HORV.
var. pygmæa HORV.
- *12. Kochiæ BECK.

- 3. maroccana PUT.
- 4. Falléni FIEB.
- *5. orientalis HORV.
var. miridita HORV.
*var. suspecta HORV.
- 6. libanotica HORV.
- *7. verna FALL.
*var. latipennis HORV.
- 8. sinuata FIEB.
- 9. eximia HORV.
- 10. serena HORV.
- 11. dispar HORV.
- 12. perithrix PUT.
var. cognata HORV.
- 13. sororecula HORV.
- 14. pilifera REUT.
var. humilis HORV.
var. diminuta HORV.
- 15. ciliata FIEB.
- 16. parvula FERR.

Subfam. TINGITINAE.

Div. *Cantacaderaria*.*Cantacader* AM. SERV.

- 1. laticollis HORV.
- 2. quadricornis LEP. SERV.
var. nubilus HORV.
- 3. angulipennis HORV.

Div. *Tingitaria*.*Campylosteira* FIEB.

- *1. bosnica HORV.
*var. diluta HORV.
- 2. pilicornis HORV.

Acalypta WESTW.

- 1. samara PUT.
- *2. Musci SCHRK.
*var. ditata PUT.
- 3. uniseriata PUT.
- 4. nigrinervis STÅL.
- 5. brunnea GERM.
- 6. suturalis PUT.
- 7. finitima PUT.
- *8. carinata PANZ.
*var. angustula HORV.
- 9. carpathica HORV.
- 10. sordida JAK.
- 11. sibirica JAK.
- *12. platycheila FIEB.

- 13. *sejuncta* HORV.
- 14. *acutangula* JAK.
- 15. *elinoides* JAK.
- *16. *nigrina* FALL.
- *17. *marginata* WOLFF.
- 18. *elegans* HORV.
- *19. *gracilis* FIEB.
- *20. *hellenica* REUT.
- *21. *parvula* FALL.
- 22. *subtilis* REUT.
- 23. *paradoxa* JAK.

Biskria PUT.

- 1. *gracilicornis* PUT.
- 2. *sareptana* JAK.
var. *adelpa* HORV.
- 3. *lepida* HORV.

Dictyonota CURT.Subgen. *Dictyonota* s. str.

- 1. *albipennis* BAER.
- 2. *pulchella* COSTA
- 3. *marmorea* BAER.
- *4. *strichnocera* FIEB.
- 5. *fuliginosa* COSTA.

Subgen. *Atcletha* KIRK.

- 6. *lugubris* FIEB.
- 7. *æthiops* HORV.
- *8. *tricornis* SCHRK.
var. *eicur* HORV.
- 9. *aridula* JAK.

Subgen. *Kalama* PUT.

- 10. *Reuteri* HORV.
- 11. *Théryi* MONTD.

- 12. *Putonii* STÅL.
- 13. *brevicornis* FERR.
- 14. *Coquereli* PUT.

Subgen. *Elina* FERR.

- 15. *iberica* HORV.
- 16. *Sicardi* PUT.
- 17. *Fuentei* PUT.
- *18. *Henschi* PUT.
- 19. *Beckeri* JAK.
- 20. *Marqueti* PUT.

Derephysia SPIN.

- 1. *sinuatocollis* PUT.
- 2. *brevicornis* REUT.
- *3. *foliacea* FALL.
*var. *Birói* HORV.
- 4. *lugens* HORV.
- 5. *rectinervis* PUT.
- 6. *nigricosta* HORV.
- *7. *cristata* PANZ.

Hyalochiton HORV.

- *1. *Komaroffi* JAK.
- *2. *syrmiensis* HORV.
- 3. *colpochilus* HORV.
var. *consimilis* HORV.
- 4. *multiseriatus* REUT.
- 5. *strumosus* HORV.

Galeatus CURT.

- 1. *inermis* JAK.
- 2. *brevispinus* JAK.
- *3. *sinuatus* H.-SCH.

- 4. *serophicus* SAUND.
- 5. *cellularis* JAK.
- *6. *angusticollis* REUT.
- *7. *spinifrons* FALL.
- *8. *maculatus* H.-SCH.
- 9. *major* PUT.
- *10. *decorus* JAK.

Aconchus HORV.

- 1. *urbanus* HORV.

Stephanitis STÅL.

- 1. *Rhododendri* HORV.
- *2. *Pyræ* FABR.
- 3. *Azaleæ* HORV.
- 4. *chlorophana* FIEB.
- 5. *Oberti* KOI.

Elasmotropis STÅL.

- 1. *selecta* HORV.
- *2. *testacea* H.-SCH.
var. *vicina* HORV.
*var. *platydera* HORV.
var. *egena* PUT.
- 3. *distans* JAK.

Lasiacantha STÅL.

- 1. *Hedenborgii* STÅL.
- *2. *gracilis* H.-SCH.
- *3. *capucina* GERM.
- 4. *histricala* PUT.

Tingis FABR.

Subgen. *Lasiotropis* STÅL.

- *1. *ragusana* FIEB.
- 2. *trichonota* PUT.
- 3. *hellenica* PUT.
- *4. *Ajugarum* FREY.
- *5. *ciliaris* PUT.
- *6. *reticulata* H.-SCH.

Subgen. *Tingis* s. str.

- *7. *auriculata* COSTA
*var. *Dauci* HORV.
- 8. *sinuaticollis* JAK.
- *9. *ampliata* H.-SCH.
- 10. *deserticola* HORV.
- 11. *similis* DOUGL. SCOTT.
- *12. *Cardui* L.
var. *cognata* FIEB.
var. *maderensis* REUT.
- *13. *angustata* H.-SCH.
var. *diminuta* HORV.
- 14. *leptochila* HORV.
- *15. *crispata* H.-SCH.
- 16. *lætabilis* HORV.
- 17. *lanigera* PUT.
- 18. *denudata* HORV.
- 19. *Fuentei* HORV.
- *20. *rotundicollis* JAK.
- *21. *grisea* GERM.
- 22. *strictula* PUT.
- 23. *stupidula* HORV.
- 24. *demissa* HORV.
- 25. *brevicornis* HORV.
- 26. *suavis* HORV.
- 27. *elongata* FIEB.

Subgen. *Tropidocheila* FIEB.

- 28. *valida* PUT.
var. *biseriata* HORV.
var. *discessa* HORV.
- *29. *pilosa* HUMM.
var. *amplicosta* MONTD.
var. *antennalis* PUT.
- 30. *granadensis* HORV.
- *31. *Kiesenwetteri* M. R.
- 32. *pauperata* PUT.
- 33. *Reuteri* HORV.
- 34. *cappadocica* HORV.
- 35. *pusilla* JAK.
- *36. *caucasica* JAK.
- 37. *juvenca* HORV.
- 38. *torpida* HORV.
- *39. *geniculata* FIEB.
- *40. *griseola* PUT.
var. *miscella* HORV.
- 41. *insularis* HORV.
- *42. *maculata* H.-SCH.
- 43. *litrata* FIEB.
- 44. *helvina* JAK.

Catoplatus SPIN.

- *1. *Fabricii* STÅL.
- 2. *dilatatus* JAK.
- 3. *crassipes* FIEB.
- 4. *anticus* REUT.
var. *syriacus* HORV.
- *5. *carthusianus* GOEZE.
*var. *albidus* H.-SCH.
- *6. *nigriceps* HORV.
- 7. *Olivieri* PUT.
- *8. *flavipes* HORV.

- 9. *hilaris* HORV.
- 10. *fulvicornis* JAK.
- 11. *citrinus* HORV.
- 12. *distinctus* MONTD.

Copium THUNB.

- *1. *cornutum* THUNB.
- *2. *Teuerii* HOST.
var. *intermedium* REY.
var. *brevicorne* JAK.
- 3. *adumbratum* HORV.

Physatocheila FIEB.

- 1. *delicatula* HORV.
- 2. *municeps* HORV.
- *3. *dumetorum* H.-SCH.
- *4. *confinis* HORV.
- *5. *quadrимaculata* WOLFF.
- 6. *distinguenda* JAK.

Oncochila STÅL

- *1. *simplex* H.-SCH.
- *2. *scapularis* FIEB.

Monanthia LEP. SERV.

- 1. *Montandoni* HORV.
var. *rivalis* HORV.
- 2. *ruficeps* HORV.
- 3. *Sahlbergi* HORV.
- 4. *subdola* HORV.
- *5. *platyoma* FIEB.
- *6. *Putoni* MONTD.
*var. *pulla* HORV.

- *7. *nassata* PUT.
- *8. *Symphyti* VALL.
- 9. *indigena* WOLL.
- *10. *Humuli* FABR.
- *11. *Lupuli* FIEB.
- *12. *Echii* SCHRK.
- *13. *rotundata* H.-SCH.

Monosteira COSTA.

Subgen. *Monosteira* s. str.

- 1. *lobulifera* REUT.
- *2. *unicostata* M. R.
var. *buccata* HORV.
- 3. *discoidalis* JAK.
- 4. *inermis* HORV.
- 5. *minutula* MONTD.
- 6. *capitata* JAK.

Subgen. *Phaenotropis* HORV.

- 7. *parvula* SIGN.
- 8. *Cleopatra* HORV.

Div. *Serenthiaria*.

Serenthia SPIN.

- *1. *atricapilla* SPIN.
var. *mendax* HORV.
var. *pallens* HORV.
- 2. *tropidoptera* FLOR.
- 3. *globiceps* HORV.
- *4. *ruficornis* GERM.
- 5. *dubia* HORV.
var. *imbecilla* HORV.
- 6. *turanica* HORV.
- 7. *umbrosa* HORV.
- 8. *nigra* FIEB.
var. *collaris* HORV.
- *9. *confusa* PUT.
*var. *antennata* HORV.
*var. *thoracica* HORV.
*var. *fallax* HORV.
- 10. *melanoscelis* HORV.
- *11. *læta* FALL.
var. *apicicornis* HORV.
var. *femoralis* THOMS.
var. *Poppii* HORV.
- 12. *blandula* HORV.
- *13. *minuta* HORV.

DÉLAMERIKAI HALAKBAN ÉLŐSKÖDŐ TREMATODÁK.

Tizenegy szövegközi rajzzal.

DADAY JENŐ 1. tagtól.

A délamerikai halakban élősködő *Trematodákra* vonatkozólag, tudtommal, eddig még csupán DIESING C. M. nyújtott adatokat, a ki 1836. és 1840. évi dolgozataiban (4.5) a NATTERER I.-től 1824—1832-ben a különböző halfajokból gyűjtött fajokat ismertette, a melyek mindannyian a bécsi Hofmuseum állattárának birtokában vannak.

Prof. ANISITS J. D. Asuncionból az 1903. év folyamán sok egyéb vizsgálati anyag között paraguayi *Colossoma brachypoma* nevű hal beléből élősködőket is küldött, a melyek között *Trematodákat* is találtam. Mikor a fajok meghatározásához fogtam, azonnal beláttam, hogy munkám csak úgy fog teljesen kielégítő eredményre vezetni, ha átvizsgálom, illetőleg összehasonlítom a rendelkezésemre álló paraguayi példányokat a DIESING C. M.-től leirt, NATTERER I.-től gyűjtött s a bécsi Hofmuseum állattárában őrzött fajok példányaival. E célból a nevezett Muzeum igazgatóságához folyamodtam azzal a kérelemmel, hogy bocsássa rendelkezésemre a DIESING C. M.-féle idevonatkozó fajokat és példányokat. Kérelmemnek meg is volt a kívánt eredménye, a mennyiben Dr. STEINDACHNER FR. igazgató udvari tanácsos és Prof. E. v. MARENZELLER a legnagyobb készséggel bocsájtották rendelkezésemre az óhajtott anyagot, miért is kedves kötelességemnek ismerem, nekik e helyen hálás köszönetemet nyilvánítani.

Tanulmányaim során nemcsak arról győződtem meg, hogy a paraguayi példányok legnagyobb része azonos a DIESING C.

M.-tól leirt egyik fajjal (*Chiorchis oxycephalus*, DIES.), hanem arról is, hogy a DIESING C. M.-féle fajok a mai követelményeknek megfelelő új leírásokra szorultak. Ez irányban folytatott tanulmányaimnak eredményeit nyújtja e kis dolgozat, melynek összeállításánál a fajokat és példányokat legnagyobbbrészt in toto, kisérszt metszetsorozatokban vizsgáltam, természetesen csak abban az esetben, ha az illető fajból több példány állott rendelkezésemre.

Fam. DISTOMIDAE.

Distomum quadrangulatum n. sp.

Fig. 1.

Teste lapos, némileg megnyult, keskeny tojásforma, elől meglehetősen hegyesen kerekített, két oldala tompán íves, közepén legszélesebb, hátulsó végén elkeskenyedik. A test hátulsó végén két oldalt egy-egy majdnem derékszögű csúcs különült el, míg a közepén íves bemélyedéstől elválasztva két, az előbbieknél erősebb, hegyes, pyramisforma csúcs emelkedik ki (Fig. 1.), melyek a fajnak legszembeütőbb bélyegét alkotják. A test egész hossza 1·7 mm., legnagyobb transversalis átmérője 0·65 mm., transversalis átmérője az oldalesúcsoknál 0·45 mm., a két végcsúcs csúcsainak egymástól való távolsága 0·2 mm., a végcsúcsok csúcsának távolsága az oldalesúcsoktól 0·15 mm.

A *hasi szívókorong* feltűnő kicsiny, a szájnyílástól 0·52 mm. távolságra fekszik a porus genitalis mögött, transversalis átmérője 0·13 mm., sagittalis átmérője 0·05 mm.

A *szájkorong* erősen fejlett, némileg rövid tonnaalakú, két oldala meglehetősen erősen, hátulsó vége tompán kerekített, csaknem egyenesre metszett (Fig. 1.), hossza 0·13 mm., legnagyobb transversalis átmérője 0·14 mm., izomfalazatának átmérője 0·05 mm., belső ürege homokórához hasonlít.

A *testet borító kutikula* egészen síma, igen vékony, átmérője 0·002 mm. A bőrizomtömlő jól fejlett. A test parenchymájá tömött hálózatot alkot.

A *pharynx* önállóan nem különült el. Az oesophagus hátrafelé fokozatosan szélesedik, bulbust nem alkot, egyenes

irányban fut hátrafelé, hossza 0·22 mm., falazatában a gyűrűs izomrostok igen gyengén fejlettek; átmérője átlag 0·05 mm. (Fig. 1.)

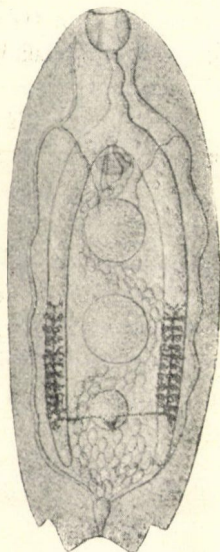
A *gyomor* villásan két ágra tagolódott; az ágak egyenesen hátrafelé húzódnak, szalagforma, mindenütt egyenlő széles tömlőket alkotnak, végső zárt csúcsuk a test hátulsó végétől 0·3 mm. távolságra fekszik, egymástól való távolságuk átlag 0·02 mm., szélességük 0·05 mm., a test oldalfalaitól távol s a hátoldalhoz közeledetten fekszenek. (Fig. 1.)

A *kiválasztó edénytörzsek*: a test oldal-falai s a gyomorágak között húzódnak végig egészen a szájkorongig, a gyomorágak kiágazásánál egy-egy mellékágot bocsátanak, a mely befelé, a gyomorágak közti területre fut a hasoldalon. A *kiürítő hólyag* a test középvonalában fekszik a csirafészek mögött és kiürítő nyílása a test két végsúcsát elválasztó öböl közepén nyílik. (Fig. 1.)

Az *ivarnyílás* a hasi szívókorong előtt fekszik, atrium genitaleval közlekedik, észrevehetően fejlett izomkorongja nincs, épen a gyomorágak kiindulási pontja alatt, a szájnyílástól 0·46 mm. távolságra van.

A *két here* a gyomorágaktól körülzárt területen, a hasoldalhoz közeledetten fekszik egymás végtében, a mellső hasi szívókorongtól 0·06 mm., a hátulsó a csirafészekről 0·1 mm. s a két here egymástól 0·06 mm. távolságra. Mindkét here egészen gömbforma, egyforma nagy, átmérőjük 0·2 mm., sima fölületűek. A vas deferens csupán vesicula seminalis externát alkot s az atrium genitaleba önállóan nyílik az uterus nyílása mellett. (Fig. 1.)

A *csirafészek* a test középvonalában fekszik kissé a hátoldalhoz közeledetten, a gyomorágaktól körülzárt területen (Fig. 1.), a test hátulsó végétől 0·14 mm. távolságra; egészen gömbforma, átmérője 0·05 mm. A *petevezeték* hátra- és lefelé fut. Az *ootyp* a csirafészek mögött és alatt fekszik, tömlőforma.



1. ábra.

A *Laurer*-féle csatorna nyílása a csirafészek fölött van. Az *uterus* eleinte hátrafelé megy s a kiürítő hólyag előtt több hurkot alkot, majd előre fordul s a hasoldalon hurkolódik föl többszörösen, majd a herék fölé kerül s úgy fut az atrium genitaléhoz.

A *székmirigyek* a hátoldalon, a gyomorágak fölött s a test két oldalfalától távol fekszenek, mellső végükkel meghaladják a hátulsó herét, hátulsó végük nem terjed a csirafészken túl, egész hosszuk 0.45 mm. Az egyes székmirigyek faalakúlag elágazottak, összekötő harántvezetékük a csirafészek mögött egyesül. (Fig. 1.)

A *peték* tojásformák, kupakosak, coconjuk sima, hosszúságuk 0.08 mm., átmérőjük 0.05 mm.

E fajt, mely teste hátulsó végének sajátosságos szerkezete alapján a halakban élősködő többiektől könnyen megkülönböztethető, a bécsi Hofmuseum állattárának 988. számú üvegében találtam *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt, illetőleg a *Chiorchis oxycephalus* (DIES.) példányai között, de csupán egy példányban. Gazdaállatja a *Salmo Paru* = *Myletes bidens*, a melyből NATTERER gyűjtötte 1824-ben Cuyaba termőhelylyel.

Fam. PARAMPHISTOMIDAE.

Subfam. CLADORCHINAE.

A FISCHODER F.-től (6.) megkülönböztetett eme alcsaládnak részletesen leirt fajai a vízi madarakban élősködő *Amphistomum lunatum* Dies. = *Chiorchis lunatus* (DIES.) kivételével, még eddig csupán emlősökből voltak ismeretesek, mert a korábbi hézagos adatokból nem lehetett megállapítani, hogy a halakból ismertetett *Paramphistomidák* melyik alcsaládnak a képviselői.

Diplodiscus DIES. emend. BRAUN M.

Diplodiscus BRAUN M., Bronn's Klassen und Ord. des Thierreichs, 4. Bd. p. 906.

E genus **DIESING** C. M. 1836-ban állította fel és jellemezte röviden, majd 1850-ben ismételtén körvonalozta jellemeit, de mindkét jellemzés meglehetősen hibás és hiányos, minek következtében **BRAUN** M. szükségesnek látta új és pontosabb jellemzését nyújtani. A rendelkezésemre állott fajok s az irodalmi adatok alapján én a genus jellemeit a következőkben foglalom össze:

A test egyenes vagy a hasoldal felé gyengén görbült, legtöbbször kúpforma, majdnem hengeres. A hasoldal rendesen egyenes, a hátoldal sokszor íves, a jobb- és baloldal tompán kerekített. A szívókorong a test hátulsó végén és nyílásával legtöbbször a hasoldalon fekszik. A garat izomfalazatában egy vagy két sphincter van. Az oesophagus a gyomorágak előtt jól fejlett, izmos falazatú bulbusban végződik. A gyomorágak egyenes lefutásúak. Az ivarnyílás majd korongos, majd korong nélküli. Egy vagy két gömbforma, ágatlan here fejlődött ki, utóbbi esetben egymás mögött fekszenek. A cirruszacskó vagy hiányzik, vagy jól fejlett. A székmirigyek faalakulag elágazottak, a gyomorágak külső fala mentén futnak; a székfollikulusok csekélyszámúak, gömbformák. A csirafészek rendesen az egyik gyomorág mellé húzódott. A kiürítő nyílás a hátoldalon, rendesen a szívókorong közepe táján fekszik.

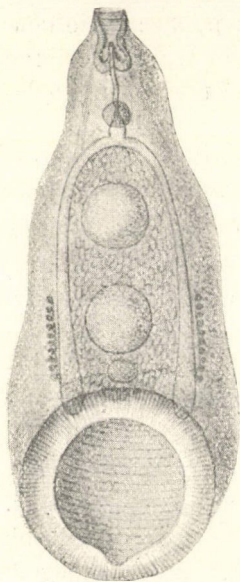
A genusnak még eddig csupán Amphibiák végbelében élősködő fajai voltak ismeretesek, nekem a halakban élősködő következő két fajt sikerült találnom. Különben e genus mintegy átmenetet alkot a *Paramphistominae* és *Cladorchinae* alcsaládok között, a mennyiben pharynxának szerkezetével az utóbbi, heréinek szerkezetével pedig az előbbi alcsaládok genusaival egyezik meg.

Diplodiscus Marenzelleri n. sp.

Fig. 2.

E fajnak példányait DIESING C. M. az *Amphistoma oxycephalum* DEIS. képviselőinek tekintette, legalább erre kell következtetnem abból a körülményből, hogy én azokat a bécsi Hofmuseum állattárának 980. és 984. számú üvegeiben ilyen név

alatt találtam meg a *Chiorchis* (AMPHISTOMUM) *oxycephalus* (DIES.) fajnak társaságában. A 980. számú üvegben több, részint ivarérett, illetőleg sok petét tartalmazó, részint fiatalabb példányt találtam, melyeknek gazdája gyanánt «*Salmo Nr. 111*» szerepel. A 984. számú üveg csupán 3 fiatal példányt tartalmazott a *Chiorchis* (AMPHISTOMUM) *oxycephalus* (DIES.) társaságában, melyeknek gazdáját a «*Salmo Nr. 80*» felírás jelzi.



2. ábra.

A test alakja hát- vagy hasoldalról, akár pedig jobb- vagy baloldaltól nézve kúpra emlékeztet, a melynek széles alapját a szívókorong, meglehetős hegyes csúcsát pedig a szájniylás alkotja. (Fig. 2.) A jobb- és baloldali testszegély meglehetős tompán kerekített, minek következtében a test harántmetszeti képe többé-kevésbé körhöz, vagy tompacsúcsu ellipszishez hasonlít; de a jobb- és baloldali testszegély nem egyenes vonalban fut, hanem a test mellső felében gyengén íves, a hátulsó here alatt kissé mélyedő s aztán a csirafészek táján ívelten fut a szívókorongig. (Fig. 2.) A has- és hátoldal lejtősen halad a szívókorongtól a szájniylásig, de a hasoldal az ivarnyílásnál kúpforma halmot alkot. A fiatal példányok hátoldala kisebb-nagyobb mértékben íves, míg hasoldala majd csaknem egyenes, majd pedig gyengén öblös, minek következtében az egész test a hasoldal felé kissé alágörbültnek látszik. Az idős példányok testének hossza 4—6 mm., legnagyobb laterális átmérője 2.26

mm.

mm., legkisebb lateralis átmérője 0·25 mm., legnagyobb dorso-ventralis átmérője 2·28 mm., a fiatal példányok testének hossza 1·8—3·2 mm., legnagyobb transversalis átmérője a szívókorongnál 0·7—1·2 mm., legnagyobb dorsoventralis átmérője 0·6—1 mm. között ingadozik.

A *szívókorong* a test hátulso végén fekszik, de kissé ferdén, úgy, hogy a hasoldalon valamivel előbbre huzódott, mint a hátoldalon, a mi az állat oldalfekvésü helyzetében tűnik fel legjobban, körülete szabályos kör; falazatának körvonalai a hátoldalon jobban elkülönülnek, mint a hasoldalon; átmérője 1·2—2 mm. között ingadozik; falazatának átmérője 0·17—0·28 mm., nyílásának átmérője 0·7—2·5 mm. A szívókorong mélysége aránylag csekély és pontosan megállapítanom nem sikerült, mert feneke majdnem állandóan ívesen kiemelkedett, de jellemvonása az, hogy a fenék fölületén harántirányban futó kiemelkedések, illetőleg kerekített tarajok futnak. A szívókorong nyílása majdnem egyenesen hátrafelé tekint, körülete szabály szerint egészen körforma, néha azonban hátul kissé bemetszett is. (Fig. 2.)

A *test kutikulaburka* egészen sima és aránylag igen vékony, a mennyiben átmérője körülbelől 0·006—0·008 mm. A bőrízomtömlő rostjai közül legvékonyabbak a gyűrűrostok, legerősebbek a hosszirányúak, de jól fejlettek a diagonalisak is.

A *szájnyílás* a test mellső végén fekszik, izomkúpja nem különült el, majdnem körforma, átmérője 0·05—0·1 mm.; szegélye sima, rajta papillák nincsenek.

A *pharynx* közvetlenül a szájnyílásnál kezdődik, fölülről vagy alulról nézve körteforma tömlőhöz hasonlít, közepe táján kissé befűződött, mellső felében oldalai csaknem egyenesek, hátulso felében ellenben feltűnően ívesek, hátulso vége közepén erősen bemetszett, minek következtében a garattáskákat magába záró két nagy karélyra tagolódott. Oldalról nézve a pharynx piszkotához hasonlít, mellső fele azonban oldalain gyengébben kerekített és rövidebb a hátulsónál. A pharynx izomfalazatában két sphincter különült el, melyek közül egyik, még pedig az erősebb, a szájvégen ül, a gyengébb másik ellenben épen a közepén, az oesophagus betorkolása mögött. Az izomfalazat átlag vékony, 0·05—0·07 mm. átmérőjű, külső szegélyén meridionalis rostok

rétege fut; belső szegélyén gyűrűs. illetőleg æquatorialis rostok sorakoznak, a melyektől kifelé meridionalis rostok pamata húzódik. Az izomfalazat főtömegét a radialis rostok alkotják, a melyek legerősebbek a két garattáska között. A pharyngealistáskák erőteljesen fejlettek, már külsőleg is könnyen felismerhetők, megnyult tömlőhöz hasonlítanak és csaknem egyenesen hátrafelé irányulnak. Az egész garat hossza 0·5—0·8 mm., legnagyobb transversalis átmérője 0·41—0·6 mm., transversalis átmérője a befűződésnél 0·28—0·3 mm., a garattáskák hossza 0·25—0·3 mm. A pharynx mozgatására hosszirányú parenchymaizmok fejlettek ki.

Az *oesophagus* a garat hasoldalán, kevésbé a befűződés előtt ered; eleinte a hasoldal felé és ívesen hátrafelé fut, majd fölfelé s némileg S-forma útát írva le megy a gyomorágakhoz, a melyeknek közelében vastagfalú, hagymaforma bulbust alkot. A bulbus alapján számos mirigysejtet tudtam megkülönböztetni. Az *oesophagus* hossza egyenes vonalban mérve 0·7 mm., a bulbus legnagyobb átmérője 0·22 mm. A bulbus hátulsó végén levő mirigyek mindannyian némileg körteforma tömlőhöz hasonlítanak, hosszúságuk 0·07—0·014 mm. között ingadozik.

A *gyomorágak* a test oldalfalától távol, a hátoldalhoz közeledetten, egyenes irányban futnak hátrafelé, eredésüknél ívesen kifelé mennek s csak azután fordulnak hátrafele; lefutásukban fokozatosan vastagodnak, legvastagabbak hátulsó zárt végükön; hosszúságuk 1·55—1·7 mm., zárt végükkel megközelítik a szívókorongot, sőt annak hasoldali szegélyét még meg is haladják. (Fig. 2.)

A *kiválasztó edénytörzsek* a gyomorágak alatt futnak végig kigyózáva, mellső végük megközelíti a pharynx bulbusát, de ennek szomszédságában ismét hátrahajlanak, e mellett azonban a pharynx felé futó egy ágat is bocsátanak. A *kiürítő hólyag* a csirafészek szomszédságában ered és aztán ferdén föl meg hátrafelé. A *kiürítő nyílás* a szívókorong közepe táján fekszik a Laurer-féle csatorna nyílásától 0·6—1 mm. távolságra.

Az *ivarnyílás* a test mellső harmada előtt, az *oesophagus* bulbusa alatt nagy távolságban, de kissé ez előtt fekszik egy

kraterszerű kiemelkedésen. Körületén az izomzat erőteljesebben fejlődött, úgy, hogy bizonyos fokig genitalis korong különült el, melynek átmérője az alapon 0·37 mm., az izomgyűrű vastagsága mintegy 0·13 mm.

A *herék* párosan fejlődöttek s a két here egymás végtében fekszik a gyomorágaktól körülzárt területen a hasoldal közelében, még pedig az egyik az ivarnyílástól nem nagy távolságban, a test közepe előtt, míg a másik a test közepe mögött, a szívókorongtól kevéssel távolabb, mint az első herétől. (Fig. 2.) Mindenik here egészen gömbforma, átmérője 0·66—0·8 mm., háti oldalukon néha kis halomszerű kiemelkedések mutatkoznak, a melyek azonban valószínűleg a petékkel telt uterus nyomása következtében keletkeztek. A vas efferensek egy vesicula seminalissá tágult vas deferensbe nyílnak. A vesicula seminalis interna hiányzik, hanem e helyett izmos falazatu cirrus fejlődött ki, a mely a genitalis udvarból kiölthető s a vas deferens szabad csúcsának közepén végződik; hossza 0·15 mm., átmérője 0·14 mm. A metraterma a cirrus csúcsán egy ductus hermaphroditicusban nyílik a vas deferens-szel közösen.

A *csirafészek* a gyomorágaktól körülzárt területen, a test középvonala fölött, a hátulsó here s a szívókorong között fekszik, de az utóbbihoz valamivel közelebb, egészen gömbforma, átmérője 0·26—0·3 mm. A *petevezeték* kigyózó lefutásu, hátrafelé fut, lefutásában magába veszi a szintén kigyózó *Laurer*-féle csatornát, a melynek nyílása egyszerű, majdnem a csirafészek fölött, a kiürítő nyílástól 0·6—1 mm. távolságra fekszik. A *héjmirigy* a csirafészek alatt, e között s a szívókorong között fekszik a test középvonalában, kolbászforma, erősen megnyúlt, hátulsó vége horogformán görbült. Az *uterus* előbb hátrafelé fut a test középvonala fölött, majd előre fordul s a hátulsó heréig a gyomorágak között a baloldalon, majd a herék fölé kerülve, a hátoldal közelében fut az oesophagus bulbusáig; lefutásában számos hurkot alkot.

A *székmirigyek* a gyomorágak fölött, a test oldalfalaitól távol fekszenek, aránylag rövidek, hosszúságuk 0·6—0·75 mm., csupán a hátulsó here közepe tájáig nyúlnak fel, vagy még ezen túl is s a csirafészek alatt végződnek, hátulsó végükkel nem

érik el a gyomorágak végét. Mindenik székmirigy 10—12 folliculusból áll, a melyek többé-kevésbé gömbformák; közös vezetékük az átellenes folliculusok közös vezetékével a csirafészek mögött reservoirt alkot.

A *peték* tojásformák, 0.14 mm. hosszúak, legnagyobb átmérőjük 0.06—0.08 mm., a cocon kupakos, hátulsó végén sajátágos tapadókorong van, épen mint a *Diplodiscus cornu*-én.

E faj, melyet Prof. Dr. E. v. MARENZELLER tiszteletére neveztem el, emlékeztet a *Diplodiscus cornu* (DIES.) fajra, de lényegesen különbözik ettől garatjának szerkezetével, heréinek számával, csirafészkének és székmirigyeinek elhelyezésével. Lényeges különbség mutatkozik ezenkívül a két faj között az ivarnyílás szerkezetében is. a mennyiben a *Diplodiscus cornu* (DIES.) fajnak nincs genitális korongja, hanem e helyett cirruszacskója különült el.

Diplodiscus cornu. (DIES.)

Amphistoma cornu DIESING C. M. 5. p. 235. Taf. 20. Fig. 12—13.

Fig. 3.

E fajnak rendelkezésemre állott 6 példányát, a melyeket a bécsi Hofmuseum állattárának 944. számú üvegében *Amphistoma cornu* DIES. név alatt találtam, DIESING C. M. feljegyzései szerint NATTERER I. 1832. év május havában gyűjtötte *Cataphractus vaca*—*Doras-vaca*-ból. Ugyane halfaj szerepel az üvegen lévő czédulán is mint gazda. A 6 példány valamennyie teljesen fejlett, petékkel telt, de közülök 3 kissé megsértett s csak 3 volt teljesen ép állapotban.

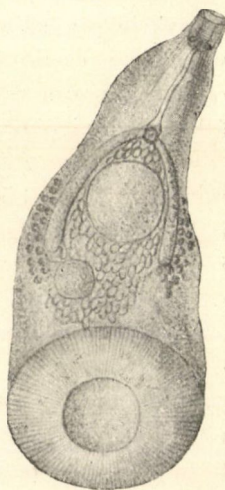
A *test alakja* némileg kúphoz és még inkább rövid szarvhoz hasonlít (Fig. 3.), hátulsó vége feltűnően szélesebb a mellsőnél. jobb- és baloldala tompán kerekített, lejtősen fut előre, a here két oldalán íves, előtte és mögötte kissé mélyedt; a hasoldal csaknem egyenes, alig észrevehetően görbült, míg a hátoldal meglehetősen erősen íves. A test mellső végén a szájnnyílás körül gyűrűforma elkülönülés van, a mely a szájnnyílás és a garat mellső vége között lévő izomkúpot tartalmazza. A test hossza 4—4.3 mm., legnagyobb transversális átmérője 2—2.2

mm., legkisebb transversalis átmérője a szájnylás körül 0·25 mm., legnagyobb dorsoventralis átmérője 2—2·2 mm.

A *szívókorong* a test hátulsó végén fekszik, a has- vagy hátoldaltól nézve egészen körforma (Fig. 3.), oldalról nézve a hasoldalon falazata keskenyebb, mint a hátoldalon, minek következtében distalis vége a hasoldal felé kissé ferdén metszett, de azért nyílása mégis egyenesen hátrafelé tekint; átmérője 2—2·2 mm., falazatának vastagsága 0·7—1·2 mm., nyílásának átmérője 1—1·2 mm., üregének belső feneke sima fölületű.

A *test kutikulaburka* mindenütt sima, egyenlő vastag, átmérője 0·002—0·004 mm. A bőrízomtömlő gyűrűs rostjai finomak, tömötten állanak, a hosszizomrostok sokkal vastagabbak, jóformán pamatokat alkotnak, a diagonalis rostok szintén jól fejlődöttek, de a hosszirányúaknál vékonyabbak.

A *szájnyílás* épen a test mellső, leghegyesebb végén fekszik, körforma, épszegélyű, szegélyén papillák nincsenek, átmérője 0·15 mm., közéje és a garat közé izomkúp ékelődött be, a mely már külsőleg is könnyen észrevehető. Az izomkúp izomzata aránylag gyengén fejlett, vastagsága 0·08 mm. (Fig. 3.)



3. ábra.

A *garat* széles ellypsisforma (Fig. 3.), hátulsó vége kerekített, oldalai egyformán tompán ívesek, hossza 0·25—0·4 mm., szájfelőli nyílása 0·1 mm.; belső ürege tömlőforma, legszélesebb a közepén, hossza 0·25 mm.; falazatának vastagsága 0·1 mm. A garattáskák az izomfalazatban ülnek s így külsőleg nem különülnek el, aránylag igen kicsinyek, keskeny tömlőformák, hosszúságuk 0·08 mm. Az izomfalazatban elől gyenge sphincter van.

Az *oesophagus* a garat hátulsó végének középvonalában ered s áttöri ennek izomfalazatát, eleinte kissé a hasoldal felé és hátra halad, de nemsokára ívesen a hátoldal felé közeledik, majd pedig csaknem egyenes vonalban fut a gyomorágakhoz, melyek-

nek határán keskeny bulbust alkot; hossza egyenes vonalban mérve 0·7—0·8 mm.

A *gyomorágak* eleinte kissé oldalt, kifelé, majd pedig ferdén hátrafelé futnak a test két oldalának közelében kis mértékben a hátoldalhoz közeledetten, lefutásuk csaknem egyenes, hátrafelé fokozatosan szélesednek, aránylag igen rövidek, csupán a csirafészekig nyúlnak le, a szívókorong szegélyétől mintegy 0·7—0·8 mm. távolságra érnek le, hosszúságuk 1·3 mm.

A *kiválasztó edénytörzsek* a gyomorágak alatt és mellett futnak le s a szívókorong közelében végződnek a test középvonalában eredő kiürítőhólyagba. A porus excretorius a hátoldalon, épen a szívókorong határán, illetőleg a hasoldalon fekvő állaton a szívókorong közepén nyílik a külvilágba.

Az *ivarnyílás* a test mellső harmadában, a szájnylástól mintegy 1·2—1·35 mm. távolságban az oesophagus hagymájának irányában fekszik, kerülete gyengén kiemelkedett, tölcserforma, de izomzata nem fejlődött ki erősebben s így nincs genitalis korong.

A *himivarszervet* egyetlen here képviseli, a mely egészen gömbforma, sima fölületű, feltűnő nagy, átmérője 1 mm.; a gyomorágak közötti területen fekszik ugyan, de a hátoldal felé nem emelkedik a test középvonalán túl, míg a hasoldalon megközelíti a test falát. A vas deferens vesicula seminalis externává tágul s azután átmegy a cirrus-zacskó belsejében felhurokolt vesicula seminalis internába. A cirrus-zacskó gömbforma. A ductus ejaculatorius a metratermmel közösen nyílik egy ductus hermaphroditicusba.

A *csirafészek* gömbforma, átmérője 0·3—0·45 mm., a gyomorágaktól körülzárt területen és részben azon kívül, a bal gyomorág hátulsó vége mellett fekszik. (Fig. 3.) A *petevezeték* meglehetősen hosszú és a test középvonala felé fut kissé ferdén hátrafelé, lefutásában magába veszi a Laurer-féle csatornát, a receptaculum seminis s a székeservoir vezetéket, azután pedig a héjymirigybe nyílik. A Laurer-féle csatorna nyílása nem a csirafészek fölött, hanem a test középvonalában van, a porus excretorius-tól mintegy 0·7—0·9 mm. távolságban. Az *ootyp* megnyúlt tömlőforma, a csirafészek alatt, e között s a szívókorong között

egyenlő távolságban fekszik. Az *uterus* eleinte hátrafelé fut a hátoldal felé, majd a szívókorong határán a hasoldalra kerül s aztán a gyomorágak között kitölti az egész területet, végre a here fölött a cirrus-zacskóig megy, mely mögött a ductus hermaphroditicusban végződik.

A *székmirigyek* a gyomorágak külső szegélye s a test fala között, az utóbbi közelében futnak fölfelé, majdnem a here felső szegélyéig, hátulsó végük meghaladja a gyomorágakat, átlag 1 mm. hosszúak. Mindenik székmirigy 12—18 gömbforma follikulusból áll, melyeknek vezetékai egy-egy nagyobb vezetékbe nyílnak; a haránt vezeték a székmirigyek hátulsó harmada fölött ered s a csirafészek fölött reservoirt alkot. (Fig. 3.)

A peték megnyúlt tojásformák, 0·13—0·14 mm. hosszúak, legnagyobb átmérőjük 0·06—0·07 mm., coconjuk kupakos és hátulsó végén sajátságos tapadókorong van, melynek közepén rövid, kocsányszerű kiemelkedés mutatkozik.

E faj a *Diplodiscus Marenzelleri*-től garatjának szerkezete, páratlan heréje, rövidebb gyomorágai és cirrus-zacskójának jelenléte alapján könnyen megkülönböztethető. De elválasztó bélyeg gyanánt szerepelhet a szívókorong szerkezete, a székmirigyek fekvése s a szájnyílás izomkúpja is. Mindeme különbségek teljesen kizárják annak lehetőségét, hogy a *Diplodiscus Marenzelleri* és *Diplodiscus cornu* ugyanazon fajnak csupán egy- és kétheres változata lenne, mint az a *Diplodiscus subclavatus* fajról ismeretes.

Gen. MICRORCHIS n. gen.

A hát- és hasoldal rendesen egyformán íves, a jobb- és baloldal kerekített. A szívókorong a test hátulsó végén ül, kissé a hasoldalra húzódottan. A garatban egy jól fejlett sphincter van. A garattáskák legtöbbször már külsőleg is felismerhetők. Az oesophagus a pharynx hasi oldalán, a garattáskák előtt nyomul be, hátulsó végén bulbust alkot. A gyomorágak egyenes lefutásúak vagy kigyózóak, a test oldalfalaitól eltávolodottak. Ivarkorong nincs. A cirrus-zacskó minden oldalról körülzárt, aránylag nagy. A herék egymás végtében, de kissé átellenesen

fekszenek a gyomorágaktól körülzárt területen, feltűnő kicsinyek, ágatlanok, gömb-, hengerformák vagy szabálytalan alakúak. A székmirigyek fa-alakúlag elágazódottak, a gyomorágak fölött és ezek külső oldala mentén, a test falától távol fekszenek. A csirafészek és a héjymirigy a szívókorongtól távol fekszik.

E genus heréinek alakjával és szerkezetével némileg a *Diplodiscus* nemre emlékeztet, a melytől azonban, eltekintve egyebektől, a herék fekvésével különbözik s e tekintetben némileg a *Pseudocladorchis*-ra emlékeztet. Az utóbbi genustól elüt azonban a pharynx és az oesophagus szerkezetével, a mennyiben pharynxában nem két, hanem csupán egy sphincter van, oesophagusa nem a pharynx hátulsó végének közepén, hanem hasoldalán szájadzik be, továbbá jól fejlett bulbusa van.

Még ez ideig csupán két fajja ismeretes, melyeknek több példánya állott rendelkezésemre.

Microorchis megacotyle (DIES.).

Fig. 4.

Amphistoma megacotyle DIESING C. M. 4. p. 250. Tab. 23. Fig. 19–20.

DIESING C. M. feljegyzései szerint e faj példányait NATTERER a Matto grosso vidékéről való *Silurus Palmito* egy himjének belében találta 1827 augusztus havában. A bécsi Hofmuseum állattárának rendelkezésemre bocsátott anyagában e fajnak példányait több üvegben találtam meg, még pedig:

1. A 974. számú üvegben *Silurus X.* gazdából több fiatalabb és idősebb példányt.

2. A 975. számú üvegben *Silurus Palmito* gazdából két fiatal példányt. Valószínűleg ezek voltak azok, a melyek a DIESING C. M. leírásainak és rajzainak anyagul szolgáltak.

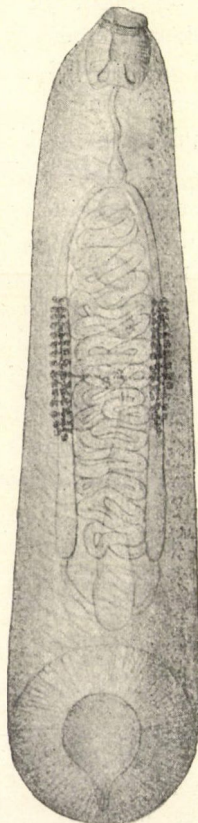
3. A 976. számú üvegben *Silurus Nr. 93.* gazdából két hibás és öt teljesen ép idős példányt, melyek közül kettőből metszet-sorozatot készítettem.

4. A 981. számú üvegben *Salmo Pacu* = *Myletes bidens* gazdából *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt más fajokkal keverten néhány fiatal példányt, a melyek mindenben egyeznek a 974. számú üvegben levőkkel.

A rendelkezésemre állott példányok között nagyon sokat találtam olyant, a mely testének alakjával teljesen megegyezett a DIESING C. M. rajzával, illetőleg testének mellső felében és mellső végével horogformán görbült vagy pedig egészen sarlóhoz hasonlított, de találtam ezenkívül majdnem egyeneseket és egészen pálczikaformákat, illetőleg a hossztengely irányában kinyúltakat is. (Fig. 4.) A 976. számú üveg példányai között találtam végre egy rendkívül megrövidült és némileg tojásformává összehúzódott példányt is. A legtöbb példány különben még a fejlődés különböző szakaiban levő fiatal, különösen pedig a 974. és 975. számú üvegekben elhelyezettek, s csupán a 976. számú üvegben találtam teljesen kifejtetteket, ivaréretteket, a melyek már sok petét is tartalmaztak.

A példányok legnagyobb részének *teste* csaknem teljesen hengeres, pálczikaforma, a szájvég felé azonban fokozatosan vékonyodik, úgy, hogy a test mellső vége 4—5-ször, sőt egyes esetekben 7-szer is keskenyebb, mint a test s a szívókorong legnagyobb átmérője; legszélesebb a test hátulsó végén, illetőleg a szívókorongon. A hát- és hasoldal az egyenesre kinyújtott példányokon csaknem egyformán egyenes, esetleg gyengén íves, a két oldal meglehetősen kerekített, úgy, hogy a test átmetszeti képe csaknem körformát vagy ellipszist mutat.

A *test méreti viszonyai* a fejlettség s az összehúzódottság foka szerint igen tág korlátok között változnak; a példányok legtöbbjének hossza 5—9 mm., legnagyobb laterális átmérője 1·4—3·8 mm., legnagyobb dorsoventralis átmérője 1—2·7 mm. között ingadozik, a leghosszabb példány 11 mm., a legszélesebb 4·3 mm. s a legmagasabb 3·7 mm. volt. A legfiatalabb példány hossza 1·8 mm., legnagyobb szélessége 0·5 mm., legnagyobb magassága 0·4 mm.



4. ábra.

A szívókorong a test hátulsó végén ül, feltűnő nagy, különösen a fiatalabb példányoké, a test mekkoraságához mérten; oldalról nézve többé-kevésbé zsemleforma, hasoldalról vagy hátoldalról tekintve széles gyűrűhöz hasonlít, átmérője átlagosan 1—2 mm., nyílása rendszeren hátra és kissé a hasoldal felé tekint, többé-kevésbé körforma, hossza 0·8—1·5 mm., szélessége 0·6—1·3 mm. Az izomfalazat legnagyobb átmérője 0·8—1·2 mm., hátul kissé bemélyedt s így némileg patkóforma, miért is emlékeztet a *Microrchis ferrum equinum*-éra. (Fig. 4.)

A test kutikulája egészen síma, majdnem mindenütt egyforma vastag, de aránylag vékonynak mondható, a mennyiben mintegy 0·007—0·01 mm. átmérőjű. A bőrízomtömlő rostjai közül a diagonalisak valamivel vastagabbak a hosszirányúaknál s a gyűrűsök a legvékonyabbak. A test parenchymája dús hálózatot alkot, a melyben csak kevés sejt van.

A szájnýílás a test mellső végén fekszik, ellipszisforma, szegélyén apró papillák ülnek, a melyeket azonban nem valamennyi példányon sikerült észrevennem. A szájnýílás különben, épen mint a *Microrchis ferrum equinum*-é is, a test többi részétől gyűrűszerű befűződéssel elkülönített szájkúpon ül, a mely átlag olyan magas, mint a pharynx izomfalazatának vastagsága. (Fig. 4.) A szájkúp külső kutikulaburka alatt erős gyűrűs izomrostok rétege fejlődött ki, egész tömegét kívülről ferdén befelé és belülről ferdén ki- és hátrafelé futó tangentialis rostok töltik ki, de ezeken kívül hosszirányú parenchymaizmok is futnak benne.

A pharynx a fejlettebb példányokban fölülről vagy alulról nézve némileg tojásforma vagy helyesebben négycsúcsú tömlőhöz hasonlít, szájfelőli vége kis mértékben kerekítettnek látszik, míg hátulsó vége közepén gyengén mélyedt, két oldala tompán íves s a hátulsó szegélylyel egy-egy kerekített csúcsot alkot. (Fig. 4.) A fiatalabb példányok pharynxának hátulsó szegélye közepén erősebben bemetszett s így a két oldalsócsúcs feltűnőbbé válik, ezenkívül a két oldal a hátulsó harmadban kissé befűződött, úgy, hogy ennek következtében a pharynxon egy mellső nagyobb s egy hátulsó kisebb részlet különült el. Oldalról nézve a fejlettebb példányok pharynxának hátoldala középig íves, ezen túl

bemélyedt, hátulsó csúcsa meglehetősen hegyesen kerekített, míg a fiatalabb példányoké ilyen helyzetben is feltűnően mutatja a mellső nagyobb s a hátulsó kisebb részletre való tagolódást, a mennyiben hát- és hasoldala közepén túl egyaránt erősebben befűződött. A pharynx ürege fölülről vagy alulról nézve tömlőforma, elöl elszűkül, hátul valamivel szélesebb, legnagyobb transversalis átmérője 0·17—0·2 mm., dorsoventralis átmérője már sokkal kisebb, nevezetesen 0·1—0·2 mm., minek oka különben bizonyára semmi más, mint az összehúzódás különböző foka. A pharynx izomfalazata a mellső részletben vastagabb, mint a hátulsóban s itt átmérője átlagosan 0·22 mm., míg hátulsó részletében, a pharyngealis táskák körül csupán 0·1 mm. A pharynx szájfelőli végén erős sphincter van, melynek átmérője átlag 0·08—0·12 mm. Az izomfalazat szöveti szerkezete meglehetősen jellemző; fölületét meridionalis rostok vastag rétege borítja, belső határát vékony gyűrűs rostok rétege alkotja, a mely a garattáskákat is körülfogja. Eme belső gyűrűs rétegtől kifelé egy belső s egy külső meridionalis rostréteg következik, a melyek között gyűrűs rostok helyezkednek el, de egész réteget nem alkotnak; a külső meridionalis rostrétegtől kifelé szintén gyűrűs rostok pamatai következnek, a melyek elülről hátrafelé fokozatosan kisebbednek. A pharynx izomfalazatának főtömegét különben a radialis, vagy, ha úgy tetszik, az æquatorialis rostok alkotják, a melyeknek legnagyobb része a külső falazattól egyenes vonalban fut a belsőhöz, egy kis része ellenben tangentialisan halad a garattáskákhoz. A legtöbb æquatorialis rost különbözőképen elágazott. A garattáskákhoz futó rostok mindannyian radialisak. A pharyngealis táskák épen úgy, mint a *Microrchis ferrum equinum*éi vagy a *Cladorchis subtriquetrus*éi, a pharynx izomfalazatában ülnek, még pedig a pharynx hátulsó végén olyformán, hogy külsőleg vagy épen nem, vagy csak alig ismerhetők fel, egymással s a test hossz tengelyével párhuzamosan fekvő szélesebb vagy keskenyebb, körte- vagy ritkán gömbforma tömlőhöz hasonlitanak s a pharynx üregének hátulsó végén nyílnak az oesophagus nyílása fölött két oldalt; legnagyobb átmérőjük nem, vagy csak kis mértékben haladja meg az izomfalazat átmérőjé-

nek felét, míg hosszúságuk vagy csak kevéssel rövidebb, vagy pedig akkora, mint az izomfalazat legnagyobb átmérője, de néha ennél nagyobb is.

Az *oesophagus* a *pharynx* hasoldalán a két *pharyngealis* táskák között és nyílásuk előtt ered, a mi különösen a *pharynx* oldalhelyzetében tűnik fel jól, eleinte a hasoldal felé megy, majd gyenge ív leírása után a hátoldalra kerül s csaknem egyenes vonalban halad a gyomorágakig; hossza átlag a test egész hosszának $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{6}$ -át teszi ki, a mennyiben például egy 11 mm. hosszú példányban 2 mm. hosszú. A gyomorágak elágazása előtt az *oesophagus* éles *bulbust* alkot, mely rövidebb vagy hosszabb hagymához hasonlít, legnagyobb átmérője 0.4—0.7 mm. A *bulbus* falazatában erős, gyűrűs izomrostokból álló réteg van.

A *gyomorágak* eredési pontjukon kissé kifelé, majd pedig ivesen hajolva hátrafelé futnak, lefutásukban egyenes irányt tartanak, nem, vagy csak alig észrevehetően kigyóztak, a test két oldalától távol és a hátoldalhoz közeledetten fekszenek, hátulsó zárt végük a szívókorongot nem éri el, átlag a test egész hosszának felét nem haladják meg; hátulsó végük mindig nagyobb átmérőjű, mint a középső vagy mellső részük. (Fig. 4.)

A *kiválasztó edénytörzsek* a gyomorágak alatt és ezek mentén haladnak előre, a kiürítő hólyag fölött közös törzsbe egyesülnek, átmérőjük majdnem akkora, mint a gyomorágaké. A kiürítő hólyag rendkívül hosszú, a mennyiben zárt vége a szívókorong közelében van s innen a csirafészekig terjed, a hasoldalon helyezkedik el; kivezető csatornája a csirafészek mellett emelkedik a hátoldalra s a csirafészek előtt, a Laurer-féle csatorna nyílása mellett, még pedig ennek jobb oldalán nyílik a külvilágba, a testnek épen közepén. (Fig. 4.)

Az *ivarnyílás* a test mellső végétől 1.8—2.4 mm. távolságra fekszik közvetlen az *oesophagus* *bulbusának* hátulsó végén s illetőleg a gyomorágak kiindulásánál, mindezekről nagy távolságban, átmérője 0.2 mm.; falazatában az izomzat gyengén fejlett és *genitalis* korongot nem alkot. (Fig. 4.)

A *herék* aránylag feltűnő kicsinyek, szabálytalan alakú egyszerű tömlők, fölületük síma, egymás végtében fekszenek ugyan, de a mellső kissé a bal-, a hátulsó ellenben a jobb

gyomorághoz közeledett, egymáshoz mindig közelebb fekszenek, mint az oesophagus bulbusának hátulsó végéhez, a mellső here mindig valamivel nagyobb a hátulsónál, a mennyiben annak átmérője 0.55 mm., emezé ellenben 0.33—0.4 mm. (Fig. 4.) Mindkét here a gyomorágtól körülzárt területen fekszik a hasoldalhoz közeledetten. A herék vas efferensei a hátoldalon s illetőleg a test közepén húzódnak végig és gomolyagot alkotó vesicula seminalis externába egyesülnek. A cirrus-zacskó némileg tojásforma, belsejében a vesicula seminalis interna többszörösen felhurkolt, mellette a prostatamirigyek is helyet foglalnak. A cirrus-zacskó distalis vége az ivarnyílásból meglehetősen messzire kiáll, a mi már DIESING C. M. figyelmét is magára vonta s a mihez hasonlót ír le FISCHÖEDER F. a *Balanorchis anastrophus*-ról (6. p. 637). Ez a ductus ejaculatoriusnak megfelelő részlet általában tojásforma, izmos falazatú s az ivarnyílást egészen kitölti. A vesicula seminalis internától a vas deferens egyenes vonalban halad a cirrus-zacskó kiemelkedett részletébe, illetőleg a ductus ejaculatoriusba s ennek szabad csúcán nyílik a metratermmel közösen.

A *csirafészek* tojásforma, legnagyobb átmérője 0.28—0.48 mm., a hátulsó heréhez közel, a testnek épen közepén fekszik, kissé a hátoldalhoz s a bal gyomorághoz közeledetten. (Fig. 4.) A *csiravezeték* a csirafészek hátoldalának közepén ered, magába veszi a *Laurer*-féle csatornát, a székreservoir s a receptaculum seminis vezetékét; eleinte egyenesen hátra, majd kissé lefelé fut a héjymirigyhez. A *Laurer*-féle csatorna többszörösen kigyózó és hurkolt, eleinte ferdén előre és fölfelé fut, nyílása a hátoldal közepén, a porus excretorius bal oldalán van. Az *ootyp* a csirafészek mögött nem nagy távolságban fekszik azzal egy magasságban, tömlőforma. Az *uterus* a gyomorágak között a csirafészek mögött van, a hasoldalon számos kanyarulatot tesz, majd a hátoldalon előre fut s a herék fölött elhaladva, a cirrus-zacskó hátulsó szegélye mellett az ivarnyílásban a him ivarvezetékétől függetlenül nyílik; lefutásában azonban nem marad a gyomorágtól körülzárt területen, hanem a jobb és bal oldal felé is kiterjed. A peték tojásformák, 0.06—0.07 mm. hosszúak.

A *székmirigyek* a gyomorágak fölött s ezeknek külső oldala

mentén fekszenek, mellső csúcsuk a hátulsó herét meghaladja, míg hátulsó csúcsuk meglehetősen lenyúlik a csirafészken túl hátrafelé, de azért messze elmarad a gyomorágak hátulsó végétől. (Fig. 4.) A székmirigyek follikulusai gömbforma csoportokba egyesültek, de a csoportok a gyomorágakkal párhuzamos, falalakulag elágazott keskeny szalagokat alkotnak. A két székmirigyet összekötő harántvezeték a székmirigyek közepén indul ki s a csirafészkek fölött székresevoirt alkot. Az egyes székmirigyek hossza 2—2.6 mm.

E faj nagyon emlékeztet a *Microrchis ferrum equinum*-ra, úgy, hogy pharynxának, szívókorongjának és heréinek szerkezete alapján akár egyesíteni is lehetne a kettőt; de eltér aztán ettől csirafészkének helyzete, kiürítő hólyagjának fekvése, a *Laurer*-féle csatorna és a porus excretorius helyzete, valamint a székmirigyek szerkezete alapján is.

Microrchis ferrum equinum (DIES.).

Fig. 5.

Amphistoma ferrum equinum DIESING C. M. 4. p. 250. Tab. 23. Fig. 16—18.

DIESING C. M. feljegyzései szerint e fajnak példányait NATTERER 1824 január havában találta először a *Cataphractus Murica*-nak Cuyaba területéről való himjében; ugyanezen év február havában megtalálta a *Cataphractus Corome* NATT. = *Doras costatus* három nőstényének belében; gyűjtötte azonban ezen kívül 1825 augusztus havában Villa Maria és 1826 novemberében Matto Grosso termőhelyről származó *Cataphractus Corome* NATT. = *Doras costatus*-ból.

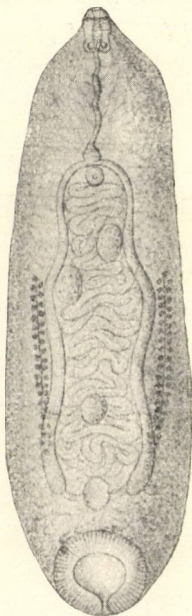
A rendelkezésemre állott példányok a bécsi Hofmuseum állattárának 952. és 953. számú üvegében voltak elhelyezve s a felírás szerint mindannyi a *Cataphractus Corome* NATT. = *Doras costatus* nevű halból származik. A 952. számú üvegben konzervált 12 példány között csupán hármat találtam olyant, a melyre némileg reá illik a DIESING C. M. leírása és rajza, a mennyiben tényleg hengeres, egész hosszában egyforma széles tömlőhöz hasonlitanak, de testüknek hátulsó vége kissé kihegyesedett, szájnylásuk pedig keskeny, kúpforma kiemelkedésen ül s

így testöknek mellső vége meglehetősen feltűnően elkeskenyedik és kihegyesedik. Mind a három példánynak két oldala meglehetősen tompán kerekített, egyiknek hasoldala csaknem egyenes, háta ellenben íves, míg a másik kettőnek hát- és hasoldala jóformán egyenlően íves. Méreti viszonyai a következők: testhossz 5·5, 10, 11·5 mm.; legnagyobb szélesség 3·2, 4·8, 5·4 mm.; legnagyobb magasság 2, 3·5, 4·8 mm.

Egy olyan kisebb példányt is találtam, melynek megnyúlt teste csaknem mindenütt egyforma széles tömlőhöz hasonlított, de hasoldala felé görbült, némileg sarlószerű, hasa lapos, míg háta egészen íves és hengeres; testhossza 6 mm.; legnagyobb magassága 1·8 mm.; legnagyobb szélessége 2·1 mm.; testének száj- és hátulsó vége olyan, mint a megelőző példányoké, kétoldalt azonban valamivel hegyesebben kerekített, a mi bizonyára csupán a has ellapulásának az eredménye.

A többi nyolcz példány teste fölülről vagy alulról nézve a száj felé keskenyedő hosszú kúphoz hasonlít, testöknek hátulsó vége gyengén, szájvége erősen kihegyesedett, mintegy orrmányt alkot. (Fig. 5.) Oldalról nézve egyik kivételével valamennyi példány hát- és hasoldala többé-kevésbé egyformán íves, néha azonban a hasoldal csaknem egyenes. A test oldalai meglehetősen tompán kerekítettek, úgy, hogy a test harántmetszete némileg széles ellipszishez hasonló képet ad. E példányok között azonban volt egy olyan is, melynek teste a hasoldal felé görbült, hasa lapos, míg háta erősen íves, oldalai pedig meglehetősen hegyesen kerekítettek. A test méreti viszonyai a következők: testhossz 11·5—15 mm.; legnagyobb szélesség 3·2—4·5 mm.; legnagyobb magasság 3—4·5 mm.

A 953. számú üveg csupán három példányt tartalmazott, a melyek a test alakja tekintetében mintegy átmenetet alkotnak az előző üvegben levő tömlő- és kúpforma példányok között, de mégis jobban hasonlítanak a tömlőformákhoz. Ezeknek mé-



5. ábra.

reti viszonyai a következők: test hossza 8—10 mm.; legnagyobb szélessége 4 mm.; legnagyobb magassága 3—3·2 mm.

Az említett 15 példány testalakjában és méreti viszonyai-ban mutatkozó különbségeknek semmi nagyobb jelentőséget nem tulajdoníthatunk, mert ezek csupán a korkülönbségnek, legfőképpen pedig a konzerválás alkalmával történt különböző fokú és irányú összehúzódásnak az eredményei. Tekintettel aztán arra, hogy a példányok legnagyobb része (tizenötből nyolcz) megnyúlt, keskeny kúpformát mutat s csak három hengeres, tömlőforma, vagy mint DIESING C. M. mondja: «walzenförmig, etwas zusammengedrückt, an beiden Enden abgerundet», azt hiszem, nem tévedek, sőt jogosan mondom a nagyobb számú elsőket tipusos példányoknak.

A szívókorong a test hátulsó végén ül, a tömlőforma példányokon a hasoldal $\frac{1}{5}$ -, a megnyúlt kúpformákon ellenben $\frac{1}{7}$ -részét foglalja el, falazata a hátoldalon erősebb, mint a hasoldalon, izmos falazatán vagy semmi, vagy csak nagyon kis párkány emelkedik, hátulsó végén bemélyedt s így némileg patkóhoz hasonlít, mint azt DIESING C. M. is konstataulta és a mi után a fajnevet is kölcsönözte. A szívókorong körülete csaknem körforma, hossza 1—2·5 mm., szélessége 1—2 mm. között változik; izomfalazatának legnagyobb átmérője 1·15 mm., legkisebb átmérője 0·07—0·15 mm. A szívókorong nyílása ferdén fekszik s a hasoldal felé tekint, átmérője 0·8—1·2 mm.

A testet borító *kutikulára* vonatkozólag DIESING C. M. azt mondja, hogy «Der Körper ist der Quere nach gerunzelt, und nachdem die ihm anhängende Flüssigkeiten verdunstet ist, bemerkt man schon bei einer mässigen Vergrößerung zwischen diesen Runzeln viele kleine Grübchen auf der Oberfläche». Én vizsgálataim során csupán a megrövidült, hengeres, tömlőhöz hasonló példányok kutikuláján láttam a gyűrűzöttségnek nyomát, míg a többi példányokét egészen simának találtam, a DIESING-től említett «viele Grübchen»-eket ellenben semmiféle nagyítással és egyetlen példányon sem vettem észre. A kutikula vastagsága 0·015—0·016 mm. között változik.

A *bőrizomtömlő* külső gyűrűs-, külső hossz-, diagonalis- és belső hosszirányú rostokból áll. A gyűrűs rostok igen kes-

kenyek, tömötten állanak, átlag alig 0·008 mm. átmérőjűek. A külső hosszirányú rostok igen vékony réteget alkotnak, a mely alig oly vastag, mint a gyűrűs rostok. A diagonalis rostoknak egymást keresztező két rétegük van, átmérőjük 0·018—0·02 mm. s a két réteget alkotó rostok 0·03 mm. távolságra futnak egymástól. A belső hosszirányú izomrostok a többinél erőteljesebbek és meglehetősen vastag réteget alkotnak, vastagságuk 0·035—0·04 mm. s ezek valószínűleg parenchyma-rostok.

A *test parenchymája* igen tömött hálózatot alkot. A hálózat falazatában itt-ott apró sejtek maradtak vissza, míg a hálózat területén sok helyen finoman szemecskés anyag látható.

A *szájnnyílás* a test mellső végén, épen a hossztengely csúcán ül jól elkülönült szájkúpon, a mely a testnek legkeskenyebb részlete s ettől még egy gyűrűs bemélyedés is elválasztja. A száj szabad szegélye sima, illetőleg rajta papillák nem emelkednek, átmérője 0·18—0·2 mm. A szájkúp hossza 0·3—0·4 mm., átmérője alapján 0·5—0·06 mm.; izomállománya sajátosságos elrendezésű és lényegesen eltér a garat izomállományának elrendeződésétől; külső szegélye mentén gyűrűs rostok fejlődtek, míg a belső szegély mentén hosszirányú rostok vannak; belső tömegét két, egymástól független, hosszirányú rostoktól elválasztott gyűrűs rostok nyalábjai s a külső szegélytől ferdén befelé futó radialis rostok töltik ki; a külső gyűrűs izomrétegen belül azonban még hosszirányú rostok rétege is van. A három gyűrűs izomnyaláb a szájkúp sphincterjét alkotja. A szájkúp belső ürege, a melyet előgaratnak — *propharynx* — tekinthetünk, átmetszetben körformát mutat, fölületét meglehetősen vastag kutikula fűdi, a mely átmegy a garat belső kutikulájába.

A *pharynx* fölülről vagy alulról nézve széles, de hossztengelye irányában kissé megnyúlt tömlőhöz hasonlító (Fig. 5.), mellső vége többé-kevésbé tompán kerekített, két oldala hátulsó harmada táján kis mértékben mélyedt, hátulsó végének két oldalcsúcsa ivesen kerekített, mintegy két karélyt alkot, melyeket meglehetősen éles bemélyedés választ el egymástól. Oldalról nézve a *pharynx* ugyanilyen képet mutat, csak hogy természetesen csupán egyik hátulsó karélya látható; hossza 1·6—2 mm., legnagyobb átmérője 1—1·5 mm; átmérője a befűződésnél 0·8—0·9

mm. A garat izomfalazata aránylag igen vastag, átmérője a garattáskáig 0·4—0·6 mm., a garattáskák körül 0·15—0·18 mm. Az izomfalazat sajátos szerkezetű, legkülső rétege hosszirányban futó s illetőleg meridionális vékony rostokból áll, a belső falazat mentén vékony gyűrűs, illetőleg æquatorialis rostok rétege fejlődött ki, a melyre kifelé meridionalis izomréteg következik s ettől kifelé ismét æquatorialis rostok rétege különült el, a mely azonban csupán a garattáskákig terjed. A külső délkörös izmokon belül a garat mellső harmadában 5—6 erős æquatorialis rost alakult ki; a külső falazattól a belsőhöz erős radialis rostok futnak, melyek majd egyenesek, majd ferdek, a garattáskák körül azonban sokkal vékonyabbak. Igen erőteljesen fejlődött ki a garat mellső végén egy gyűrűs rostokból álló izomnyaláb, a mely hatalmas sphinctert alkot és átmérője 0·2—0·3 mm. között ingadozik. A garat két hátulsó karélyában az izomfalazat egy-egy garattáskát zár magába, a melyeknek mindenike szabályszerint gömbforma tömlő, átmérője 0·35—0·45 mm. s a garatüreggel meglehetősen keskeny, 0·1—0·18 mm. hosszú vezetéken át áll összeköttetésben. A garat belső ürege kisebb-nagyobb, tojásesetleg ellipszisforma tömlőhöz hasonlít, az előgarat egyenes, de kiszélesedett folytatásának látszik, lateralis átmérője átlag 0·45 mm., a dorsoventralis átmérő csak kevéssel kisebb, határoló kutikulája 0·08—0·012 mm. vastag.

Az *oesophagus* S-formán görbült, 2·5—3 mm. hosszú, a garat hasi oldalán ered a garattáskák előtt (Fig. 5.), eleinte a hasoldal felé és hátra fut, majd pedig a hátoldalra görbül, hátrafelé fokozatosan vastagodik, hátulsó végén erős, hagymaszerű bulbust alkot, mely közepe fölött kissé befűződött és vastag izomfalzatú, átmérője 0·4—0·5 mm. Az *oesophagus* falazata külső hosszirányú, vékonyabb, és belső gyűrűs, erősebb rostokból áll, belső kutikulaburka meglehetősen vastag.

A *gyomorágak* az *oesophagealis* bulbus hasi oldalán két oldalt erednek és eleinte kissé ívesen ki és hátrafelé futnak, lefutásukban hullámokat alkotnak, illetőleg kigyózó lefutásúak, a test oldalfalaitól meglehetősen eltávolodottak, kevéssel a szívókorong előtt végződnek, a hát- és hasoldal között majdnem közepén fekszenek (Fig. 5.), hosszaságuk 5·6—6 mm. A tömlő-

forma, illetőleg összehúzódtott példányok gyomorkarjai kigyózóbb lefutásúak és egyúttal rövidebbek is, mint a megnyúlt kúpformáké.

A *vizedénytörzsek* a gyomorágak mentén, de ezek alatt húzódnak el kigyózva, az oesophagus bulbusánál két ágra oszlanak, egyik águk a pharynx felé, a másik a test középvonala felé fut, belőlük számos mellékág indul ki, aránylag igen szélesek, átmérőjük csaknem akkora, mint a gyomorágaké. A kiürítő hólyag a test középvonalaiban fekszik a gyomorágak között, a szívó korongtól 0·62—0·8 mm. távolságra, vezetéke kissé előre és fölfelé fut. A kivezető nyílás a test hátulsó végétől 3·55—4 mm., a szívókorong belső határától 1·6 mm. s a Laurer-féle csatorna nyílásától 0·8 mm. távolságban fekszik, körületén tömlőforma sejtek csoportja van.

Az *ivarnyílás* a test mellső végétől, illetőleg a szájnnyílástól 2·75 mm. távolságra fekszik a gyomorágak közti területen, az oesophagus bulbusa mögött nem nagy távolságban; körülete kiálló, kerekített csúcsú halmocskát alkot, de izomzata nem fejlődött ki oly erőteljesen, hogy ivari korongot alkotna.

A *herék* a gyomorágaktól körülzárt területen, nem a közép-vonalban és egyenesen egymás mögött, hanem bizonyos fokig átellenesen fekszenek, a mennyiben mindenik here egy-egy gyomorághoz közeledett (Fig. 5.); a baloldali here mindig sokkal előbbre húzódtott s nevezetesen az oesophagus bulbusától csupán 0·9—1 mm. távolságra van, míg a jobb here már 2—2·3 mm.-nyire távolodott el az oesophagus bulbusától, a két here között pedig 1 mm. hézag van. Mindkét here többé-kevésbé gömbforma, sima fölületű, illetőleg ágatlan, átmérője átlag 0·4—0·7 mm. A *vas efferenseket* nem tudtam megkülönböztetni. A *vas deferens* meglehetősen terjedelmes *vesicula seminalis externá*vá duzzad, a mely a cirrus-zacskóba megy át. A *cirrus-zacskó* megnyúlt tömlőhöz hasonlít, 0·3—0·33 mm. hosszú, legnagyobb átmérője 0·15 mm., kissé ferdén fekszik, felső végével az oesophagus bulbusa felé tekint, belsejében a *vesicula seminalis interna* többször felhurkolódott, de nem tölti ki egészen, hanem helyet hagy a prostata-mirigyeknek is. A cirrus-zacskóban ductus ejaculatorius is különült el. A him ivarvezeték a női ivar-

vezeték metratermjével közösen nyílik egy ductus *hermaphroditicusba*.

A *csirafészek* a gyomorágaktól körülzárt területen, a szívó korongtól 1·8—2 mm., a kiürítő hólyagtól 0·5—0·7 mm. s a jobb, illetőleg hátulsó herétől 1·8—2·7 mm. távolságban fekszik, kissé a hasoldalhoz közeledetten, szabályszerint tojás- vagy ellipszisforma, hossza 0·5—0·6 mm., szélessége 0·3—0·38 mm. A *petevezeték* a csirafészek hátoldalán ered, lefutásában felveszi a Laurer-féle csatornát, a receptaculum seminis s a székeservoir vezetékét, majd pedig a héjymirigybe nyílik. Az *ootyp* a héjymirigyekkel tojásforma tömlő, a csirafészek mögött fekszik a hátoldalhoz közeledetten. A *Laurer*-féle csatorna kigyózóan emelkedik a hátoldal fele, nyílása a porus excretoriustól 0·8 mm. távolságra fekszik a testnek hátulsó harmadában, majdnem a csirafészek fölött (Fig. 5.). Az *uterus* az ootypból kiindulva a hasoldal felé ereszkedik le s eleinte hátrafelé fut a szívókorong szomszédságáig, majd a jobboldal felé kanyarodik, a honnan a két gyomorág közti területre kerül, a melyet egészen kitölt, majd a herék között és fölött halad el, végre pedig a cirruszacskó mögött és mellett a ductus hermaphroditicusban végződik, lefutásában mindenütt többszörösen felhurkolt. A peték tojásformák, kupakosak és kocsánytalanok, 0·08 mm. hosszúak, átmérőjük 0·05 mm.

A *székmirigyek* a gyomorágak két oldalán, ezek fölött a test két oldalától távol fekszenek. (Fig. 5.) Az egyes székmirigyek hossza 2·8 mm., tehát meglehetősen hosszúak, mellső végükkel eléri a heréket, hátulsó végükkel többé-kevésbé megközelítik a gyomorágak hátulsó végét. Mindenik székmirigy folliculusai gömbformák, harántvezetékük a héjymirigy fölött egyesül egymással s itt a reservoirt alkotják.

E faj a *Microrchis megacotyle* (Dies)-től legfőképen heréinek fekvésével, csirafészkének, kivezető hólyagjának, a *Laurer*-féle csatorna nyílásának s a porus excretoriusnak helyzetével különbözik.

Pseudocladorchis n. gen.

A hát- és hasoldal egyformán íves, a jobb és baloldal ke-rekített. A szívókorong a test hátulsó végén ül, kissé a has-oldalra húzódottan. A garatban két jól fejlett sphincter van. A garattáskák a garat izomzatában ülnek. Az oesophagus a garat hátulsó végén nyomul be, bulbust nem alkot. A gyomorágak egyenes lefutásúak vagy gyengén kigyózóók, a test oldalfalaitól eltávolodottak. Ivári korong nincs. A cirrus-zacsó minden ol-dalról körülzárt, nagy. A herék átellenesen fekszenek, csak kevés ágat bocsátanak, vagy egyformák, vagy egymástól külön-böznek. A székmirigyek faalakulag elágazódottak, a gyomorágak fölött fekszenek a test oldalfalaitól távol. A csirafészkek és a héjymirigy meglehetősen közel fekszik a szívókoronghoz.

E genus heréinek szerkezetével némileg összekötő kapcsot alkot az emlős állatokban élősködő *Cladorchis*- s a halakban élősködő *Microrchis*-genusok között, melyek közül az utóbbi-tól heréinek alakján és elhelyezésén kívül még garatjának szer-kezetével, oesophagusának beszájadásával és bulbusnélküliségé-vel különbözik.

Eddig három faja ismeretes s ezeknek több példánya állott rendelkezésemre.

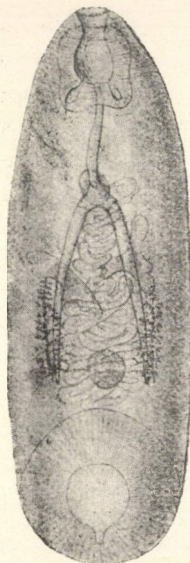
Pseudocladorchis cylindricus (DIES.).

Fig. 6.

Amphistoma cylindricum DIESING C. M. 4. p. 249. Taf. 23. Fig. 13–15.

DIESING C. M. e fajt a *Cataphractus murica* = *Doras mu-ricus* nevű halból írta le, s mint megjegyzi, NATTERER 1825 augusztus havában gyűjtötte Villa Maria termőhelyről. A DIESING C. M. leírásánál typus gyanánt szereplő két példányt *Amphi-stoma cylindricum* DIES. név alatt a bécsi Hofmuseum állat-tárának 943. számú üvegében találtam meg, a melyeken kívül azonban még több más példány is került ki a rendelkezésemre állott anyag átvizsgálása során. Így megtaláltam a 980., 983., 986. és 987. számú üvegekben *Amphistoma oxycephalum* DIES.

név alatt más fajokkal keverten a következő gazdaállatokból: *Salmo* Nr. 111 (Nr. 980); *Salmo pacupeba* = *Myletes aureus* (Nr. 983, 987) és *Silurus megacephalus* = *Pimelodes megacephalus* (Nr. 986). Összesen 15 példány állott rendelkezésemre, a melyek közül egyet in toto mikroskopi készítményben állandósítottam, hatból metszetsorozatot készítettem, míg hetet bor-szeszben hagytam érintetlenül gazdaállatonként s illetőleg üvegszám szerint külön-külön.



6. ábra.

A test általános alakja tekintetében a rendelkezésemre állott példányok nagy változatosságot mutatnak. A 943. számú üvegben lévő példányok ugyanis mindenben hasonlítanak a DIESING C. M. rajzaiban feltüntetettekhez s így ezek lennének típusnak tekinthetők (Fig. 6.), a mennyiben testök fölülről, alulról vagy oldalról nézve egészen hengeres, mellső végén csak igen kis mértékben keskenyedett, közepe táján szélesebb, mint két vége felé. Ezekhez igen közel állanak a 980., 986., és 987. számú üvegekben talált azon példányok, melyeknek teste fölülről, alulról vagy oldalról nézve szintén egészen hengerforma, de a mellső testvég felé már észrevehetően keskenyedik, egyebütt azonban egyforma átmérőjű. A mily tág korlátok között ingadozik

a test külső alakja, épen oly változatosak méreti viszonyai is, a mennyiben egész hossza 4—10 mm., transversalis átmérője 1·5—3·2 mm., dorsoventralis legnagyobb átmérője 1·5—3 mm.

A szívókorong aránylag feltűnő nagy, a test hátulsó végén fekszik, fölülről vagy alulról nézve széles gyűrűhöz, oldalról nézve csonka kúphoz hasonlít, nyílása ritkábban egyenesen hátrafelé, gyakrabban hátra és kissé a hasoldal felé tekint s egyetlen oly példányt sem találtam, a melynek szívókorongja a DIESING C. M. ábráiban feltüntetett viszonyt mutatta volna; átmérője 1·5—2·5 mm. között ingadozik. A szívókorong izomzata 0·4—0·8 mm. átmérőjű, pereme különböző magosságú. A korongnyílás szabály szerint körforma, de hátulsó szegélyén igen

gyakran kis bemélyedés van, anélkül azonban, hogy az izomfalazat patkószerűen tagolódna, átmérője 0·5—1·2 mm. között ingadozik, a mi különben az izomfalazat különböző fokú összehúzódásával áll kapcsolatban. A szívókorong üregének mélysége szintén változó, átlag 0·5 mm.

A testet borító *kutikula* egészen sima, a DIESINGTől említett harántredőket egyetlen példányon sem találtam meg, vastagsága csaknem mindenütt egyforma, átlag 0·009—0·01 mm. A *bőrizomtömlő* tipusosan külső gyűrűs, külső hosszirányú és két ellentétes irányban futó diagonális rostokból áll, melyeken belül hosszirányú parenchymarostok vannak. A bőrizomtömlő rostjainak átmérője egyénenként, illetőleg az összehúzódottság foka szerint változik, de a diagonális rostok mindig vékonyabbnak látszanak a többinél. A test parenchymája dús hálózatot alkot, a melyben elszórtan parenchyma-sejtek is láthatók.

A *szájnyílás* a test mellső végén ül egy kis kúpforma kiemelkedésen, a mely azonban az erősebben összehúzódott példányokon alig vehető észre, legjobban feltűnik különben, ha az állat oldalt fekszik, mert a hasoldalon a szájkúp alapja jobban befűződött. A szájnyílás egészen körforma, peremén, valamint magában a szájüregben is apró papillák harántsorai emelkednek, átmérője 0·4—0·6 mm. A szájkúp külső és belső falazatát a bőrizomtömlő alkotja, de rostrétegei igen vékonyak, külső falazatának mentén parenchyma-izmok futnak, belső tömegét tangentialis izomrostok töltik ki, melyeknek egy része a belső falazattól ferdén hátra és kifelé, más része a külső falazattól ferdén befelé fut.

A *pharynx* alakja a példányok szerint meglehetősen változatos. A 943., 980., 983. számú üvegekben talált példányok pharynx-a ugyanis fölülről vagy alulról nézve rendesen többé-kevésbé gömbforma tömlőhöz hasonlít (Fig. 6.), melynek oldalai erősebben vagy tompábban ívesek, mellső vége némileg egyenesre metszettnek látszik, míg hátulsó vége közepén szélesen és sekélyen öblös, minek következtében itt kétkarélyosnak látszik. Oldalról nézve e példányok pharynx-a két oldalán egyenletesen kerekített, hát- és hasoldali szegélye a hátulsó szegéllyel majdnem egyforma nagy és egyforma hosszú karélyt alkot

s a hátulsó szegély bemélyedt. A 986. és 987. számú üvegekben lévő példányok pharynx hossztengelye irányában kissé megnyúlt tömlőhöz hasonlít, melynek két oldala hátulsó harmadában gyengén mélyedt s így két hátulsó zuga karélyformán némileg elkülönült, hátsó szegélye pedig jobban bemélyedt. A mennyire változatos az egyes példányok pharynxának alakja, épen annyira változatosak a méreti viszonyok is, a mennyiben hossza 0·6—1·2 mm., lateralis átmérője 0·65—1·3 mm., dorsoventralis átmérője 0·6—1·1 mm., lumenének dorsoventralis átmérője 0·4—0·6 mm., lateralis átmérője ugyanakkora.

A *pharynx izomfalazata* 0·25—0·4 mm. átmérőjű és két jól fejlett sphinctert tartalmaz, melyek közül az egyik a pharynxnak a szájüreggel határos végén van, átmérője 0·15—0·18 mm., a másik ellenben a pharynx hátulsó végén fejlődött ki az oesophagus körül s ennek átmérője 0·15—0·35 mm. között ingadozik. A sphinctert alkotó gyűrűs izomrostok között ferdén futó radialis rostok haladnak. A pharynx izomfalazatának fölületén hosszirányú s illetőleg meridionalis rostok különböző vastagságú rétege fejlődött ki, míg a lumen felőli legbelső rétegében vékony gyűrűs izomrostok vannak a cuticula alatt, ezektől kifelé hosszirányú s illetőleg meridionalis rostok rétege következik. Az izomfalazat külső hosszirányú és belső gyűrűs izomrost-rétege között erőteljes radialis izomrostok futnak, a melyek között szabálytalanul elszórtan gyűrűs, illetőleg æquatorialis rostok kisebb nagyobb pamatai helyezkednek el.

A *pharyngealis táskák* a pharynx izomfalazatában ülnek és külsőleg nem különültek el. Mindkét táska a pharynx üregének hátulsó szegélyén nyílik részarányosan a hossztengely két oldalán, kissé ferdén ki és hátrafelé futnak, rendesen keskeny, kerekítettvégű tömlőhöz hasonlítanak, hosszaságuk 0·15—0·6 mm., legnagyobb átmérőjük 0·15—0·2 mm.

Az *oesophagus* a pharynx hátulsó végén nyomul be az izomfalazatba s illetőleg nyílik a pharyngealis üregbe, mindig a pharyngealis táskák között és alatt, majd épen a pharynx hátulsó végének közepén, majd pedig, és leggyakrabban, kissé a hasoldalra húzódva, a mi különösen akkor tűnik szembe, ha a pharynxot oldalról nézzük. A pharynxból kiinduló oesophagus

néha a test hossz tengelyével párhuzamosan fut hátra és kissé fölfelé, leggyakrabban azonban eleinte ferdén a hasoldal felé halad, majd azonban gyengén meghajlik és aztán ferdén hátra meg a hátoldal felé megy, míg a gyomorágakkal találkozik; pharyngealis vége mindig sokkal keskenyebb, illetőleg hátrafelé haladtában fokozatosan szélesedik, hátulsó vége azonban bulbust nem alkot, hanem a két gyomorágnak megfelelőleg villásan ketté ágazik. Az oesophagus falazata külső hosszirányú és belső, erőteljes gyűrűs izomrostokból áll, a melyek az ágakon több réteget alkotnak, belső fölületén vastag kutikula-intima van, mely a villaágakban vastagabb, mint egyebütt és legvékonyabb a pharyngealis végen. Az oesophagus hossza egyenes vonalban mérve 0·8—1·4 mm.

A *gyomorágak* a hátoldal közelében s a test jobb és bal oldalától nagy távolságban fekszenek, eredésüknél néha ki és hátrafelé íveltek, legtöbbször azonban egyenesek, majd a test hossz tengelyével és egymással is párhuzamosan, majd hátrafelé egymástól fokozatosan távolodva, de mindig egyenesen futnak (Fig. 6.), hátulsó végük felé fokozatosan keskenyednek, hosszúságuk csupán 1·5—2 mm. és végük meg a szívókorong belső határa között meglehetősen hézag marad fenn, mely mintegy 0·6—1 mm. átmérőjű.

Az *ivarnyílás* a test mellső harmada s illetőleg az oesophagus villás elágazása előtt fekszik a test mellső végétől 1·2—2 mm.-nyire, még pedig az oesophagustól nagy távolságban, a mennyiben kettőjük közé ékelődik be a cirrus-zacskó a vesicula seminalissal, a mely majdnem függélyesen emelkedik az oesophagus felé, de középütt még az uterusnak több burka is benyomul. Az ivarnyílás keskeny, a hasoldalon alig kiemelkedő halmocsán ül, körülötte az izomzat nem fejtett ki erőteljesebben s így ivari korong nincs.

A *herék* az ivarnyílástól nagy távolságban, mintegy 0·9—1·2 mm.-nyire, jóformán a test közepén, a gyomorágak alatt és egymással átellenesen fekszenek, de nem a gyomorágaktól körülzárt területen, hanem legnagyobbbrészt ezen kívül és némileg a test jobb-baloldalához közeledetten (Fig. 6.). Mindkét here elágazódott, ágaik karélyformák, de nem egyformák, a

mennyiben a jobboldali többágú, rövidebb, főtömege a test hossz tengelyével csaknem párhuzamos, egy példányban haránt-irányban a gyomorágak közti területre egy főágot bocsát, leggyakrabban azonban csupán külső oldaláról indulnak ki ágak. A baloldali here hossz tengelyével ferdén fekszik a gyomorág alatt, minek következtében egyik fele a gyomorágak közötti területre, a másik pedig ezen kívül esik és csucsával a test oldalfalazatához közeledik, tömegéből csupán 2—3, karélyforma, rövid ág indul ki. A herék főtömegének hossza 0·8—1·7 mm. között ingadozik. A két here főtömege között átlag 0·5—0·8 mm. terület marad szabadon, a melyen az uterus hurkai s a vesicula seminalis externa helyezkednek el. A *cirrus-zacskó* majd szélesebb, majd keskenyebb tojásforma, hossza 0·3—0·4 mm., legnagyobb átmérője 0·2—0·3 mm., hátoldali felét a felhurkolt vesicula seminalis interna tölti ki, míg hasoldali felében a prostatamirigyek helyezkednek el. A *ductus ejaculatorius* a metratermmel ductus hermaphroditicussá egyesül.

A *csirafészek* a test középvonalában, a gyomorágaktól körülzárt területen kívül, szabály szerint a szívókorongtól 0·18—0·3, kivételesen 0·7 mm. távolságra fekszik (Fig. 6.), gömb- vagy tojás-, kivételesen csónakforma, legnagyobb átmérője 0·1—0·18 mm. A petevezeték a csirafészek hátoldalának közepéről indul ki, hátrafelé halad és lefutásában magába fogadja a Laurer-féle csatornát, a receptaculum seminis vezetékét, valamint a székesreservoir vezetékét is. Az *ootyp* a csirafészek mögött és kis mértékben ez alatt feszik. A *Laurer*-féle csatorna többszörösen kigyózva kissé hátra és aztán a hátoldalra fut, nyílása a szívókorong mellső szegélyétől 0·09—0·7 mm. távolságra fekszik. Az *uterus* az *ootyp*ből való kilépés után eleinte a hátoldalon fut, majd a hasoldalra kerül s nemcsak a csirafészek és szívókorong közti területet tölti ki, hanem a gyomorágakon kívüli területre is kiterjed, majd a gyomorágak között előre halad a herék között, a herék előtt nem marad a gyomorágak közti területen, hanem hurkaival majdnem eléri a test két oldalfalát, az ivarnyílás elébe kerül s illetőleg a *cirrus-zacskó* előtt is több hurkot alkot. A peték átlag 0·09—0·1 mm. hosszúak, tojásformák, legnagyobb átmérőjük 0·06—0·08 mm.

A *székmirigyek* a test jobb- és baloldali szegélyétől távol, a gyomorágak mentén, ezek fölött és kissé ezektől kifelé fekszenek, a gyomorágak hátulsó végét meghaladják, de a szívókorongig nem terjednek le, előre egészen a herékig nyúlnak fel, sőt nem ritkán még tovább is terjednek (Fig. 6.), faalakulag elágazottak, de mellső végük felé keskenyednek, mintegy 0·75—0·8 mm. hosszúak. A két székmirigytörzset összekötő harántereszték a gyomorágak végén túl indul ki s így a székmirigyeket két egyenlőtlen részre: mellső sokkal nagyobbra és hátulsó igen kicsinyre osztja; a székeservoir a csirafészek fölött fekszik.

A *vizedénytörzsek* a gyomorágak alatt s ezek két oldalán húzódnak végig, a bázsing végén egymáshoz közelednek. A kivezetőhólyag a csirafészek mögött és rendszeren ez alatt fekszik. A kivezetőnyílás a szívókorong fölött fekszik a Laurer-féle csatorna nyílásától 0·7—1 mm. távolságra, rendszeren csónakforma.

*Pseudocladorchis nephrodorchis** n. sp.

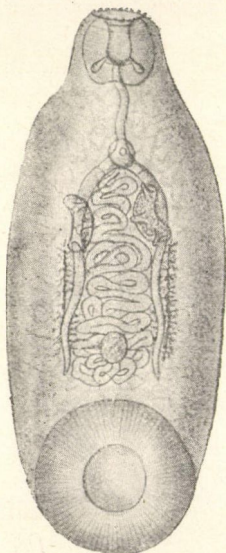
Fig. 7.

A rendelkezésemre állott öt példányt a bécsi Hofmuseum állattárának 980., 981. és 983. számú üvegeiben *Amphistoma oxycepalum* Dies. név alatt más fajokkal keverten találtam meg. A 980. számú üvegben talált három példány *Salmo* Nr. 111., a 981. számú üvegben *Salmo Pacu* = *Myletes bidens*ből, míg a 983. számú üvegből kiválogatott példány a *Salmo Pacupa* = *Myletes aureus* nevű gazdából való. E példányok között van olyan, a mely külső habitusában kis mértékben emlékeztet arra a példányra, a melyet DIESING C. M. a XXIV. tábla 8. ábrájában rajzol. (Loc. cit.)

A *test alakja* példányonként és bizonyára az összehúzódnak különböző foka szerint meglehetősen változó, valamennyi megegyezik azonban abban, hogy jobb- és baloldala erősen kerekített, minek következtében testök egészen hengeres és haránt-metszetben majdnem kört mutat. A 983. számú üvegben talált példány hengerhez hasonlít, a szívókorongtól kezdve az oeso-

* *vese* *vese* *vese* = veseforma, *here* = here.

phagus közepetájáig majdnem egyforma vastag, azontúl azonban vékonyodni kezd s a pharynx körül a legvékonyabb. (Fig. 7.) A 980. számú üvegben talált példányok egyike majdnem teljesen hengeres, de a pharynx táján hirtelen és erősen elvékonyodik, egy másik példány ellenben fölülről vagy alulról, sőt bizonyos fokig oldalról nézve is egészen kúpforma, legszélesebb a szívókorong alapja közelében s innen kezdve fokozatosan keskenyedek az oesophagus közepe tájáig, azontúl pedig erősebben vékonyodik. A 981. számú üvegben talált



7. ábra.

példány teste két végén keskenyebb, mint közepén, elől azonban feltünőbbben elvékonyodott, oldalról nézve némileg kúpforma, hátoldala tompán íves, míg hasoldala közepe táján gyengén mélyedt. Valamennyi példány hát- és hasoldala gyengén íves, a szájnylás és a szívókorong felé lejtősödött. A test hossza 5—9 mm. között változik; legnagyobb lateralis átmérője 2·2—3 mm., a legkisebb 0·5—0·6 mm., legnagyobb dorso-ventralis átmérője 2—2·8 mm. Általában különben valamennyi példány lateralis és dorsoventralis átmérője legnagyobb a csirafészek táján, illetőleg a szívókorongtól nem nagy távolságban.

A szívókorong a test hátulsó végén fekszik ugyan, de nyílásával kisebb-nagyobb mértékben a hasoldal felé tekint, oldalról erősen csonkított, széles kúphoz hasonlít (Fig. 7.), míg a hasoldalról nézve egész körre, illetőleg széles gyűrűre emlékeztet; átmérője 1·5—1·7 mm. között változik; nyílása 0·6—0·8 mm. átmérőjű és szintén körforma; izomfalazatának átmérője 0·5—0·6 mm., oldalról tekintve a hátoldalon valamivel vastagabbnak látszik, mint a hasoldalon.

A testet borító *kutikula* mindenütt egészen sima és egyforma vastag, átmérője átlag 0·009—0·018 mm. A *bőrizomtömlő* jól fejlett ugyan, de vastag réteget nem alkot, benne jól megkülönböztethetők a gyűrűs, hosszirányú és diagonális izomros-

tok. A test parenchymája dús hálózatot alkot, a melyben elszórtan apró parenchymasejtek vannak.

A *szájnyílás* a test mellső végén ül igen rövid, kúpforma kiemelkedésen, egészen körforma, peremén, valamint magában a szájüregben is apró papillák harántsorai emelkednek, átmérője 0.29—0.3 mm. A száj kúp szöveti szerkezet tekintetében emlékeztet a *Pseudocladorchis cylindricus*-éra.

A *pharynx* fölülről vagy alulról nézve széles, némileg gömbforma tömlőhöz hasonlít, szájfelőli vége meglehetősen hegyesen, két oldala tompán kerekített, hátulsó vége közepén gyengén mélyedt, minek következtében kissé kétkaréyosnak látszik (Fig. 7.); oldalról nézve két oldala közepén csúcsosan kerekítettnek, hátulsó vége ellenben meglehetősen hegyesnek mutatkozik, néha azonban két oldala tompán íves, hátulsó vége kissé ferdén metszett és gyengén bemélyedt, ezen esetben hátoldali csúcsa valamivel kiemelkedőbb. A 981. számú üvegben talált példány pharynx-a már meglehetősen nagy mértékben különbözik az előbb említettekétől, a mennyiben fölülről vagy alulról nézve háromkaréyos tömlőhöz hasonlít, jobb- és baloldala ugyanis feltűnően kerekített, hátulsó harmadában erősen bemélyedt s a majdnem egyenesre metszett hátulsó szegélylyel karéyokat nem alkot. A pharynx lateralis átmérője 0.65—0.95 mm., hossza 0.58—1 mm. között ingadozik. A pharynx ürege fölülről vagy alulról nézve meglehetősen széles tömlőhöz hasonlít, melynek legnagyobb lateralis átmérője 0.29—0.32 mm., míg dorsoventralis átmérője csupán 0.11 mm. A pharynx izomfalazata rendesen csaknem mindenütt egyforma vastag, átmérője 0.21—0.32 mm. között ingadozik, benne két sphincter különült el, melyek közül az egyik a garatnyílást, a másik ellenben az oesophagus nyílását veszi körül s ez utóbbi vastagabbnak látszik, átlagos átmérője 0.2—0.3 mm. A garattáskák külsőleg nem ismerhetők fel, mert az izomfalazatban fekszenek, majd keskeny tömlőkhöz hasonlítanak és hátulsó végük kerekített, majd pedig hegyes háromszögformák, fekvésük ferde, a mennyiben kissé ki- és hátrafelé irányulnak, a garatüregbe ennek hátulsó végén nyílnak egymástól oly távolságban, hogy köztük az oesophagus nyílásának kellő helye marad, hosszúságuk 0.18—0.2 mm., legnagyobb átmérőjük 0.05

mm. A pharynx izomfalazatának szöveti szerkezete olyan, mint a *Pseudocladorchis cylindricus*-é, de a belső meridionalis rostok rétege vastagabb.

Az *oesophagus* a pharynx hátulsó végén nyomul be az izomfalazatba, illetőleg nyilik a garatüregbe, de nem a hátulsó szegély középvonalában, hanem kissé a hasoldalon, a mi különösen akkor tűnik szembe, ha a pharynxot oldalról nézzük. A pharynxból kiinduló *oesophagus* eleinte ferdén a hasoldal felé fut, majd azonban gyengén meghajlik és ferdén hátra, meg a hátoldal felé halad, míg a gyomorágakkal találkozik; pharyngealis vége sokkal vékonyabb, illetőleg hátrafelé haladtában fokozatosan szélesedik, hátulsó vége bulbust nem alkot, hanem a két gyomorágnak megfelelőg villásan ketté ágazik. Az *oesophagus* hossza egyenes vonalban mérve 1·32—1·7 mm., legnagyobb átmérője 0·28 mm., legkisebb átmérője 0·1 mm., szöveti szerkezete olyan, mint a *Pseudocladorchis cylindricus*-é.

A *gyomorágak* az *oesophagusból* kiindulva csak alig észrevehetően mennek kifelé és eredésüktől nem messze már hátrafelé irányulnak, általában keskeny, hátulsó végük felé erősen elszűkülő tömlökhöz hasonlítanak, a test jobb- és baloldalától távol s a hátoldalhoz közeledetten fekszenek, lefutásukban kigyózó utat tesznek meg és kétszer vagy háromszor görbültek; hátulsó végükkel nem érik el a szívókorong szegélyét, úgy, hogy ettől kisebb-nagyobb hézag választja el, de sohasem akkora, mint a *Pseudocladorchis cylindricus*-éit. Mindakét gyomorág egyforma szerkezetű és lefutású, hosszúságuk 2·1—3·12 mm.

A *kiválasztó edénytörzsek* a gyomorágak alatt húzódnak el és kigyózó utat tesznek meg. A kiürítő hólyag az uterus hátulsó hurkai és a szívókorong között fekszik ferdén fölfelé emelkedve, nyílása a szívókorong hátoldali szegélye mellett fekszik a Laurer-féle csatorna nyílásától 1—1·2 mm. távolságra, orsóforma, hossza 0·065 mm. és körülötte tömlőforma mirigyekből 0·14 mm. hosszú korong van.

Az *ivarnyílás* előre húzódott, illetőleg a gyomorágak eredése előtt, az *oesophagus* elágazása alatt és kissé előtte fekszik a test mellső végétől 1·6—2·3 mm. távolságra. A genitális atriumot körülvevő izomzat gyengén fejlett és genitális korongot nem alkot.

A *herék* átellenesen a gyomorágak alatt, részben a tőlük körülzárt területen, részben azon kívül fekszenek, de az oesophagus elágazásától különböző távolságban, a mennyiben a baloldali ehhez mindig közelebb s nevezetesen 0·3—0·4 mm.-nyire fekszik, míg a jobboldali már messzebb hátrafelé, úgy, hogy a távolság közte s az oesophagus ágai között 0·5—0·7 mm. Mindkét here többé-kevésbé veseforma, néha sima fölületű, leggyakrabban azonban hasoldalukon három ujjforma kis nyújtvány emelkedik, a melyek csak kis területen haladják meg a herék körvonalait. (Fig. 7.) Az egyes herék hossza 0·45—0·7 mm., legnagyobb átmérőjük 0·26—0·19 mm. A két here egymástól meglehetősen távol és egymással nem párhuzamosan fekszik, úgy, hogy közöttük mintegy 0·3—0·4 mm.-nyi hézag marad, a melyen az uterus hurkai futnak. A herék és az oesophagus, illetőleg a gyomor ágai közötti területen fekszik a vesicula seminalis externa is. A cirrus-zacskó a hasoldalról nézve többé-kevésbé tojás-, míg oldalról nézve körteformának látszik, hossza 0·4—0·81 mm. között ingadozik, átmérője 0·2—0·6 mm., legnagyobb-részt a vesicula seminalis interna tölti ki, míg a prostatamirigyek csak kis helyet foglalnak el. A ductus ejaculatorius a metratermmel közösen nyílik a ductus hermaphroditicusba.

A *csirafészek* gömbforma, átmérője 0·2—0·35 mm., a test középvonalában a gyomorágaktól körülzárt területen fekszik a heréktől sokkal nagyobb távolságban, mint a szívókorongtól, az előbbeniéktől ugyanis 1·4—1·7 mm., az utóbbitól ellenben csupán 0·5—0·7 mm.-nyire. A petevezeték eleinte előfelé halad, magába veszi a Laurer-féle csatornát, majd hátra fordul és felveszi a receptaculum seminis s a székreservoir veztekét. A *ootyp* a csirafészek mögött és alatt fekszik, legtöbbször tojásforma tömlő, átmetszete 0·15—0·25 mm. A *Laurer-féle* csatorna kigyózva emelkedik fölfelé és nyílása a csirafészek előtt fekszik a kiürítő hólyag nyílásától 1—1·2 mm.-nyi távolságban, körülötte tömlőforma sejtekből álló korong van, melynek átmérője 0·075 mm., míg magának a nyílásnak átmérője 0·02—0·024 mm. Az *uterus* az ootypból kiindulva eleinte a test középvonalában fekszik és hátrafelé fut egészen a szívókorongig, sőt néha a hátoldalon még erre is ráfekszik, a jobboldalon kilép a gyomor-

ágaktól körülzárt területről s csaknem a test faláig fut, míg a baloldalon a gyomorágak közti területen marad, további lefutásában állandóan a hasoldalon s a gyomorágaktól körülzárt területen halad, de később a herék fölé kerül. A peték tojásformák, 0.1—0.11 mm. hosszúak és 0.065 mm. átmérőjűek.

A *székmirigyek* a hátoldalon a gyomorágak fölött, ezek mentén, a test jobb-baloldalától távol fekszenek, faalakúlag elágazódottak, mellső végük a herékig ér, sőt néha ezeket meg is haladja, hátulsó végük kissé meghaladja a gyomorágakat, eleinte a gyomorágak fölött és külső szegélyük mentén futnak, majd ezeket keresztezik és nagyrészüket a gyomorágaktól körülzárt területre kerül; hosszúságuk 1.6—2.5 mm. A két székmirigyet összekötő harántvezeték közvetlenül a csirafészek fölött húzódik el és meglehetősen nagy reservoirba megy át. (Fig. 7.)

E faj heréinek elhelyezésével, pharynxának és oesophagusának szerkezetével egyezik a *Pseudocladorchis cylindricus* Dies. fajjal, de különbözik ettől heréinek szerkezetével, gyomorágainak lefutásával, székmirigyeinek elhelyezésével, valamint csirafészkének fekvésével is.

Pseudocladorchis macrostomus n. sp.

Fig. 8.

E fajnak öt példánya állott rendelkezésemre, a melyeket a bécsi Hofmuseum állattárának 978., 980. és 983. számú üvegeiben találtam *Amphistoma oxycephalum* Dies. név alatt, más fajok társaságában. A 978. számú üvegből két fiatalabb példányt válogattam ki s ezek *Salmo* Nr. 121. jelzésű gazdából valók. A 980. számú üveg csupán egy példányt tartalmazott *Salmo* Nr. 111. jelzésű gazdából, míg a 983. számú üvegben két fiatalabb példányt találtam, melyeknek gazdája a *Salmo Pacupa* = *Myletes bidens*.

A test fölülről vagy alulról nézve bizonyos fokig papueshoz hasonlít, legszélesebb hátulsó végén, a szívókorongnál, hátulsó hamadában s illetőleg a csirafészek táján kissé befűződött, majd aztán a test közepétől a pharynx alapjáig ismét kiszélesedik és oldalai tompán ívesek, míg a pharynx alapján

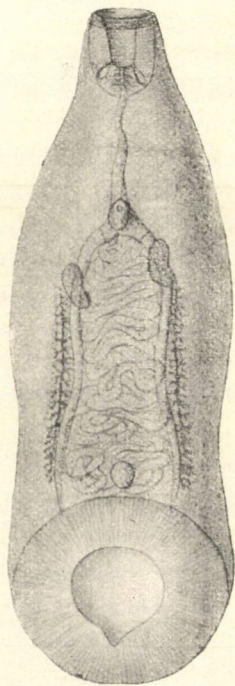
hirtelen és feltűnően elkeskenyedik (Fig. 8.); transversalis átmérője legnagyobb a szívókorongnál s itt 1·5 mm., majdnem ugyanakkora a herék s pharynx alapja közötti területen, míg a pharynx alapjától a szájnilyásig csupán 0·46 mm. Oldalról tekintve a test keskeny kúphoz hasonlít, a mely a szívókorongtól a szájnilyásig fokozatosan keskenyedik, alapját a szívókorong, egyenesre metszett csúcsát a szájnilyás alkotja; a hát- és hasoldal egyenes, a jobb és baloldal tompán kerekített, úgy, hogy a transversalis átmérő csaknem körforma; a dorsoventralis legnagyobb átmérője 1·5 mm., míg a legkisebb 0·46 mm. A példányok hossza 4—4·5 mm. között ingadozik.

A *szívókorong* a test hátulsó végén fekszik, oldalról nézve széles, ferdén metszett csomka kúphoz, hasoldalról nézve ellenben széles gyűrűhöz hasonlít (Fig. 8.), transversalis átmérője 1·5 mm. s ugyanakkora a sagittalis átmérője is; falazatának átmérője 0·3—0·4 mm. s ugyanakkora üregének mélysége is. A szívókorong nyílása ferdén hátra és a hasoldalra tekint, átmérője 0·51 mm.

A *test kutikulája* mindenütt síma és csaknem egyforma vastag, átmérője átlag 0·007—0·009 mm. A bőrízomtömlő rostjai közül legerőteljesebben fejlettek a hosszirányúak, legvékonyabbak a gyűrűs rostok.

A *szájnilyás* a test mellső végén fekszik, egyenesre metszett, szegélyén papillák nincsenek, átmetszete lencseforma és átmérője 0·25 mm., közte és a pharynx között izomkúp nincs.

A *pharynx* közvetlenül a szájnilyásnál kezdődik, dorsoventralis vagy megfordított helyzetben széles, tojásforma tömlőhöz hasonlít, szájnilyás felőli vége egyenesre metszett, míg a szájellenes meglehetősen hegyesen, de egyenletesen kerekített, oldalai alig észrevehetően ívesek, csaknem egyenesek. Oldalról nézve a pharynx hátulsó végén ferdén metszett tömlőhöz ha-



8. ábra.

sonlit és két csúcsa különült el, melyek közül a ventralis tompábban kerekített, mint a dorsalis, mely utóbbi kiállóbb, egész hossza 0·7—0·8 mm., átmérője 0·51 mm. A pharynx izomfalazata csaknem mindenütt egyenlő vastag, átmérője 0·13—0·2 mm.; belső ürege harántátmetszetben lencseformát mutat, a mennyi-ben dorsoventralis irányban keskenyebb, mint transversalis kiterjedésben, transversalis átmérője 0·22 mm., dorsoventralis átmérője ellenben 0·1—0·11 mm.; egész hossza 0·45 mm. A pharynx izomfalazatában két sphincter fejlődött ki, egyik épen a szájnyílás határán fekszik, átmérője 0·1 mm., a másik ellenben az oesophagust veszi körül s ennek átmérője 0·2 mm. A pharyngealis táskák külsőleg nem különültek el, hanem az izomfalazatban fekszenek symmetrikusan az oesophagus két oldalán, de ferdén ki- és hátrafelé, az egyes táskák keskeny tömlőhöz hasonlítanak, 0·16 mm. hosszúak és legnagyobb átmérőjük 0·05 mm.

Az *oesophagus* a pharynx hátulsó, ferdén metszett végének közepén nyílik be a pharyngealis üregbe s az izomfalazatban a már fentebb említett hatalmas sphincter veszi körül; a pharynx falazatából való kilépése után nem nagy távolságban egy kis bulbussá tágul, de ennek falazata semmiben sem különbözik az oesophagus többi részének falazatától. Az oesophagus különben eleinte ventralis irányban halad ferdén, majd tompaszög alatt meghajlik és ferdén hátra és dorsalis irányban fut, a gyomorágak közelében villásan ketté ágazik és bulbust nem alkot; egész hossza, a pharynx belső üregéből a gyomorágakig, egyenes vonalban mérve 1·1—1·2 mm.

A *gyomorágak* eredésüknél csak igen kis mértékben hajlagnak kifelé és majdnem egyenesen hátrafelé futnak a test oldalaitól nagy távolságban, de a hátoldalhoz közeledetten, lefutásukban a test közepe táján befelé íveltek s így némileg kigyózó lefutásúak, hátrafelé fokozatosan vékonyodnak, zárt, hegyes hátulsó végükkel a szívókorong fölött helyezkednek el; egész hosszuk 1·6 mm. (Fig. 8.)

Az *ivarnyílás* az oesophagus elágozása előtt és alatt fekszik, tehát a gyomorágaktól körülzárt területen kívül, majdnem a test mellső harmadában, a szájnyílástól 1·5 mm. távolságban.

Genitalis korong nem fejlődött ki s az ivarnyílás környéke csupán kis szemölcs alakjában emelkedik ki. (Fig. 8.)

A *herék* átellenesen fekszenek a gyomorágak alatt, de nem a gyomorágaktól körülzárt területen, hanem egymástól 0.2 mm. távolságra közvetlenül a gyomorágak alatt; a bal here mindig közelebb fekszik az oesophagus ágához, mint a jobboldali s e tekintetben hasonlít e faj a *Pseudocladorchis nephrodorchishoz*. Mindkét here némileg veseforma, fölülete egészen sima, hossza 0.22 mm., átmérője 0.17 mm. A vesicula seminalis externa többszörösen felhurkolt. A cirrus-zacsó körteforma, hossza 0.19 mm., legnagyobb átmérője 0.15 mm., belsőjében a vesicula seminalis interna többször felhurkolt, de mellette a protastamirigyek is helyet találnak. A ductus ejaculatorius a metratermmal közösen nyílik egy ductus hermaphroditicusban.

A *csirafészek* a gyomorágaktól körülzárt területen fekszik, a középvonalban, a hátoldalhoz közeledetten s a szívókoronghoz háromszorta közelebb, mint a herékhez, egészen gömbforma, átmérője 0.15 mm. A petevezeték hátra- és lefelé fut a csirafészek mögött és alatt fekvő tömlőforma ootyphoz: lefutásában magába veszi a *Laurer*-féle csatornát, a receptaculum seminis s a székreservoir vezetékét. A *Laurer*-féle csatorna a csirafészek fölött emelkedik a hátoldalra, kigyózó lefutású, nyílása a szívókorongtól, illetőleg a porus excretoriustól 0.8—1 mm.-nyire fekszik, körülötte mirigyekből álló korongot nem tudtam megkülönböztetni. Az *uterus* a hasoldalon fekszik, eleinte a szívókorong felé fut, majd előre kanyarodik és egész lefutásában a gyomorágak közötti területen marad, elől a herék között és fölött alkot hurkokat.

A *székmirigyek* a test két oldalától távol, a gyomorágak külső szegélye mentén és a gyomorágak fölött húzódnak el a heréktől kezdve a szívókorong határáig, hosszuk 1.2 mm. Minden egyes székmirigyen a mirigytömlők faalakulag elágazottak. A két nagy mirigycomplexumot összekötő harántereszték a csirafészek fölött húzódik el és e mögött reservoirt alkot. (Fig. 8.).

A *kiválasztó edénytörzsek* a gyomorágak alatt haladnak

kigyózva. A *kiürítőzacskó* az uterus hátulsó hurkai mellett fekszik ferdén föl- és hátrafelé irányuló helyzetben, kivezető nyílása a szívékorong fölött nyílik és így főleg akkor látható, ha az állatka a hasoldalán fekszik.

E faj heréinek és női ivarszervének szerkezetével nagyon hasonlít a *Pseudocladorchis nephrodorchis*hoz, különbözik azonban ettől testének és garatjának alakjával s az utóbbinak szerkezetével is.

Chiorchis FISCHOED.

Chiorchis FISCHOEDER F., 6. p. 621.

E genust FISCHOEDER F. már 1901-ben jellemezte az emlősökben élősködő *Chiorchis fabaceus* (DIES.) egyetlen faj jellemei alapján. Nekem sikerült e genusnak 3 másik fajt megtalálnom délamerikai halakból. Az ötödik faj kétségtelenül a DIESING C. M.-féle *Anphistomum lunatum*, mely délamerikai vízi madarak élősködője s a melyet FISCHOEDER F. fentemlített dolgozatában nem oszt be egyik genusba sem, hanem csupán független gyanánt tárgyal.

Miután FISCHOEDER F. a genus jellemezését csupán a *Chiorchis fabaceus* (DIES.) szemelőtt tartásával állapította meg, szükségesnek látom azt a más négy faj tekintetbe vételével az alábbiakban némileg módosítani.

A test egyenes vonalban megnyúlt. A hasoldal lapított vagy gyengén íves, a hátoldal leggyakrabban íves, a jobb- és baloldal majd éles, majd pedig többé-kevésbé tompán kerekített. A szívékorong kifejezetten hasoldali fekvésű, a test hátulsó végére huzódott. A pharynxnak egy vagy két sphinctere van. A pharyngealis táskák különböző nagyságok, legtöbbször már kívülről is fölismerhetők. Az oesophaguson a gyomorágak eredése előtt izmos falazatú bulbus van. Az oesophagus a pharynx hasoldalán vagy hátulsó végén a pharyngealis táskák előtt vagy között ered. A gyomorágak a test két oldalfalától távol, többé-kevésbé kigyózóan futnak le. Ivári korong nem különült el. A herék egymás mögött fekszenek, különbözőképpen ágaskodó, az ágak leggyakrabban karélyformák, különböző irányban állók. A cirrus-zacskó megvan. A székmirigyek majd a gyomorágak

külső szegélye mentén, majd a gyomorágakon belül feküsznek vagy pedig ezeket keresztezik, különböző hosszúságúak, a folliculusok leggyakrabban gömbformák, faalakulag csoportosultak. A csirafészek a hasoldalhoz közeledetten, a hátulsó here s a szívókorong között fekszik. A porus excretoriusnak záró korongja van.

A genusnak eddig ismert öt faja közül csupán a következő három állott rendelkezésemre.

Chiorchis oxycephalus (DIES.)

Fig. 9.

Amphistoma oxycephalum DIESING C. M. 4. p. 251. Tab. 24. Fig. 1--9.

DIESING C. M. e fajt a következőleg jellemzi: «*A. corpore polymorpho, planiusculo, compresso aut tereti, oblongo-ovato, aut ovato-lanceolato, ore terminali orbiculari; acetabuli suctorii laterali orbiculari hinc postice sinuati limbo prominulo.*» (Loc. cit.) s a leírásban sem mond sokkal többet.

DIESING C. M. feljegyzései szerint e fajt NATTERER több halfajnak bélcsatornájában találta, nevezetesen a következőkben:

1. *Salmo auratus* NATT. Nr. 9. három hime Cuyababól, 1824 október és november havában.

2. *Salmo Pacu* NATT. Nr. 43 = *Myletes bidens*, egy him és öt nőtény Cuyaba termelőhelyről, 1824 márczius, május és október hónapban.

3. *Salmo Pucupeba* NATT. Nr. 26 = *Myletes aureus*, két him, egy nőtény Rio Parana termőhelyről, 1823 április és június hónapban, egy him Rio Araguay termőhelyről, 1823 október havában.

4. *Silurus megacephalus* NATT. Nr. 30 = *Pimelodus megacephalus*, egy him Cuyaba termőhelyről, 1824 okt. havában.

Vizsgálataim során a bécsi Hofmuseum állatárából igen gazdag anyag állott rendelkezésemre a következő számú üvegekben:

1. Nr. 977. *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt számos fiatal példány *Salmo Pacu* = *Myletes bidens* gazdából.

2. Nr. 978. *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt 4 példány *Salmo* Nr. 121. gazdából.

3. Nr. 980. *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt sok fiatal példány *Salmo* Nr. 111. gazdából.

4. Nr. 981. *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt öt ivarérett példány *Salmo Pacu* = *Myletes bidens* gazdából.

5. Nr. 982. *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt több példány *Salmo Pacupeba* = *Myletes aureus* gazdából.

6. Nr. 983. *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt számos ivarérett példány *Salmo Pacupeba* — *Myletes aureus* gazdából.¹

7. Nr. 984. *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt több példány *Salmo* Nr. 80. gazdából.

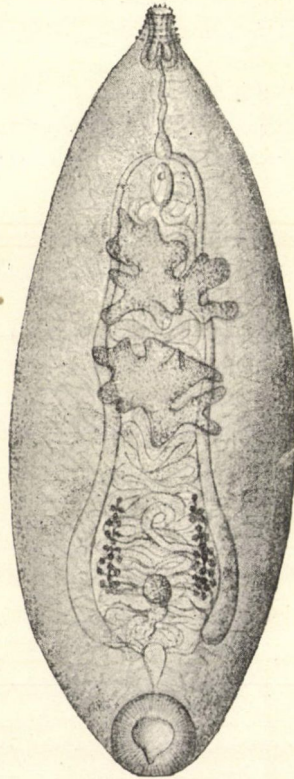
8. Nr. 985. *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt sok fiatal és ivarérett példány *Salmo Pacupeba* = *Myletes aureus* gazdából.

9. Nr. 988. *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt néhány fiatal példány *Salmo Pacu* = *Myletes bidens* gazdából.

Itt megjegyzem azt, hogy a bécsi Hofmuseum állattárának 986. és 987. számú üvegében *Amphistoma oxycephalum* DIES. név alatt talált példányok a *Pseudocladorchis cylindricus* (DIES.) fajhoz tartozóknak bizonyultak s így a *Chiorchis oxycephalus* (DIES.) gazda állatainak sorából a *Silurus megacephalus* = *Pimelodes megacephalus* törlendő.

A test általános alakja, mint azt már DIESING C. M. is helyesen megjegyzi, a kor, illetőleg a fejlettség foka s az összehúzódottság mértéke szerint is még ugyanazon gazdaállatban is igen tág korlátok között ingadozik. A fiatal példányok ugyanis a legtöbbször hengeres, megnyult pálczikaformák, de mellső végük felé kis mértékben keskenyednek, a garat körül pedig feltűnően megvékonyodottak, hát- és hasoldaluk alig észrevehetően íves, csaknem egyenes, jobb- és baloldaluk pedig meglehetősen tompán kerekített. Különösen a 977., 985. és 988. számú üvegekben találtam ilyeneket. Ezekhez igen közel állanak azok a hengeres testű fiatalok, a melyek némileg orsóra emlékeztetnek, a mennyiben testük közepe táján legszélesebbek, míg mellső és hátulsó végük felé keskenyednek, de mellső

végük felé feltűnően erősebben, hátoldaluk többé-kevésbé egyenes, hasoldaluk meglehetősen íves, jobb- és baloldaluk észrevehetően kerekített; különösen a 977., 982. és 984. számú üvegekben találtam ilyeneket. De ezekhez hasonlókat találtam a 988. számú üvegekben is. Nem ritkák azonban a fiatalabb, sőt még a teljesen kifejlett példányok között is a teljesen hengeres és rövid testűek sem, a melyek csaknem mindenütt egyforma átmérőjűek s csupán szájvégükön és szívókorongjuknál vékonyabbak; ilyeneket találtam a 980. és 982. számú üvegekben, ezeknek jobb- és baloldala tompán kerekített. Számos példánynak teste azonban már kisebb-nagyobb mértékben lapított, tojás-, paizs- vagy lándsaforma; ezek között azonban találkoznak olyanok is, a melyek némileg átmenetet alkotnak a hengeresekhez. A fiatalabb példányok között van ugyanis némileg tojásforma olyan, melynek teste csaknem hengeres, jobb- és baloldala meglehetősen élesen kerekített (983. és 988. számú üvegekben); de vannak aztán kissé lapított, megnyult tojásforma olyan példányok is, melyeknek jobb-baloldala már éles, csak igen kis mértékben kerekített. (978., 980. és 981. számú üvegekben.) Igen feltűnőek a teljesen lapított, tojás- vagy pajzsforma példányok, melyeknek hát- és hasoldala csaknem egyenes, jobb- és baloldala pedig éles; a 981. számú üvegben lévők között olyanok is találkoztak, melyeknek teste elől erősen kiszélesedett, míg hátul kihegyesedett. A test típusos alakjának különben nézetem szerint a lapos, lándsaforma tekinthető (Fig. 9.), a mennyiben az ilyen példányok nemcsak hogy mindannyian teljesen ivarérettek és sok petét tartalmaznak, hanem egyuttal



9. ábra.

a legnagyobbak is, mint a 983. és 985. számú üvegekben lévők, a melyeknek hát- és hasoldala csaknem egyenes, jobb- és baloldala pedig mindig éles.

A test méreti viszonyai szintén tág korlátok között változnak a kor s az összehúzódottság különböző foka szerint. A test hossza 2·2—9·5 mm., transversalis legnagyobb átmérője 0·7—3·5 mm., dorsoventralis legnagyobb átmérője 0·5—2·3 mm.

A *szívókorong* a test hátulsó végén, de nyílásával a hasoldal felé fekszik, egészen körforma, néha azonban a nyílás hátulsó szegélyén kissé bemetszett, mekkorasága példányonként igen változik, a fiatalabb példányoké aránylag feltűnő nagy, míg a nagytestű kifejletteké meglehetősen kicsiny, átlagos átmérője 0·72—1·2 mm., izomfalazatának átmérője átlag 0·2—0·35 mm. és vékonyfalazatú párkányt visel; nyílásának átmérője 0·2—0·5 mm.

A *test kutikulája* mindenütt sima és csaknem egyforma vastag, átmérője 0·0075—0·01 mm. Igen sok példánynak mellső, feltűnően elkeskenyedett testvégén a száj peremén s e mögött 5—6 gyűrűs sorban sajátságos papillák emelkednek, a melyek majd hosszabbak, ujjformák, majd rövidebbek, kúpszerűek. A bőr-izomtömlő rostjai közül leggyengébbek a gyűrűsek, legerősebbek a hosszirányúak, de jól fejlettek a diagonalisak is.

A *szájnyílás* a test mellső, orrmányszerűleg elkeskenyedett végén fekszik, némileg ellipszisforma, szegélye majd sima, majd pedig papillákkal fegyverzett, átmérője átlag 0·1—0·13 mm. A szájüreg közvetlenül a pharyngealis üregbe nyílik, mert a száj nem ül külön izomkúpon. (Fig. 9.)

A *pharynx* közvetlenül a szájnyílásnál kezdődik, egészben véve körteforma, hossza 0·4—1 mm., legnagyobb átmérője 0·3—0·4 mm., legkisebb átmérője 0·1—0·2 mm. között ingadozik, két oldala az oesophagus beszájadzása előtt befűződött, ezentúl feltűnően kerekített, hátulsó vége közepén bemetszett s így két karélyra tagolódott, izomfalazata 0·05—0·06 mm. átmérőjű, szájfelőli végén jól fejlett sphincter van, melynek átmérője 0·03—0·04 mm. A két pharyngealis táská erőteljesen fejlődött és némileg már külsőleg is felismerhető; mindenik garattáska tömlőforma, legnagyobb átmérője 0·1—0·13 mm., többé-kevésbé

egymással párhuzamosan fekszenek és zárt végükkel egyenesen hátra tekintenek, a kettőjük közötti választófal hossza 0·15—0·3 mm. Az izomfalazatban a külső meridionalis vagy hosszirányú réteget, a belső gyűrűs vagy æquatorialis rostokat s az ezektől kifelé fekvő hosszirányú rostokat tudtam megkülönböztetni az erőteljesen fejlett radialis rostokon kívül.

Az *oesophagus* a pharynx hasoldalán ered a garattáskák közötti választófal előtt, eleinte a hasoldal felé és kissé hátrafelé irányul, majd tompa zúg alatt a hátoldal felé fordul s aztán a hátoldalhoz közeledve hátrafelé fut; a gyomorágak elágazása előtt többé-kevésbé tojásforma, vastag izomfalazatú bulbust alkot; hossza egyenes vonalban mérve 0·8—1·1 mm., legnagyobb átmérője 0·15—0·17 mm.

A *gyomorágak* eredésük pontjától kezdve majd eleinte íveltlen kissé oldalt s aztán hátrafelé, majd pedig legtöbbször csaknem egyenesen hátrafelé futnak, a test két oldalától távol s a hátoldalhoz közeledetten fekszenek, lefutásukban mindig kigyózó utat irnak le, három íves kiemelkedést és két bemélyedést mutatnak; hátrafelé haladtukban fokozatosan vastagodnak, hátulsó, legvastagabb végük a szívókorongtól átlag 0·4—0·65 mm.-nyire van; egész hosszuk 1·5—5·4 mm. között változik (Fig. 9.). A példányok között találtam olyanokat is, a melyeknek gyomorágai többszörösen kigyóztak voltak, sőt bizonyos fokig hurkokat is alkottak. (Nr. 985.) Igen gyakori a gyomorágak szabálytalan lefutása az erősebben összehuzódott, ellapult példányokban.

A *kiválasztó edénytörzsek* a gyomorágak alatt és ezek mentén haladnak, a két here közötti területen, illetőleg a gyomorágak első bemélyedésénél két ágra oszlanak, melyek közül az egyik ág mindkét oldalon a gyomorág belső szegélye mentén a cirrus-zacskó felé, a másik a gyomorág külső szegélye mentén majdnem a pharynxig fut s innen gyakran visszahajlik; legnagyobb átmérőjük 0·08—0·1 mm. A *kiürítő hólyag* a héjmirigy s a szívókorong között fekszik, ferdén hátra- és fölfelé halad, nyílása a Laurer-féle csatorna nyílásától 0·5—1·1 mm. távolságban fekszik, elkülönült sphincterje kis tömlőforma sejtekből áll.

Az *ivarnyílás* a test mellső harmada előtt fekszik az oesophagus bulbosa mögött, a szájnyílástól átlag 0·8—1·8 mm. távolságban, az összehúzódott példányokon természetesen mindig közelebb, mint a teljesen kinyultakon; környezete kis szemölcs alakjában emelkedik ki, de izomzata genitalis korongot nem alkot. Az ivarnyílásból számos példányon ductus ejaculatoriust tartalmazó cirrus emelkedik ki, mely alapján gyengén befűződött, csúcsán pedig kerekített. (Fig. 9.)

A *herék* legnagyobb részben a gyomorágaktól körülzárt területen, még pedig a két íves kiemelkedés között s itt egymás mögött fekszenek a gyomorágak alatt. Mindenik here többszörösen elágazódott, az egyes ágak majd karélyformák, különösen ha a példány fiatal; majd pedig, ha hosszabbak, ujjformák vagy csúcsaikon ismét elágazottak, különösen ha a példány idősebb. (Fig. 9.) Az ágak legnagyobbbrészt a herék szegélyein emelkednek, néha azonban a hasi oldalon is mutatkozik egy-két karély. A herék főtömegének harántátmérője a fejlettség foka szerint változó, a fejlett példányoké átlag 1—1·4 mm., az ágak vagy karélyok hossza 0·1—0·4 mm. A vesicula seminalis externa alig észrevehető, míg a cirrus-zacskó jól fejlett, majd körte-, majd pedig megnyult tojásforma, hossza 0·3—0·8 mm., legnagyobb átmérője 0·1—0·5 mm. A vesicula seminalis interna többszörösen felhurkolt, de a cirrus-zacskó belsejét nem tölti ki egészen és helyet ad a prostatamirigyeknek is. A ductus ejaculatorius a metratermmel közösen nyílik és így ductus hermaphroditicust alkot.

A *csirafészek* a gyomorágaktól körülzárt területen, a hátulsó herétől átlagosan 1·2—1·4 mm., a szívókorongtól pedig csupán 0·6—1·2 mm. távolságra a középvonalban és kissé a hátoldalhoz közeledetten fekszik, többé-kevésbbé gömb- vagy tojásforma, átmérője 0·26—0·4 mm. A *petevezeték* hátrafelé fut s aztán a hasoldal felé hajlik a csirafészek mögött és alatt fekvő ootyphoz. Az *ootyp* feltűnő nagy, harántfekvésű tömlő, mely néha két részletre fűződött be, hossza 0·7—0·9 mm. A *Laurer-féle csatorna* kigyózó lefutású, a kiürítő nyílástól 0·5—1·1 mm. távolságra fekszik, sphinctere nincs; közelében nyílik a petevezetékbe a receptaculum seminis is. Az *uterus*

eleinte hatrafelé fut, majd előre kanyarodik s a gyomorágaktól körülzárt területen halad előre a hátulsó heréig a hasoldalon, majd a herék fölé kerül és a cirrus-zacsó oldalán elhaladva, a ductus hermaphroditicusba nyílik. A peték tojásformák, hosszúságuk 0·07—0·13 mm., legnagyobb átmérőjük 0·05—0·07 mm. (Fig. 9.)

A *székmirigyek* a gyomorágaktól körülzárt területen, ezekkel egy magasságban fekszenek, feltűnő rövidek, a mennyiben egész hosszuk csupán 0·9—1·23 mm. és csupán a gyomorágak hátulsó mélyedéseig nyulnak fel. Mindenik székmirigy faalakúlag elágazódott, de a hátulsó végén az ágak hosszabbak és nagyobb számúak, mint a mellső vég felé, a hol a székfoliculusok csupán gumókat alkotnak. A székfoliculusok a legtöbbször gömbformák. A két székmirigyet összekötő harántereszték a csirafészek mögött fut és meglehetősen nagy székeservoirt alkot. (Fig. 9.)

Chiorchis dilatatus n. sp.

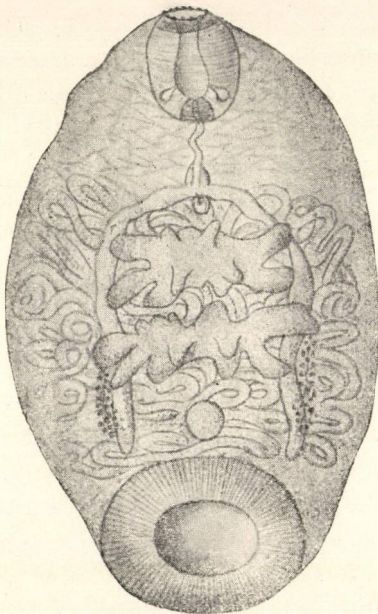
(Fig. 10.)

Teste széles tojásforma, hátul kerekített, elöl kihegyesített, lapos, két oldala éles, tompán íves (Fig. 10.); hossza 8 mm., legnagyobb transversalis átmérője közepén 5 mm. Nem lehetetlen azonban, hogy a konzerválás következtében meglehetősen mértékben összehúzódott és megrövidült, a mire a belső szervek elhelyezése után joggal lehet következtetni, minek alapján a test hossza valamivel nagyobbra s a transversalis átmérő kisebbre is vehető.

A *szívókorong* a test hátulsó végén, de teljes mértékben a baloldalon fekszik és nyílása egészen a hasoldal felé tekint, többé-kevésbé körforma ugyan, de transversalis átmérője nagyobb a sagittalisnál, az előbbi ugyanis 2·9 mm., az utóbbi 2·4 mm. Az izomfalazat mindenütt egyforma vastag, átmérője 0·6 mm., róla meglehetősen magas perem emelkedik. A korongnyílás harántúl fekvő ellipszishez hasonlít, transversalis átmérője 1·7 mm. (Fig. 10.)

A *testet borító kutikula* mindenütt egyforma vastagnak látszik, vastagsága átlag 0·19—0·2 mm., egészen síma s csupán a

szájnyílás körül mutat gyűrűzöttséget, a mi az összehúzódottságnak az eredménye. A *bőrízomtömlő* rostjai közül csupán a gyűrűseket és a hosszirányúakat tudtam felismerni; az elsők feltűnő vastagok, átmérőjük 0·03—0·04 mm., a hosszirányúak ellenben rendkívül vékonyak, alig 0·002 mm. vastagok. A test parenchymájában a hálózat aránylag ritka, illetőleg a közök nagyok, ez



10. ábra.

zel kapcsolatosan a hálózat fonalai meglehetősen vastagok, izomszerűek. A test különböző pontjain, különösen pedig a szívókorong belső határának mentén s a pharynx és a gyomorágak eleje között finoman szemecskés parenchymaanyag is különült el, a melyben egészen átlászó, gömbforma sejtek vannak magánosan vagy különböző nagyságú csoportokban szétszórva. A sejtek átmérője átlagosan 0·1—0·12 mm.

A *szájnyílás* a test mellső végén fekszik gyengén fejlett szájkúpon, a melynek izomzata csak kis mértékben fejlett. A szájnyílás szegélyén és a szájüregben apró papillák emelkednek; átmérője 0·4 mm.

A *pharynx* némileg tojásforma tömlőhöz hasonlít, két oldala egyenletesen és tompán íves, hátulsó vége kerekített, ürege körteforma tömlőhöz hasonlít, egész hossza 1·3 mm., legnagyobb transversalis átmérője 1·2 mm. Az izomfalazat átlagos vastagsága 0·4 mm., külső határát hosszirányú, illetőleg meridionalis rostok alkotják, belső határán gyűrűs rostok kettős rétege fejlett ki, a melytől kifelé meridionalis rostok rétege következik; a két határreteg között radialis rostok futnak, a melyek különbözőleg ágazottak, de aránylag vékonyak. A pharynx izomfalazatában két sphincter fejlődött ki, az egyik a garat szájvégén, másik hátulsó

végén az oesophagus körül s illetőleg a két pharyngealis táská között, a szájvégi gyengébb, átmérője 0.14 mm., a hátulsó erősebb és átmérője 0.2 mm. A pharyngealis táskák aránylag kicsinyek, tömlőformák, az izomfalazatban olyformán fekszenek, hogy külsőleg nem ismerhetők fel, szélesebb, kerekített és zárt végükkel ki- és hátrafelé tekintenek, hosszúságuk 0.22 mm.

Az *oesophagus* a pharynx hátulsó végén nyomul be a pharyngealis izomfalazatba, a melyben az említett sphincter veszi körül; lefutásában, bizonyára a test összehúzódnaként következtében, többször hurkolt, hátulsó végén erős bulbus fejlődött ki, a mely némileg tojásforma, átmérője mintegy 0.22 mm.

A *gyomorágak* az oesophagus bulbusa alatt erednek, eleinte a test két oldala felé futnak, majd ívelten hátrafelé hajlanak s aztán gyengén kigyózva a test két oldalától távol, a hátoldalhoz közeledetten haladnak hátra a szívókorong szomszédságáig, a melytől zárt végük 0.25—0.3 mm. távolságra van; hosszúságuk 2.7 mm. Nem lehetetlen azonban, hogy a gyomorágak egyenes lefutásúak és ezzel kapcsolatosan hosszabbak is, s csupán a test megrövidülése miatt vették fel a kigyózó lefutást. (Fig. 10.)

Az *ivarnyílás* az oesophagus bulbusa mögött és alatt fekszik a szájnnyílástól 2.3 mm. távolságra, körületén genitális korong nem fejlődött ki.

A *herék* egymás végtében fekszenek a gyomorágaktól körülzárt területen és ezek alatt egymáshoz közeledetten. Mindenik here transversalis irányban megnyult, 2.08 mm. átmérőjű, dúsan elágazódott, még pedig karély- vagy ujjforma ágai nemcsak a jobb és bal oldalon, hanem a hát- és hasoldalon is egyaránt emelkednek (Fig. 10.). A vas efferenseket nem bírtam felismerni. A vas deferens lefutásában vesicula seminalis externává duzzad. A cirrus-zacsó tojásforma, átmérője 0.46 mm., belsejében nem csupán a vesicula seminalis interna foglal helyet, hanem a prostatamirigyek is. A ductus ejaculatorius a metratermmel közösen nyílik egy ductus hermaphroditicusban.

A *csirafészkek* gömbforma, átmérője 0.75 mm., a gyomoroktól körülzárt területen, a test középvonalában a hasoldalra húzódottan fekszik a szívókorongtól 0.2 mm., a hátulsó herétől 1 mm. távolságra. A petevezeték hátra és kissé fölfelé fut, mi-

után a körteforma nagy ootyp a csirafészek mögött és fölött fekszik (Fig. 10.). A *Laurel*-féle csatorna nyílása kevéssel a csirafészek elé húzódott s a porus excretoriustól mintegy 0.8 mm. távolságra van; körületén sphinctert nem bírtam megkülönböztetni.

Az *uterus* a csirafészek és a hátulsó here között a két gyomorág közti területen a hátoldal közelében fut, de nemsokára a hasoldalra kerül s az egész hasoldalt a jobb oldaltól a balig betöltve, többszörösen hurkoltan fut a herék fölött a cirrus-zacsokig, mely mellett leereszkedve, a ductus hermaphroditicusban végződik.

A *székmirigyek* faalakúlag elágazottak, mellső végük sokkal keskenyebb a hátulsónál, a gyomorágak fölött, a test oldalfalaitól távol fekszenek, még pedig hátulsó felükkel a gyomorágak közti területen, mellső felükkel ezenkívül a gyomorágak külső szegélye mentén s így ezeket mintegy keresztezik (Fig. 10.). A székfolliculusok majd karélyosak, majd gömbformák. Az egyes székmirigyek a gyomorágak végének közelében erednek s a hátulsó here mellső szegélyéig emelkednek, hosszúságuk mintegy 2 mm. A két székmirigyet összekötő harántvezeték a csirafészek fölött halad el, a székmirigyek hátulsó végén ered, nagy reservoirt alkot.

A *peték* tojásformák, 0.15 mm. hosszúak, legnagyobb átmérőjük 0.08 mm., a cocon kupakos, hátulsó végén sajátságos tapadókorong van, a melynek közepén kráterszerű halomból igen rövid, kocsányszerű nyujtvány emelkedik ki.

E fajnak egyetlen példányát Prof. ANISITS J. D. gyűjtötte 1903. év folyamán paraguayi *Colossoma brachypomá*-ból a *Chiorchis papillatus* Dad. társaságában. A genus többi fajától több tekintetben különbözik; legszembevetőbb jellemvonása a pharynx alakja és szerkezete, az oesophagus kiindulása a pharynxból, a herék sajátságos elágazása s az uterus lefutása.

Chiorchis papillatus n. sp.

Fig. 11.

E fajnak számos példánya állott rendelkezésemre; a legtöbbet a Prof. ANISITS J. D.-től Paraguayból küldött *Colossoma brachy-*

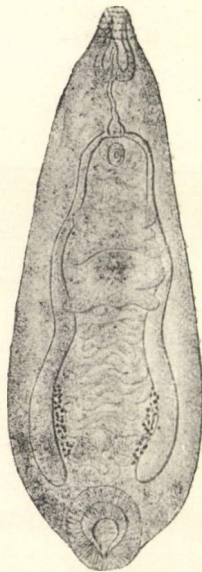
poma nevű hal gyomordarabkájában találtam, míg a bécsi Hof-museumnak rendelkezésemre állott anyagában csupán a következő két üvegben leltem meg pár képviselőjét:

1. Nr. 950. *Amphistoma ferrum equinum* Dies. név alatt a *Doras murica* = *Cataphractus murica* halból két példány.

2. Nr. 988. *Amphistoma oxycephalum* Dies. név alatt a *Salmo Pacu* = *Myletes bidens* halból, a *Chiorchis oxycephalus* (Dies.) fajjal keverten több példány.

A test általános alakja meglehetősen változatosnak mutatkozik a konzerválás révén történt különböző fokú és irányú összehúzódás következtében. A tipusos példányok teste sárgarépaforma, hengeres, elől hegyes, keskeny, hátrafelé a szívókorong mellső határáig fokozatosan szélesedik, a szívókorongtól kezdve ismét elkeskenyedek (Fig. 11.). Ilyeneket találtam a paraguayi s a 988. számú üvegben lévő példányok között; az utóbbiak között találkozott azonban olyan is, a melynek teste elől feltűnően elkeskenyedett, szívókorongja erősebben kiemelkedett, hát- és hasoldala pedig kissé lapított volt. A 950. számú üvegben talált példányok az előbbeniektől kis mértékben már különböznek, a mennyiben testök egészen hengeres, csaknem mindenütt egyforma átmérőjű, csupán a mellső test végén keskenyedett el feltűnően. Ezekhez nagyon hasonlítanak a paraguayi példányok között a megrövidült, vastag hengerre emlékeztetők, a melyek a hosszirányban való egyenletes összehúzódás és a harántirányban való egyenletes kiterjedés eredményei. A typustól legeltérőbb alakúak azok a paraguayi példányok, melyeknek teste fölülről nézve többé-kevésbé tojásforma, elől hegyesebb, mint hátul, hát- és hasoldaluk lapított, jobb-baloldaluk éles, csak kis mértékben kerekített. A hengeres testű példányok hasoldala többé-kevésbé egyenes, míg hátoldala gyengén íves.

A test méreti viszonyai az összehúzódottság foka és módja



11. ábra.

szerint igen változó; a test hossza 3·5—5·5 mm., legnagyobb szélessége 1·5—2·7 mm., magassága 1·5—2·7 mm., leghosszabbak természetesen a typosos répaforma, legrövidebbek az összehúzódtott lapos példányok, a melyek egyúttal legszélesebbek és magasságuk a legkisebb.

A *szívókorong* a test hátulsó végén, nyílásával a hasoldal felé fekszik, egészen körforma, a nyílás hátulsó szegélyén bemetszett, átmérője 0·8—1 mm., nyílása széles körforma, elhegyesedett részletével hátrafelé tekint; izomfalazatának átmérője 0·1—0·2 mm., a nyílás átmérője 0·2—0·25 mm.

A *test kutikulája* mindenütt sima és csaknem egyforma vastag, átmérője 0·08—0·01 mm. Valamennyi példánynak mellső, elkeskenyedett testvégén, a szájperemén s e mögött 5—6 gyűrűs sorban sajátágos papillák emelkednek, a melyek legtöbbször kúpszerűek.

A *bőrizomtömlő* csupán gyűrűs és hosszirányú rostokból áll; a gyűrűs rostok vékonyabbak, tömötten sorakoznak egymás mellé, míg a hosszirányúak távolabb fekszenek egymástól és valamivel vastagabbak.

A *szájnyílás* a test mellső, orrmányszerűleg elkeskenyedett végén fekszik, szegélye mindig papillákkal fegyverzett, átmérője átlag 0·1 mm. A szájüreg közvetlenül a pharyngealis üregbe nyílik, mert a száj nem ül külön izomkúpon.

A *pharynx* közvetlenül a szájnyílásnál kezdődik, egészben véve körteforma, hossza 0·5—0·6 mm., legnagyobb átmérője 0·33—0·38 mm., legkisebb átmérője 0·08—0·15 mm. között ingadozik, két oldala az oesophagus beszájadzása előtt befűződött, ezentúl feltűnően kerekített, hátulsó vége közepén bemetszett s így két karélyra tagolódott; izomfalazata 0·04—0·53 mm. átmérőjű, szájfelőli végén jól fejlett sphincter van, melynek átmérője 0·03—0·035 mm. A két pharyngealis táska erőteljesen fejlődött és némileg már külsőleg is felismerhető; mindenik garattáska tömlőforma, legnagyobb átmérője 0·08—0·1 mm., többé-kevésbé egymással párhuzamosan fekszenek és zárt végükkel egyenesen hátra tekintenek; a kettőjük közötti választófal hossza 0·2—0·26 mm. Az egész pharynx fölületét meridionalis rostok takarják. A belső lumen falazatának kutikula-rétege alatt gyűrűs és

ezeken belül hosszirányú izomrostok rétege következik. A pharyngealis izomzat főtömegét azonban a radialis lefutású parenchyma-izmok teszik ki, a melyek között parenchyma-hálózat, myoblastok és epithel-sejtek fekszenek elszórtan.

Az *oesophagus* a pharynx hasoldalán ered a garattáskák közötti választófal előtt, eleinte a hasoldal felé és kissé hátrafelé irányul, majd tompa zúg alatt a hátoldal felé fordul s aztán a hátoldalhoz közeledve, hátrafelé fut; a gyomorágak elágazása előtt többé-kevésbé tojásforma, vastagfalazatu bulbust alkot; hossza egyenes vonalban mérve 0·56—0·6 mm., legnagyobb átmérője 0·15—0·2 mm.

A *gyomorágak* eredésük pontjától kezdve eleinte ívelten kissé oldalt s aztán hátrafelé futnak, lefutásukban mindig kigyózó utat írnak le, a test két oldalától távol s a hátoldalhoz közeledetten fekszenek, rendes helyzetükben három íves kiemelkedést és két bemélyedést mutatnak (Fig. 11.); hátrafelé haladtukban fokozatosan vastagodnak, hátulsó, legvastagabb végük a szívókorongtól átlag 0·06—0·1 mm.-nyire van, egész hosszuk 1·25—1·3 mm. között változik. Az ellapult példányok gyomorágai szabálytalan lefutásúak, többször görbültek.

A *kiválasztó edénytörzsek* a gyomorágak alatt és ezek mentén haladnak, a két here közötti területen s illetőleg a gyomorágak első bemélyedésénél két ágra oszlanak, melyek közül az egyik ág mindkét oldalon a gyomorág belső szegélye mentén a cirrus-zacskó felé, a másik a gyomorág külső szegélye mentén majdnem a pharynxig fut s innen gyakran visszahajlik. A *kiürítőhólyag* a héjymirigy s a szívókorong között fekszik, ferdén hátra- és fölfelé halad, nyílása a *Laurer*-féle csatorna nyílásától 0·5—0·8 mm. távolságban fekszik.

Az *ivarnyílás* a test mellső harmada előtt fekszik az *oesophagus* bulbusa mögött, a szájnyílástól átlag 0·8—1 mm. távolságban, az összehúzódot példányokon természetesen mindig közelebb, mint a teljesen kinyultakon; környezete sima, halmot nem alkot, belőle a cirrus nem emelkedik ki.

A *herék* legnagyobb részben a gyomorágaktól körülzárt területen, még pedig a két első íves kiemelkedés között s itt egymás mögött fekszenek a gyomorágak alatt. Mindenik here

két oldalán szabályszerint két-két tompán kerekített karélyt alkot, néha azonban mellső és hátulsó szegélyükön is léphet fel karély, de nincs hát- és hasoldalukon (Fig. 11.). A herék főtömegének harántátmérője 0.35—0.4 mm. A vesicula seminalis externa alig észrevehető, míg a cirrus-zacskó jól fejlett, tojásforma, hossza 0.3—0.35 mm., átmérője 0.2—0.25 mm. A vesicula seminalis interna 2—3-szor hurkolt, de a cirrus-zacskó belsejét nem tölti ki egészen és helyet ad a prostata-mirigyeknek is. A ductus ejaculatorius nagyon korán egyesül a metratermmel, minek következtében a ductus hermaphroditicus meglehetősen hosszú.

A *csirafészek* a gyomorágaktól körülzárt területen, a hátulsó herétől átlag 0.4—0.6 mm., a szívókorongtól pedig 0.4—0.5 mm. távolságra a középvonalban és kissé a hátoldalhoz közeledetten fekszik (Fig. 11.), többé-kevésbé gömbforma, átmérője 0.23—0.26 mm. A *petevezeték* hátrafelé fut s aztán a hasoldal felé hajlik a csirafészek mögött és alatt fekvő léjymirigyhez. Az *ootyp* feltűnő nagy, harántfekvésű tömlő, hossza 0.5 mm. A *Laurer-féle csatorna* kigyózó lefutása, a kiürítő nyílástól 0.25—0.4 mm. távolságra fekszik. Az *uterus* eleinte hátrafelé fut, majd előre kanyarodik s a gyomorágaktól körülzárt területen halad előre a hátulsó heréig a hasoldalon, majd a herék fölé kerül és a cirrus-zacskó oldalán elhaladva, a ductus hermaphroditicusba nyílik.

A *peték* tojásformák, burkuk egészen sima fölületű, hosszúságuk 0.05—0.08 mm., legnagyobb átmérőjük 0.03—0.04 mm.

A *székmirigyek* a gyomorágaktól körülzárt területen, ezekkel egy magasságban fekszenek, feltűnő rövidek, a mennyiben egész hosszuk csupán 0.7—0.95 mm. s csak a gyomorágak hátulsó mélyedéséig nyulnak fel. Mindenik székmirigy faalakulag elágazódott, az egyes ágak fűrtformák, a hátulsó végen emelkedők hosszabbak és nagyobb fűrtöket alkotnak. (Fig. 11.). A székfollikulusok gömbformák. A két székmirigyet összekötő harántereszték a csirafészek mögött fut és meglehetősen nagy székresevoirt alkot.

E faj lapos példányai között több, páronként összekapcsolódottat is találtam. Az összekapcsolódás minden esetben úgy jött létre, hogy az egyik példány szívókorongjának üregébe zárta

be a másik testének szájvégét s így egymás végtében feküdtek. Az így egybekapcsolódott két példány vagy a has-, vagy a hátoldalan feküdt egyezően, vagy pedig előfordult az az eset is, hogy egyiknek a has-, másiknak a hátoldala feküdt ugyanabban a síkban. A bekapcsolt példány testének szájvége mindig bunkóformán duzzadt.

Hogy ennek a páronkénti összekapcsolódásnak van-e valami physiologiai jelentősége, vagy pedig csupán esetlegesség, eldönteni nem tudom, de abból a körülményből, hogy a vizsgált példányok között több összekapcsolt találkozott és hogy a bekapcsoltnak mellső testvége mintegy az összekapcsolódás állandóbbá tételéért bunkóformán megduzzad, nem tartom teljesen kizártnak annak lehetőségét, hogy az összekapcsolódásnak van valami physiologiai jelentősége.

E faj általános szervezeti viszonyai tekintetéből nagy mértékben egyezik a *Chiorchis oxycephalus* (DIES.) fajjal, annyira, hogy egy ideig azzal azonosnak tekintettem s csupán a histologiai viszonyok összehasonlító tanulmányozása alapján győződtem meg a kettőnek különállóságáról. Mindenekelőtt fontos különbség az, hogy e fajnak bőrízomtömlője csupán gyűrűs- és hosszirányu rostokból áll, míg a *Chiorchis oxycephalus*-é gyűrűs-, hossz- és tangentialisokból. Ehhez járul az, hogy a *Chiorchis papillatus* epithelsejtjei körteformák, heréi kevés és tompa karélyosak, míg a *Chiorchis oxycephalus* epithelsejtjei soksarkúak, heréi sok és hegyes karélyosak, parenchymája lazább.

Végül meg kell jegyeznem, hogy az irodalmi idézeteket helyettesítő folyó számok a «Délamerikai halakban élősködő Paramphistomidae-félék anatómiai és szövettani viszonyai» című, ezt követő dolgozatom «Irodalom» jegyzékének tételeire utalnak.

A DÉLAMERIKAI HALAKBAN ÉLŐSKÖDŐ
PARAMPHISTOMIDA-FAJOK ANATOMIAI ÉS SZÖVETTANI
VISZONYAI.

DADAY JENŐ 1.-tagtól.

A FISCHOEDER F.-től újabb időben *Paramphistomidae* elnevezés alatt összefoglalt (6.), korábban az *Amphistomidae*-családnév alatt egyesített *Trematoda*-fajok tanulmányozásával az idők folyamán több bűvár foglalkozott ugyan igen különböző irányban, de közülök még eddig, tudtommal, egy sem terjesztette ki figyelmét a halakban élősködő, idetartozó fajok részletesebb anatómiai és szövettani tanulmányozására. Az e téren működött bűvárok mindannyian, különösen pedig OTTO RICHARD (10.), a ki legfőképen anatómiai és szövettani téren, FISCHOEDER F. (6.), a ki anatómiai és systematikai irányban dolgozott, majdnem kizárólag az emlősökben élősködő fajokat tette tanulmánya tárgyává.

Mikor az ANISITS J. D.-től küldött s a délamerikai *Colosoma brachypoma* nevű halból származó *Paramphistomida*-fajok tanulmányozása során átvizsgáltam a bécsi Hofmuseum gyűjteményéből rendelkezésemre állott azon fajokat, a melyeket NATTERER J. 1824—1832-ben gyűjtött és DIESING C. M. ismertetett, tanulmányaim folyamán igyekeztem lehetőleg a fajok mindenikének anatómiai és histológiai viszonyait is kideríteni. És hogy ezen irányban, a lehetőség határai között, minél részletesebb és minél megbízhatóbb eredményekhez juthassak, igyekeztem a fajok mindenikéből, vagy legalább is legnagyobb részéből metszetsorozatokat készíteni, hogy vizsgálataim eredményeivel, a mennyire azt a rendelkezésemre állott anyag és eszközök megengedik, e téren kiegészítő adatokat nyújthassak.

Tájékoztatóul meg kell itt jegyeznem, hogy a vizsgálati anyag, illetőleg a metszetsorozatok készítésénél, tekintettel arra, hogy a rendelkezésemre állott fajok példányai legnagyobb részben, illetőleg a bécsi Hofmuseum tulajdonát alkotók és NATTERER J.-tól gyűjtöttek már jóformán nyolcz évtizeden át pihentek alkoholban és Prof. ANISITS J. D. is alkoholban konzerválta a paraguayiakat, kénytelen voltam a lehetőleg egyszerű eljárást követni, illetőleg nem alkalmazhattam a mikroskopi technika legújabb módszereit. A metszetsorozatuk előállítására alkalmasnak mutatózó példányokat legnagyobbbrészt pikrokarmiban, kivételesen boraxcarminban vagy fuchsinban festettem s azután celloidinba ágyaztam be. Az épen említett körülmények szolgáljanak egyúttal mentségemül, ha vizsgálataim itt-ott hézagok vagy esetleg nem minden tekintetben kielégítőek. De egyúttal megjegyzem azt, hogy elvi kérdések feszegetésébe nem bocsátkozom s csupán vizsgálataim eredményeinek előterjesztésére szorítkozom.

I. A test általános alakja és tagoltsága.

A test általános alakja az összehúzódottság foka és iránya szerint ugyan még ugyanazon genus, sőt faj keretén belül is meglehetősen változatosnak mutatkozik, mindamellett bizonyos mértékig állandónak mondható. A fajok között találunk ugyanis első sorban olyanokat, melyeknek teste határozottan kúp-, illetőleg bizonyos fokig rövid szarvforma, mint specialiter a *Diplo-discus*-genus fajaiei. Máskor a test kisebb-nagyobb mértékben pálczika- vagy még inkább sárgarépaforma hengeres, mellső vége felé erősebben vagy gyengébben vékonyodik, mint a *Microrchis* és *Pseudocladorchis*-genusok fajaiei. Végre találkoznak a fajok között typusosan vagy legalább is igen gyakran lapított levélformák, minők például a *Chiorchis*-genusnak a képviselői, a melyek között azonban a *Chiorchis oxycephalus* (DRES.) fajnak példányai között meglehetősen gyakoriak a hengeres testűek is.

A test alakja lényeges kapcsolatban áll a has- és hátoldal, a jobb- és baloldal szerkezetével, illetőleg íveltségének külön-

böző fokával. A kúpforma és hengeres testű fajok has- és hátoldala ugyanis, különösen az utóbbi, feltűnően íves és kiemelkedett; míg a lapított, levélforma-testűeknek has- és hátoldala lapos vagy legfeljebb csak kis mértékben íves. A has- és hátoldal különböző fokú íveltségével szoros kapcsolatban áll aztán a jobb- és baloldal íveltsége is, a mennyiben az íves bal- és hátoldallal bíró fajokon kisebb-nagyobb mértékig tompán ívesek, míg a lapított testűeken hegyesen kerekítettek, majdnem élesek. E különbségek azonban nem oly fontosak, hogy a genusok megkülönböztetésénél jellemek gyanánt szerepelhetnének, mert mint már említettem, nagy mértékben függenek a példány összehúzódtóságától, valamint életének korától, illetőleg az uterust kitöltő peték tömegének mekkoraságától is.

1. Szájkúp.

A test tagoltsága tekintetében már szembeszökőbb különbségek mutatkoznak az egyes fajok, de sőt bizonyos fokig még az egyes genusok között is. A *Microrchis*-genus fajainak mellső testvégén ugyanis minden esetben, tehát typusosan, keskeny, kúpforma lefűződés, egy elkülönült szájkúp van, a mely szöveti szerkezetével elüt a pharynxtól. Ilyen szájkúp még csak a *Diplodiscus*-genus keretén belül található, de itt már jelenléte nem mondható typusosnak, a mennyiben például a *Diplodiscus Marenzelleri*-nek nincs, míg a *Diplodiscus cornu*-fajnak jól elkülönült szájkúpjá van. A *Pseudocladorchis* és *Chiorchis*-genusok összes fajait már a szájkúp teljes hiánya jellemzi, a melynek mintegy helyettesítésére a *Chiorchis oxycephalus* mellső testvége orrmányszerűleg feltűnően elvékonyodik és fölületén papillák gyűrűsorait viseli.

A szájkúp szerkezete, specialiter pedig izomzata, fajonként változó. A *Microrchis megacotyle* (DIES.) faj szájkúpjában ugyanis a külső kutikula alatt fekvő gyűrűs izomrostok rétege terül el, mely a szájperemtől a pharynx mellső határáig terjed. Eme gyűrűs rostok rétegétől be- és hátrafelé futó tangenciális rostok indulnak ki, a melyek némileg a szájüreg belső falazatával párhuzamosan a pharynx mellső csúcsáig haladnak. De a szájüreg

belső falazatától is indulnak ki tangentialis rostok, csakhogy ezek ferdén ki és hátrafelé futnak részint a test kutikulája, részint a pharynx mellső csücsa felé s így a befelé irányuló tangentialis rostokkal kereszteződnek, mintegy szövetet alkotnak. A két irányban futó tangentialis rostok tömegében, a gyűrűs rostok rétegén belül hosszirányú rostok is futnak a pharynx mellső vége mellett egészen a szájüreg belső falazatáig. A *Micrororchis ferrum equinum* (DIES.) szájúpjának izomzata már bonyolódottabb lefutású. Itt ugyanis a külső kutikula-réteg alatt, majdnem az egész szájúp hosszában két gyűrűs izomrostréteget találunk, közöttük igen keskeny hosszirányú izomrost-réteggel. A külső gyűrűs izomrostréteg a hosszirányú rostokéval együtt a bőrízomtömlőhöz tartozónak tekinthető, míg a belső gyűrűs izomrostréteg már a szájúp sajátja, bárha homologizálható a bőrízomtömlő tangentialis izomrostrégeivel. E gyűrűs izomrostréteg a szájúp mellső szegélyétől a pharynx mellső végéig halad, de hátrafelé fokozatosan keskenyedik. A szájúp belső tömegében szintén két gyűrűs izomréteg fejlődött ki, melyek közül a külső rövidebb, sokkal kevesebb rostból áll, közte s a más két gyűrűs izomrostréteg között egy-egy hosszirányú rostokból álló nyaláb fut a pharynx elejétől kissé ferdén, a szájúp mellső szegélyéig. A belső gyűrűs izomrostréteg sokkal hosszabb és erősebb az előbbeninél, a szájúp mellső szegélyétől majdnem a pharynx mellső végéig ér, egymás mellé és mögé sorakozott több rostból összetett. A szájúp szájüregfelőli falazata mentén hosszirányú izomrostok rétege terül el a pharynx elejéig. Jól fejlettek a tangentialis rostok is, de csupán egyirányban futók vannak s nevezetesen a szájúp külső falazatától a szájüreg határoló falazatához ferdén haladók, a melyek bizonyos fokig homologizálhatók a pharynx radialis izomrostjaival. A három különálló gyűrűs izomrostréteg együttesen a szájúp sphincter-jét alkotja, melyeket működésükben a tangentialis rostok is támogatnak, a hosszirányú s némileg a tangentialisak is a szájúp retractorai gyanánt szerepelnek.

2. A szívókorong.

A szívókorong *elhelyezkedése* a genusok és fajok szerint változó. Igen gyakori eset az, hogy a szívókorong a test hátulsó végét foglalja el és középvonala csaknem teljesen egybeesik a test középvonalával, mint a *Diplodiscus*-, különösen pedig a *Microrchis*- és *Pseudocladorchis*-genusok fajainál. Máskor a szívókorong nem foglalja el teljes mértékben a test hátulsó végét és középvonala nem esik össze a test középvonalával, hanem kisebb-nagyobb mértékben a hasoldalhoz közeledett, mint a *Chiorchis*-genus fajainál. Az első esetben belső convex oldalának legkiemelkedőbb részlete egyenesen előfelé, míg a másodikban ferdén elő- és fölfelé tekint.

Egyes esetekben azonban a szívókorong helyzete, különösen pedig nyílásának iránya, a test általános fejlettsége, illetőleg az életkor szerint is meg lehetős változatosságot mutat. Ezt találjuk például typusosan a *Chiorchis oxycephalus* (DIES.) faj példányain, melyek között a fiatalabbaknak szívókorongja a test végén, convex oldalának legkiemelkedőbb részletével egyenesen előre, nyílásával pedig hátrafelé irányulóan fekszik, míg az idősebb, teljesen kifejlett példányoké convex oldalának legkiemelkedőbb részletével a hátoldal felé, nyílásával pedig a hasoldalra fordult.

Meglehetősen változatos a szívókorong *mekkorasága* is, a mi különben csaknem typusosan szoros kapcsolatban áll a test haránt átmérőjének mekkorásával, különösen azoknál a fajoknál, a melyeknek szívókorongnyílása többé-kevésbé egyenesen hátrafelé tekint. Legnagyobb terjedelmű, illetőleg átmérőjű a *Diplodiscus*-genus fajainak szívókorongja (1·2—2·2 mm.). Ezekhez sorakoznak a *Pseudocladorchis*-fajok (1·5—2·5 mm.) s a *Microrchis*-fajok (1—2·5 mm.), a melyeknek szívókorongja aránylag meglehetősen terjedelmes. A *Chiorchis*-genus fajainak szívókorongja, az előbbiekkel ellentétben, szabályszerint mindig kis terjedelmű (0·72—1·2) és átmérője csupán a fiatalabb példányokon áll szoros viszonyban a test legnagyobb átmérőjével, illetőleg azzal csaknem mindig egyezik, míg a fejlettebb és idősebb példányoké mindig feltűnő kicsiny, illetőleg átmérője jóval kisebb

a test legnagyobb átmérőjénél. Ide vonatkozólag különben a legszebb példát a *Chiorchis oxycephalus* (DIES.) faj különböző korú példányai szolgáltatják.

Megjegyzem különben azt, hogy a szívókorong mekkorasága, illetőleg átmérőjének nagysága s a test átmérőjéhez való viszonya nagy mértékben függ magának a szívókorongnak s az egész testnek különböző irányú és fokú összehúzódottságától is, mint ezt különösen a *Chiorchis oxycephalus* (DIES.) faj egyes példányai mutatják.

A szívókorong belső üregének mélysége és átmérője a nemek és fajok szerint igen változó, legsekélyebb a *Diplodiscus Marenzelleri* n. sp., meglehetősen mély a *Microrchis ferrum equinum* (DIES.) fajnál, a *Pseudocladorchis* és *Chiorchis*-genusok körében már mélyebb, míg a legmélyebbnek mutatkozik a *Microrchis megacotyle* (DIES) teljesen kifejtett, illetőleg idősebb példányainál. E mellett azonban a szívókorong üregének mélységét nagy mértékben befolyásolja az izomfalazat különböző fokú összehúzódottsága is.

Meglehetősen változatos és a genusokra bizonyos fokig jellemző a *korongnyílás* helyzete is, a mi különben szoros összefüggésben áll magának a szívókorongnak fekvésével és típusosan az oldalt fekvő példányokon tűnik szembe. A *Diplodiscus*-, *Microrchis*- és *Pseudocladorchis* genusok fajainak korongnyílása többé-kevésbé egyenesen hátrafelé tekint, míg a *Chiorchis* genus fajainál félreismerhetetlenül a hasoldal felé fordult. A korongnyílás mekkorasága és alakja szintén tág korlátok között változik, de bizonyára szoros kapcsolatban áll a szívókorong izomfalazatának különböző fokú és irányú összehúzódottságával. A legnagyobb átmérőjű, illetőleg legterjedelmesebb korongnyílást a *Diplodiscus Marenzelleri* fajnál találjuk (0.7—2.5 mm.), ehhez közel áll a *Diplodiscus cornu* (DIES.), a *Microrchis megacotyle* (DIES.) fajú, míg a *Microrchis ferrum equinum*-é, a *Pseudocladorchis* és a *Chiorchis*-genus fajaié szabály szerint szűk, illetőleg sokkal kisebb átmérőjű (0.2—1.7 mm.).

A korongnyílás alakja általában két típust mutat, a meny-nyiben a fajok egy részénél szabályos körhöz hasonlít, mint a *Diplodiscus*-fajoké, továbbá a *Pseudocladorchis nephrodorchis*

n. sp. fajé, a mely említettekétől a *Microorchis*-genus fajaié, továbbá a *Pseudocladorchis cylindricus* (DIES.), *Pseudocladorchis macrostomus* n. sp. fajé csak annyiban különbözik, hogy hátulsó belső szegélye többé-kevésbbé élesen bemetszett. E korongnyílás-alakból könnyen levezethető a némileg körte- vagy palaczkforma másik típus, a mely különösen a *Chiorchis*-genus fajait jellemzi s a mely általánosságban elterjedtnek mondható, annyival is inkább, mert kezdetleges stadiumon már a *Diplodiscus Marenzelleri*, *Pseudocladorchis cylindricus* (DIES.), *Pseudocladorchis macrostomus* n. sp., előre haladottabb stadiumon pedig a *Microorchis*-fajoknál is megtalálható.

A szívókorong belső felületét cuticulaszerű anyagból álló burok takarja, a mely azonban ott, hol a korong közvetlenül érintkezik a test falával, egészen megszűnik, illetőleg helyet ad a bőrizomtömlőnek, helyesebben egybeolvad a test takarójával, vagyis a szívókorong felülete nem mindenütt független a testtakarótól. A korongburok majd vékonyabb, majd vastagabb, néha finoman hosszirányban rostozottnak látszik; anyaga nem cuticulaállomány, hanem a parenchymasejtek productuma, a mi mellett bizonyít az, hogy pikrokarmin hatására élénken színeződik s nem marad színtelennek, mint a valódi cuticula. E mellett bizonyít az a néha magokat tartalmazó szemecskés vagy finoman rostozott, hálózatos plasmaállomány is, a mely a szívókorong belső burkának felületét takarja és kétségtelenül nem egyéb, mint felhasználódott parenchymasejtek utolsó maradványa. Azon a ponton túl, a hol a szívókorong érintkezik a test takarójával, illetőleg a tulajdonképeni korongburok átmegy a testtakaróba, a szívókorong egész felületét a típusos testtakaró fűdi.

A szívókorong üregének felületét minden esetben csupán a tulajdonképeni testtakaró fűdi, a mely ugyanazt a szerkezetet mutatja itt, mint a test bármely más pontján azzal a különbséggel, hogy a kutikula-réteg sokkal vékonyabb, mint egyébütt a testen. Ez a korongüreget takaró kutikula a fajok majdnem valamennyiénél egészen sima fölületű s csupán a *Diplodiscus Marenzelleri* n. sp. fajnál tesz kivételt, a mennyiben itt harántirányban futó tarajszerű kiemelkedéseket mutat.

A szívókorong anyagának szöveti szerkezete a genusok és

fajok szerint kis mértékben változó, typusosan azonban majdnem valamennyi esetben megkülönböztethetjük a szívókorong saját izomzatát, az epithelsejteket, a parenchyma-anyagot s a dúcsejteket.

A szívókorong *saját izomzata* szabályszerint meridionalis-, æquatorialis- és radialis rostokból áll.

A *meridionalis* rostok mindig a korongnyílás hátulsó szegélyének bemélyedésétől erednek kétoldalt s egy-egy hatalmas pamatot alkotva, kissé ferdén futnak belülről kifelé. E rostok a korongnyílás dilatatorai gyanánt szerepelnek, közvetlenül megfekszik a bőrízomtömlő hosszirányú, illetőleg a hol vannak, diagonális rostjait. A genusok és fajok egy részénél, mint a *Pseudocladorchis* genus fajainál, továbbá a *Microrchis megacotyle* (DIES) fajnál e rostokat sem a teljes szívókorongon, sem a különböző irányú metszeteken nem birtam felismerni s azt hiszem, hogy nem tévedek, ha teljes hiányzásukat tételezem fel. A *Chiorchis*-genus fajainál, továbbá a *Microrchis ferrum equinum*-nál ellenben e rostok igen jól fejlettek s nemcsak a különböző irányú metszeteken, hanem az egész szívókorongon is könnyen felismerhetők. A *Diplodiscus Marenzelleri* faj szívókorongján végre a meridionalis rostok oly tömegesen lépnek fel, hogy a nyílás bemélyedéséből kiindulva a korong mellső legnagyobb részét egészen befödik, tehát igen széles két pamatot alkotnak, a melyek átellenesen ívesek. A rostoknak a korongnyílás felőli végük mindig sokkal vékonyabb, mint a periphereikus, azaz a periphéria felé mindannyian fokozatosan vastagodnak, illetőleg szélesednek.

Az *æquatorialis* rostok valamennyi genus és faj szívókorongján megtalálhatók, de fejlettségüknek foka megglehetős változatos. Typusosan a meridionalis rostok rétegén belül futnak e rostok a korongnyílás szegélyével párhuzamosan, majd keskenyebbek, illetőleg vékonyabbak, majd pedig szélesebbek, azaz vastagabbak és működésük a korongnyílás elszűkítésére irányul, tehát sphincterek gyanánt működnek, a mi helyzetükből is könnyen belátható. A fajok legnagyobb részénél e rostok nem takarják be teljes gyűrük gyanánt a szívókorong egész fölületét, mert a korongnyílástól távolabbfekvők a test középvonalától

kisebb-nagyobb távolságban megszakadnak, illetőleg végződnek, minek következtében kétoldali félgyűrűt, helyesebben ívszeletet alkotnak, miután a korongnyílás hátulsó végén a meridionalis rostokkal majdnem közösen erednek. Ezt az esetet találjuk a *Pseudocladorchis*- és *Chiorchis*-genusok fajainál, továbbá a *Microrchis megacotyle*-nél. A *Diplodiscus*-genus fajainak æquatorialis rostjai már szélesebb szalagot alkotnak a korongnyílás körül, legnagyobb részük egész gyűrűt formál s csak kevés köztük a félgyűrűhöz hasonló. Végre a *Microrchis ferrum equinum* æquatorialis izomrostjai mindannyian egész gyűrűt alkotnak s a szívókorong egész fölületén megvannak, a miről a különböző irányú metszetek élénk tanúságot tesznek. Ez a körülmény magyarázza meg azt, hogy a *Microrchis ferrum equinum* szívókorongjának különböző irányú metszetein miért lehet egy külső és egy belső æquatorialis izomrostréteget látni, míg a többi, előbb említett fajok szívókorongjának metszetein a két æquatorialis izomrostréteg csupán a korongnyílás hátulsó felében mutatkozik, mellő felében ellenben csupán egy, nevezetesen a külső, a nyíláskörüli réteg van meg.

A *radialis* rostok a szívókorongnak főtömegét alkotják, hosszúságuk, vastagságuk és tömörségük genusok és fajok szerint igen változó. Legrövidebb radialis izomrostokat találunk a *Diplodiscus Marenzelleri*-fajnál, melynél átlag 0.17—0.28 mm. hosszúak, csupán valamivel hosszabbak (0.2—0.6 mm.) a *Pseudocladorchis*- és *Chiorchis*-genusok fajaié, míg leghosszabbakat (0.7—1.2 mm.) a *Diplodiscus cornu*-fajnál s a *Microrchis*-genus fajainál találunk. Itt megjegyzem különben azt, hogy a rostok között azok a leghosszabbak, a melyek a korong convex oldalától a mélyedés falazatáig futnak, míg a többiek fokozatosan rövidülnek s legrövidebbek a nyílás körül fekvők. A radialis rostok vastagsága igen változatos, általában belső, a határ-burokkal érintkező végük mindig vastagabb, illetőleg szélesebb a külsőnél és fokozatosan vékonyodnak; belső szélesebb végük igen gyakran ágakra pamatolódott. A fajok egy részénél, különösen pedig a *Chiorchis*-genusba tartozóknál a radialis rostok meglehetősen gyéren, illetőleg egymástól távolabb állanak, közöttük aránylag nagy hézagok maradnak, míg a fajok legnagyobb ré-

szénél, különösen pedig a *Microrchis*-genus képviselőinél tömötten sorakoznak egymás mellé, közöttük csak igen kis hézag marad fent, mint azt mindkét esetben a különböző irányú metszetek élénken bizonyítják.

A szívókorong anyagában, az üreg falazatának bőrízom-tömlőrétegén belül, a radialis rostok között, szabálytalanul elszórtan, az egyes fajokra többé-kevésbbé jellemző alakú *epithelsejtek* rétege vagy elszórt csoportjai fekszenek, a melyek teljesen homologok és analogok a testtakaró később tárgyalandó epithelsejtjeivel, csakhogy itt sokkal kisebbek.

A radialis rostok közötti hézagokat minden esetben *parenchyma-anyag* tölti ki, a mely legtöbbször finoman szemecskés tömegecskéket, továbbá rosthálózatokat alkot; egyes esetekben sikerült azonban magukat a *parenchyma-sejteket* is megfigyelnem, a melyek szintén hálózatot formálnak.

A szívókorong anyagában a radialis rostok között végre multipolaris nagy sejtek is vannak, melyeknek állománya szűrőként, finoman szemecskés, magjuk gömbölyű, hólyagcsa alakú, hártyájuk hiányzani látszik. E sejtek pikrokarminnal élénken színeződnek, nagy mértékben hasonlítanak a dúcsejtekhez, a különböző fajok szívókorongjában különböző nagyok, átlagosan 0.02—0.04 mm. átmérőjűek, legnagyobbakat a *Chiorchis*-genus fajainál találtam. A különböző irányú metszeteken végzett vizsgálataim arról győztek meg, hogy e *dúcsejteknek* tekinthető képletek nem csupán a szívókorong peripherikus rétegeiben, hanem szabályos elrendeződésben a szívókorong anyagában egyebütt is megvannak.

II. Testtakaró.

Az átvizsgált valamennyi faj testtakarója kisebb-nagyobb mértékben azonos szerkezetű és rajta megkülönböztethető a *cuticula-réteg* a HEIN W. felfogása értelmében (7.), továbbá az *epithelsejtek complexuma*.

Az összes fajok *cuticulája* a felületén egészen sima, rajta sem tüskék, horgok, sem pikkelyek nem emelkednek, a fajok egy nagy részénél azonban a száj körül és ettől hátrafelé gyűrűs sorokban *papillákat* visel. Maga a *cuticula* a fajok legnagyobb

részénél egészen egyneműnek, szerkezetnélkülinek látszik, mint a *Chiorchis oxycephalus*-nál, máskor belső határán finom szemecskék vékony rétege mutatkozik, mint a *Chiorchis papillatus*-nál. A *Pseudocladorchis*-genus fajainak cuticulája egynemű. szemecske-rétege nincsen, hanem e helyett igen intensíven színeződő alaphártyája fejlődött ki, melynek vastagsága átlag 0.0016 mm. A *Microrchis*-genus fajainál a cuticulának megvan a szemecskés rétege s ezen belül élesen elkülönült az alaphártya is, a melynek vastagsága átlag 0.003–0.004 mm. A mennyire változatos a cuticula szerkezete, épen annyira változatos vastagsága is, így a legvékonyabb a *Diplodiscus*-genus fajaié (0.004–0.008 mm.), a *Microrchis*-, *Pseudocladorchis*-genus összes fajaié, valamint a *Chiorchis oxycephalus*-é és *Chiorchis papillatus*-é már vastagabb, átlag 0.008–0.015 mm., míg végre a *Chiorchis dilatatus*-é a legvastagabb, 0.019–0.02 mm.

A száj körüli és száj mögötti *papillák* igen nagy elterjedésben fordulnak elő s csupán egy pár fajról hiányzanak típusosan; így hiányzanak a *Diplodiscus*-genus fajairól, a *Microrchis ferrum equinum*-ról s a *Pseudocladorchis macrostomus*-ról. A többi fajok testüknek mellső végén papillákat viselnek, a melyeknek elhelyezése azonban változó a fajok szerint; így például a *Microrchis megacotyle*, a *Pseudocladorchis cylindricus* és *nephrodorchis*, továbbá a *Chiorchis dilatatus* csupán szája peremén, esetleg még szájüregében is visel papillákat, míg a *Chiorchis oxycephalus*-nak és *papillatus*-nak nem csak a szája peremén, hanem a szája mögött is vannak papillái 5–6 gyűrűs sorban.

A papillák, a mennyire azt vizsgálataim során megállapítanom sikerült, semmi egyebek cuticulakiemelkedéseknél; mindig kerekített csúcsú kúphoz hasonlítanak, vagy pedig ujjformák; belsejükben üreget zárnak be, falazatuk rugékony, még meg nem merevedett cuticulaanyag, a melyen semmiféle szerkezetet sem bírtam megkülönböztetni. Belső üregük finoman szemecskés anyaggal kitöltöttek látszik, a melyben festő reagensek alkalmazása mellett pálcikaforma testecskének a körvonalaikat különböztethettem meg. Hogy falazatuk nem merev, mutatja az a körülmény, hogy közülök igen sok kisebb-nagyobb mértékben

visszahúzódott. A teljesen visszahúzódott papillák helyén kis kraterszerű kiemelkedés marad vissza.

Az *epithelsejtek* az összes fajok testtakarójának állandó, de bizonyos fokig változó szerkezetű kiegészítő részei s mindig a bőrízomtömlőn belül, ezt többé-kevésbé megfekve fordulnak elő. A *Chiorchis oxycephalus*-nál és *Chiorchis papillatus*-nál igen gyakran a test minden pontján találhatók epithelsejtek, míg az összes többi fajoknál csupán a test mellső és hátulsó végén lépnek fel tömegesebben és jellemzően megvannak a hasoldalon, továbbá különböző magasságig a jobb- és baloldalon; de a legnagyobb számmal a test mellső végén, körülbelül az oesophagus hátulsó végéig terjedő részleten találhatók. De nem csak a testtakaróval kapcsolatosan találhatók e sejtek a halakban élősködő *Paramphistomidák* testében, hanem a különböző belső szervekkel összefüggésben is, mint azt a szívókorong szerkezetének tárgyalásánál láttuk és látni fogjuk a többi szervek ismertetésénél is.

Az epithelsejtek általános jellemvonása az, hogy a festő-reagensok hatására élénken színeződnek, mint az már régen ismeretes a különböző *Distomidákon* és *Paramphistomidákon* végzett vizsgálatok alapján (Lásd HEIN W. 7.); alakjuk, mekkoróságuk és szerkezetük azonban nem csak fajok szerint változó, hanem változó egyúttal fekvésük szerint is, a mennyiben például a *Chiorchis papillatus* hasoldalán és szívókorongjának szomszédságában fekvők mindig sokkal nagyobbak (0·006—0·013 mm. átm.), mint a test mellső végén lévőek, a melyeknek legnagyobb átmérője átlag 0·004—0·005 mm.

Általános jellemvonása még az összes fajok epithelsejtjeinek az, hogy protoplasmátömegük finoman, tömötten és szürkésen szemecskés; magjuk rendszeren tojás- vagy gömbforma és különböző, de mindig nagyobb számú, apró chromatin-testecskét tartalmaz, átmérőjük átlag 0·001—0·002 mm.

Az epithelsejtek alakja a *Microrchis*- és *Pseudocladorchis*-genusok fajainál, valamint a *Chiorchis dilatatus* és *papillatus*-fajoknál is tipusosan többé-kevésbé megnyult tömlőforma, egészen mirigyszerűek, belső széles és tompán kerekített végük legtöbbször ferdén befelé irányul, vezetéküket csupán a bőr-

izomtömlőig bírtam követni, oldalnyujtványokat nem bocsátanak, vagy tömötten fekszenek egymás mellett, vagy pedig közöttük parenchyma-anyag van, mely fölületüket takarja és különböző irányokban haladó rostokat bocsát. A *Chiorchis oxycephalus*-nak, s a mennyire megállapítanom sikerült, a *Diplodiscus*-genus fajainak is epithelsejtjei oldalról nézve némileg tömlőhöz hasonlitanak ugyan, de minthogy nem csupán egy vezetékük, hanem fölületük különböző pontjain eredő több nyujtványuk is van, inkább multipolaris sejteknek tekinthetők. Még szembetűnőbbé válik multipolaris voltuk, ha őket az egész állaton fölülről, illetőleg in toto vizsgáljuk. Az első csoportban említett fajok epithelsejtjei tehát hasonlitanak az *Amphistomum conicum*-nak (*Paramphistomum cervi*), az utóbbi csoportban említettké pedig a *Distomum lanceolatum*-nak HEIN W.-tól ismertetett és rajzolt epithelsejtjeihez (V. ö. HEIN W. 7. Taf. 23., fig. 3., 4., Taf. 25., fig. 20.), de nekem készítményeimen nem sikerült a sejtek nyujtványainak összefüggését oly mértékben észrevenni, mint HEIN W.-nek a tőle vizsgált preparatumokon.

Igen tág korlátok között ingadozik az epithelsejtek átmérőjének és hosszának mekkorasága is s e tekintetben a következő adatokat sikerült megállapítanom.

	átmérő	hossz
<i>Microrchis ferrum equinum</i> —	0·012 mm.	0·02 — 0·026 mm.
<i>Chiorchis papillatus</i> — — —	0·004—0·013 mm.	0·016—0·055 „
<i>Chiorchis dilatatus</i> — — —	0·01 mm.	0·026—0·06 „
<i>Chiorchis oxycephalus</i> — — —	0·023 „	0·042 „

A *Microrchis megacotyle* és a *Pseudocladorchis*-genus fajainak epithelsejtjei a fent említettekénél kisebbnek mutatkoznak s még legközelebb állanak a *Microrchis ferrum equinum*-éhoz.

Az epithelsejtek feladatát illetőleg csatlakozom a HEIN W., illetőleg azon bűvárok nézetéhez, a kik azt állítják, hogy ezek csupán a cuticula felépítésénél működnek közre váladékkal. E mellett szóló bizonyítéknak tekintem azt, hogy magán a cuticulán semmi olyanféle elkülönülést nem tudtam észrevenni, a mely a mirigyszerű epithelsejteknek a külvilággal való közlekedésére szolgálna.

III. Bőrizomtömlő.

A halakban élősködő *Paramphistomidák* bőrizomtömlője három typus szerint épült fel, nevezetesen 1. gyűrűs és hossz-irányú-, 2. gyűrűs-, hossz- és diagonális-, 3. gyűrűs-, hossz-, diagonális- és hosszirányú rostokból.

A legegyszerűbb szerkezetű, illetőleg csupán gyűrűs- és hosszirányú rostokból összetett bőrizomtömlőt csakis a *Chiorchis dilatatus* és *Chiorchis papillatus*-fajoknál találjuk. A gyűrűs rostok e fajok bőrizomtömlőjében igen tömötten állanak, gyakran csaknem közvetlenül érintkeznek, különösen a *Chiorchis dilatatus*-nál, melynek gyűrűs rostjai nagyszámú finom rostocskából összetettek és átlag 0·03—0·04 mm. átmérőjűek; míg a *Chiorchis papillatus*-éi aránylag vékonyak, átlag 0·001—0·002 mm. vastagok. Megjegyzem különben, hogy a gyűrűs rostok a test mellső és hátulsó végén rendesen vastagabbak, mint egyebütt és átmérőjük az összehúzódottság foka szerint változik. A hosszirányú rostok mindig távolabb fekszenek egymástól, úgy hogy teljesen összefüggő réteget nem alkotnak, a *Chiorchis papillatus*-nál mindig vastagabbak, mint a gyűrűs rostok, átlag 0·035—0·04 mm. átmérőjűek, míg ellenben a *Chiorchis dilatatus*-nál mindig keskenyebbek a gyűrűsöknél, átlag 0·015—0·02 mm. átmérőjűek, a test mellső és hátulsó végén azok is épen úgy erősebbek, illetőleg vastagabbak, mint a gyűrűs rostok, néha összefüggő rostokat alkotnak, néha szakadozottak.

A bőrizomtömlőnek második typusa, a mely gyűrűs-, hossz- és diagonális-rostokból összetett, már gyakoribbnak mondható, a mennyiben megtaláljuk a *Diplodiscus*-genus fajainál, a *Pseudocladorchis macrostomus*-nál és legtypusosabban a *Chiorchis oxycephalus*-nál. A gyűrűs rostok itt is a cuticulát megfekvő külső réteget alkotják, feltűnő vékonyak, a *Chiorchis oxycephalus*-nál például alig 0·001 mm. átmérőjűek, egymáshoz igen közel fekszenek, sőt a leggyakrabban közvetlen egymás mellé sorakoznak. A hosszirányú rostok sokkal erősebbek, néha 0·008—0·01 mm. vastagok, egymástól meglehetősen nagy távolságban futnak, a közők átlag 0·025—0·03 mm. nagyok s a gyűrűs rostok rétegét sem fekszik meg közvetlenül, mert közöttük meglehetősen hézag

mutatkozik. A diagonalis-rostok a hosszirányuakon belül fekszenek, két ellentétes irányban futnak és egymást többszörösen keresztezik. A mind a két irányban futó diagonális rostok egyforma erősek, átlag oly vastagok, mint a hosszirányúak s az egy irányban futók oly távol fekszenek egymástól, mint a hosszirányú rostok.

Igen nagy elterjedésben találjuk a bőrizomtömlő harmadik, illetőleg azt a típusát, a mely gyűrűs-, külső hossz-, diagonalis- és belső hosszirányú rostokból összetett; nevezetesen megtaláljuk ezt a *Microrchis*-genus fajainál, továbbá a *Pseudocladorchis cylindricus* és *Pseudocladorchis nephrodorchis*-fajoknál.

A bőrizomtömlő e típusának egyik jellemvonása az, hogy a gyűrűs rostok nem érintkeznek közvetlenül a cuticulával, mert közöttük alaphártya fejlődött ki; az egyes rostok egymástól rendszeren függetlenek, illetőleg egymástól kisebb-nagyobb távolságban fekszenek s mint a *Microrchis ferrum equinum*-nál csupán 0.001 mm. átmérőjűek. A külső hosszirányú rostok egymástól nagyobb távolságban fekszenek, mint a gyűrűsek egymáshoz, a közők átlag 0.02—0.025 mm., vastagságuk átlagosan 0.01 mm. A diagonalis rostok itt is két irányban futnak és kereszteződnek, épen úgy, mint a bőrizomtömlő előbbeni típusánál, az egyes, egyirányban futó rostok egymástól átlag 0.3 mm. távolságban fekszenek, 0.015—0.017 mm. vastagok, tehát a külső hosszirányúaknál valamivel erősebbek. A belső hosszirányú rostok a bőrizomtömlő többi rostjánál erősebbek, átlag 0.03 mm. átmérőjűek, a diagonalis rostok rétegét nem fekszik meg közvetlenül, összefüggő réteget ezek sem alkotnak s egymástól mintegy 0.025—0.03 mm. távolságban futnak.

Itt meg kell jegyezni azt, hogy a bőrizomtömlő különböző irányokban futó rostjai a szívókorongon és belső üregének falazatában is megtalálhatók, de valamennyien mindig sokkal vékonyabbak, mint a test más részein, továbbá a különböző rétegek rostjai egymáshoz sokkal közelebb fekszenek, mint egyebütt.

IV. Parenchyma.

A test főtömegét minden esetben a parenchyma teszi ki, a mely a különböző fajok szerint kisebb-nagyobb fokú változatoságot mutat ugyan, mégis általánosságban két főtypusa különböztethető meg, nevezetesen a *sejtes* és a *rostos parenchyma*.

A *sejtes parenchyma* jellemvonása az, hogy sejtjei csaknem a test minden részében és mindenik belső szerv mentén megtartják typusos szerkezetüket s csak kivételesen módosulnak rostokká vagy alkotnak parenchyma-izmokat és nagyobb öblöket. A parenchymának e fajtáját typusosan a *Microrchis*-genus fajaiban és csekély módosulással a *Chiorchis oxycephalus* (DIES) faj példányaiban találjuk meg.

A parenchyma-sejtek mekkorasága és alakja a test különböző pontjain való elhelyezésük szerint meglehetősen különböző; legkisebbek és legtömöttebbek a hasoldal közelében, továbbá a különböző belső szervek, főleg pedig az idegek és a szívókorong közvetlen szomszédságában, mint az a *Microrchis ferrum equinum* (DIES) különböző testrészeleiből rajzolt parenchyma-sejtek ábráiból is látható. A mekkoraság változatosságának illusztrálására elegendő, ha megemlítem, hogy a sejtek legnagyobb átmérője átlag 0.03—0.1 mm. között ingadozik.

A parenchyma-sejtek alakjuk tekintetéből szintén változatosak, általában sokszögletűeknek mondhatók; de a szívókorong közvetlen közelében orsóformává, majd pedig valódi rostokká idomulnak, mely utóbbi esetben teljesen elveszítik sejtformájukat.

A rostokká át nem idomult sejtek szerkezete meglehetősen typusos, illetőleg a testnek csaknem minden pontján egyező. Minden sejtet meglehetősen vastag burok zár körül, a melynek különböző pontjain egy-egy megvastagodás vehető észre a sagittalis metszeteken, a mely a dorsoventralis parenchyma-rostok átmetszeti képe. A sejtek belső üregét a protoplasma tölti ki, a mely minden esetben igen finoman szemecskés, átlátszó, de tömege nem minden sejtben egyforma és egyenletesen eloszlott. A sejtek egyik részének belső üregét teljesen kitölti a protoplasma s ilyenkor a mag központi fekvésű, körülötte a pro-

toplasma szemecskéi tömöttebb udvart alkotnak, a burok közelében ellenben gyérebbek, sőt néha hiányozni látszanak. A sejtek másik részének belső üregét már nem tölti ki teljesen a protoplasma, mert főtömege mindig a sejtnak valamelyik zugába összpontosult s ezzel kapcsolatosan a mag is idehúzódtott, a mely körül a szemecskék meglehetősen tömött udvart alkotnak. Ebben az esetben természetesen a sejt üregének kisebb-nagyobb része plasmanélkülinek, illetőleg üresnek látszik, de nem lehetetlen, hogy valamiféle nedvvel kitöltött. A sejtagnak helyzete, mint említettem, a protoplasma tömegének elhelyeződésétől függ, általában tojás- vagy gömbforma, belsejében csupán apró chromatin-testecskéket tudtam megkülönböztetni, átmérője átlagosan 0.008 mm., tehát a sejt mekkorágához mérten igen kicsiny.

A *Microrchis*-genus fajainak parenchymájával közeli rokonságot mutat a *Chiorchis oxycephalus* (DIES.) fajé, a mennyiben ennek testében is nagy elterjedésnek örvendenek a sejtek, de ezek között már dús rosthálózat is lép fel s ilyenformán átmenetet alkot a parenchyma második fajtájához, a melyet rostos parenchyma gyanánt különböztethetünk meg.

A *rostos parenchyma* tulajdonképen nem egyéb, mint a sejtesnek további, magasabb fokú olyan fejlődési stádiuma, a melyen a sejtek plasmaanyaga és jórészt magja is elenyészik, burkuk vagy felszívódik, s ekkor helyükre üregek lépnek, vagy pedig egymáshoz simulva rostokat alkotnak, a melyeket kisebb-nagyobb lacunák választanak el. Még leginkább megmaradnak a sejtek nyomai, nevezetesen pedig ezeknek magjai a különböző belső szervek felületén és közvetetlen közelében, így különösen a szívókorong s a kiürítő hólyag körül, itt azonban választófalaik megvastagodtak. A sejtek elenyészése révén keletkezett parenchyma-rostok igen nagy elterjedésben találhatók, így megvannak a *Diplodiscus*- és *Pseudocladorchis*-genus fajai-ban, továbbá a *Chiorchis dilatatus*- és *Chiorchis papillatus*-fajok-ban; de természetesen különböző fejlettségi fokon. Legerőteljesebben fejlett parenchyma-rostokat találunk a *Pseudocladorchis*-fajokban s a *Chiorchis dilatatus*-ban, gyengébbek már a *Chiorchis papillatus*-éi és leggyengébbek a *Diplodiscus*-fajokéi. Általában

különben legerősebbek, illetőleg legvastagabbak a parenchyma-rostok eredésük közelében különösen a bőrizomtömlőtől befelé kisebb távolságban, míg a test középvonala felé haladtukban mindinkább vékonyodnak s egyúttal mindjobban elágazódnak.

A parenchyma-rostok mindannyian a bőrizomtömlőtől kiindulva a test középvonala felé futnak s ezzel kapcsolatosan megkülönböztethetünk dorsoventralis és lateralis irányban haladókat, mely utóbbiak rendesen erőteljesebbek, vastagabbak. A dorsoventralis izmok a test mellső felében, illetőleg a pharynx-tól az első, esetleg második heréig sokkal erőteljesebben fejlődtek ki, mint egyebütt és önálló parenchyma-izmokká módosultak, mint ez látható például a *Chiorchis papillatus* dorsoventralis, illetőleg haránt átmetszetein, a heréken túl azonban ezek már megszűnnek s csupán a rendes dorsoventralis parenchyma-rostok vannak meg. De előfordul az az eset is, hogy a pharynx két oldalán hátrafelé futó erőteljes parenchyma-izomrostok lépnek fel, mint a *Diplodiscus*-fajoknál, vagy pedig a szívíkörong convex oldaláról eredő rostok erősödnek meg hosszirányú parenchyma-izomrostokká, mint ezt a *Chiorchis dilatatus*-nál és a *Pseudocladorchis*-fajoknál tapasztalhatni.

A parenchyma-rostok között fellépő lacunákba a *Chiorchis dilatatus*-nál és a *Pseudocladorchis*-fajoknál az uterus hurkainak első fellépésétől az ivarnyílásig az uterusnak petékkel telt hurkai nyomulnak be; azon lacunákban ellenben, a melyekbe az uterus hurkai nem hatolnak be, vagy esetleg csupán parenchyma-nedv, vagy pedig finoman szemecskés protoplasma található. E szemecskés plasmaállomány a *Chiorchis dilatatus*-ban legtömegesebben a szívíkörong convex oldala mentén lép fel s a parenchyma-rostoktól kisebb-nagyobb darabokra tagolt tömeget alkot, de megtalálható kisebb és egymástól független tömegekben a gyomorágak mentén, továbbá az oesophagus és a pharynx két oldalán is. A *Chiorchis dilatatus* e plasmátömegei, a melyek valószínűleg nem egyebek, mint a rostok alkotása céljából összefolyt sejtek plasmájának utolsó maradványai s illetőleg conglomeratumai, mindig finoman szemecskések, de egészben halvány barnásszürkék és nagymennyiségű magot tartalmaznak. A magok ritkábban egyenként, leg-

gyakrabban kettős, vagy nagyobb számban csoportosan elszórtan fekszenek, typusosan gömbformák, állományuk egyneműnek látszik, belsejükben szintén gömbforma magtestecske van, melynek állományában több szemecske látható. E magok átmérője átlag 0.01 mm. A *Chiorchis papillatus* parenchyma-rostjai között ezek a plasmatömegek már sokkal korlátoltabb mennyiségben lépnek fel, állandóan csupán a pharynx szomszédságában mutatkoznak, még pedig typusosan a pharynx hosszában kétoldalt a pharyngealis táskák hátulsó szegélyéig, de igen gyakran található ilyen tömeg a pharynx hátulsó végén is, ritkán pedig a szívókorong convex oldala mentén. A *Chiorchis papillatus* e plasmatömegei abban különböznek a *Chiorchis dilatatus*-étől, hogy magokat egyáltalán nem tartalmaznak.

A parenchyma azonban nemcsak mint töltelék és vázanyag, s nemcsak mint rostképző anyag szerepel, hanem igen fontos szerepet játszik mint bizonyos belső szervek burkát felépítő alapállomány is. Így a szívókorong convex oldalának fölületét borító burok, mint láttuk, parenchymaszármazék, de parenchymaszármazék, mint látni fogjuk, az egész kiválasztó edényrendszer, a kiürítő hollyag fala, a kivezető csatorna kivételével, továbbá az ivarmirigyek burka s az egész pharyngealis készülék alapanyaga. Sőt igen valószínűnek tartom azt, hogy a *Microrchis*-fajok cuticularétegéhez csatlakozó alaphártya szintén parenchymaszármazék, a mire a parenchymából keletkező többi hártyával azonos festődése alapján bátran következtethetünk.

V. Idegrendszer.

A tanulmányaim során átvizsgált *Paramphistomidae*-félék idegrendszere, a mennyire azt különböző irányú metszetsorozataimra támaszkodva megállapíthattam, egészben véve egyezik a Looss A.-tól e tekintetben behatóan tanulmányozott *Amphistomum subclavatum* fajával (8. Taf. 19. fig. 1—2.), valamint az Otto R.-tól ismertetett *Paramphistomidae*-fajokéval is. (10. p. 60.)

Az idegrendszer középpontját a pharynxtól kisebb-nagyobb távolságban és az oesophagus fölött fekvő két agydúc alkotja, a melyeket meglehetősen széles idegereszték kapcsol össze. E dú-

czok tömege rostok hálózatából és szemecskés anyagból állónak látszik, a melyben a *Chiorchis papillatus*-nál gömbforma sejtek körvonalaikat is meg tudtam különböztetni. Az agydúcok és igeresztékük burkát parenchyma alkotja s belőlük a következő idegek eredését tudtam megkülönböztetni: 1. mellső oldalidegpár; 2. pharyngealis idegpár; 3. hátulsó oldalidegpár; 4. hasoldali idegpár; 5. hátoldali idegpár.

A *mellső oldali idegpár* két fele az agydúcok külső-mellső csúcsán ered s a pharynx-szal párhuzamosan, ehhez valamivel közelebb, mint a test falához, fokozatosan vékonyodva a száj felé fut, lefutásában falazatán egy-két orsóforma idegsejtet tudtam megkülönböztetni, továbbá a szájnyílás felé haladtában fokozatosan vékonyodik és mellső vége bizonyára finoman elpamatolódik s egy-egy finom rostot küld a száj körüli és száj mögötti papillákhoz.

A *pharyngealis idegpár* az előbbeninek szomszédságában ered, még pedig belül ott, hol a harántereszték indul ki, valamivel vékonyabb, mint az előbbeni, egyenesen a pharynx felé, illetőleg a két pharyngealis táska hátulsó szegélyéhez fut, hossza mindig attól függ, hogy az agydúcok mily távolságban fekszenek a pharynx mögött. Ez az idegpár a pharynxot idegzi be, de hogy hol lép be és miként fut le, megállapítanom nem sikerült.

A *hátulsó oldalidegpár* az agydúcok hátulsó külső csúcsán a hasoldali ideggel közös törzsből ered s csak később különül el teljesen; felei eleinte kifelé futnak, de majd hátrafelé hajlanak s úgy haladnak a test falához közeledetten. Hogy ezek az idegek hol és hogyan végződnek, megállapítanom nem sikerült, valamint nem tudtam felismerni azon igerestékek valamennyiét sem, a melyek révén ez az idegpár a hasi és háti idegpárral összeköttetésben áll, csupán egypár ponton láthattam tisztán az igerestékek eredését.

A *hasoldali idegpár* valamennyi között a legerősebb, s mint említettem, a hátulsó oldali idegpárral közös törzsből indul ki, eleinte a hasoldal felé, tehát aláfelé fut, majd hátra kanyarodik s a test hossz tengelyével párhuzamosan halad tova. Igen valószínű, sőt Looss A. és Ottó R. vizsgálataira hivatkozva bizo-

nyosnak mondható, hogy ez az idegpár a szívókorongig fut le, de nekem metszeteimen ezt megállapítanom nem sikerült, mert a heréken túl hátrafelé nem követhettem. Épen így bizonyosnak tekinthető az is, hogy a hasoldali idegpárból is nagyobb számú ereszték indul ki, mint az *Amphistomum subclavatum*-nál, de én ezeket szintén nem bírtam felismerni; az ideg falazatában azonban itt-ott egy-egy orsóforma idegsejtet sikerült megfigyelnem.

A *hátoldali idegpár* az agydúcok hátoldalán, az előbbi két dúc pár eredéspontja fölött indul ki, felei épen oly távol fekszenek egymástól, mint a milyen hosszú a haránt ereszték; egyenesen hátrafelé futnak, a hátulsó oldalidegpárnál kevés-
sel vastagabbak, míg a hasoldalinál sokkal vékonyabbak; lefutásában mindenik fele több oldali eresztéket bocsát, de hogy ezek miként haladnak tovább, nem sikerült megfigyelnem, valamint azt sem, hogy ez az idegpár hol és hogyan végződik; igen valószínűnek tartom azonban azt, hogy ez az idegpár is a szívókorongig fut, épen úgy mint az *Amphistomum subclavatum*-é.

Az idegeken kívül a test különböző pontjain a parenchymába beágyazva, valamint a szívókorong és a pharynx állományában is elszórtan olyan sejteket találunk, amelyeket idegsejteknek, illetőleg dúcsejteknek lehet és kell tekintenünk. Legfeltünőbbek és legtipusosabbak a szívókorong falazatában található dúcsejtek, a melyekről a szívókorong tárgyalásánál már tettem említést s a melyek valamennyien multipolarisak. Ezekhez némileg hasonlók e *Chiorchis*-fajok szívókorongjának convex oldalán, a rostos réteg határában fekvő tömlőforma nagy sejtek is, melyek bizonyára nem egyebek unipolaris dúcsejtek-nél. Meg kell azonban jegyezni azt, hogy vizsgálataim során egyetlen metszeten sem sikerült a dúcsejteknek az idegrostpárok valamelyikével való összefüggését kétségtelenül megállapítanom.

Nem tartom továbbá lehetetlennek azt sem, hogy a pharynx falazatában fellépő úgynevezett *myoblastok* szintén nem egyebek dúcsejtek-nél. E sejtek a pharynx falazatában csak korlátozott számban találhatók, egészen gömbformáknak látszanak, mekkoróságuk fajok szerint változó, így a *Chiorchis papillatus*-

nál 0·025 mm., a *Chiorchios dilatatus*-nál ellenben 0·04 mm. átmérőjűek; körülöttük valószínűleg parenchymaanyagból sajtószerű, némileg hálózathoz hasonló, átlátszó váz fejlődött ki. A plasmatómeg tömötten, finoman és szürkésen szemecskézett. A mag gömbforma, benne vagy csupán chromatin-anyagból álló szemecskék vannak, mint a *Chiorchis papillatus*-nál és 0·012 mm. átmérőjű, vagy pedig jól elkülönült magtestecskét tartalmaz és 0·02 mm. átmérőjű, mint a *Chiorchis dilatatus*-nál.

VI. Emésztőkészülék.

A vizsgált fajok valamennyiének emésztő-készüléke általános szerkezet tekintetében azonosnak mondható s csupán bizonyos részletekben, nevezetesen a pharynx és oesophagus szerkezetében, az utóbbinak, valamint a gyomorágaknak lefutásában mutat fontosabb, a genusokra, sőt egyes esetekben a fajokra is jellemző eltéréseket. Az emésztőkészülék különben tipusosan a következő részekből összetett: 1. *pharynx*; 2. *oesophagus* és 3. *gyomor*.

A *pharynx* a nemek és fajok azon csoportjánál, a melynél a már említett szájkúp kifejlődött, nem a szájnílánál kezdődik, hanem a szájkúp belső határán, mint a *Diplodiscus cornu*-nál s a *Microrchis*-genus fajainál. Azoknak a fajoknak a pharynx-a, a melyeknek szájkúpja nem fejlődött ki élesen, vagy magánál a szájnílánál kezdődik, mint a *Diplodiscus Marenzelleri*, *Pseudocladorchis macrostomus*, továbbá a *Chiorchis papillatus* és *oxycephalus*, vagy pedig a szájüreg belsejében, a szájnílánál kisebb-nagyobb távolságban, a szájkúpos fajokéhoz hasonlólag, mint a *Pseudocladorchis cylindricus* és *nephrodorchis*, valamint a *Chiorchis dilatatus* fajoké.

Meglehetősen tág korlátok között változik a pharynx külső formája és mekkorasága is, a mi különben szoros kapcsolatban áll egyfelől izomfalazatának, másfelől pedig a pharyngeális táskáknak fejlettségével. A fajok egy részének pharynx-a mindenütt egyforma átmérőjű tömlőhöz hasonlít, mint a *Diplodiscus cornu*-é, a *Microrchis megacotyle*, *Pseudocladorchis cylindricus* és *nephrodorchis*, egyik-másik példányáé, valamint a *Pseudoclad-*

orchis macrostomus és *Chiorchis dilatatus* fajoké, hátulsó vége azonban majd többé-kevésbé tompán kerekített, majd pedig közepén sekélyebben vagy erősebben bemélyedt, mely utóbbi eset különösen a *Pseudocladorchis*-fajoknál gyakori a *macrostomus* faj kivételével, de előfordúl a *Microrchis megacotyle*-nél és a *Chiorchis dilatatus*-nál is. Igen gyakori eset az, hogy a pharynx hátulsó felén gyengébb vagy erősebb befűződés lép fel, a mely mintegy mellső és hátulsó részletre tagolja; ezt az esetet találjuk typusosan a *Microrchis ferrum equinum*-nál, továbbá a *Microrchis megacotyle* és *Pseudocladorchis cylindricus* faj egyik-másik példányánál, legfeltűnőbbben alakul azonban a befűződés következtében a pharynx hátulsó részlete a *Pseudocladorchis nephrodorchis* faj egyik-másik példányánál, a mennyiben kerekített csúcsú kúphoz hasonlónak idomul. A fajok kisebb részének pharynx-a már többé-kevésbé körteformának mondható, szájfelőli részlete sokkal vékonyabb, hengeres; hátulsó részlete ellenben duzzadt és hátulsó vége közepén feltűnően bemélyedt s így kétkarélyos. Ilyen pharynxot találunk jellemzően a *Diplodiscus Marenzelleri*-nél s a *Chiorchis papillatus* és *oxycephalus* fajoknál.

Valamennyi faj pharynxának közös jellemvonása az, hogy üregének hátulsó részén *pharyngeális táskák* különültek el, a melyeknek mekkorasága és elhelyezése azonban két typust mutat a pharynx falazatának vastagsága szerint. Az igen vastag falazatú pharynx táskái aránylag kicsinyek s a falazatban olyformán helyezkednek el, hogy jelenlétük külsőleg csak abban az esetben ismerhető fel, ha közöttük a pharynx hátulsó vége élesebben bemélyedt, mint a *Microrchis megacotyle* egyik példányánál, míg a *Diplodiscus cornu*-, *Microrchis ferrum equinum*-, *Chiorchis dilatatus*-fajoknál s a *Pseudocladorchis*-genus összes képviselőinél az említett bemélyedés sekélyisége vagy hiánya miatt jóformán csak metszeteken, vagy a mikroszkop megfelelő mély beállításánál vehetők észre. A vékony falazatú pharynx-szal bíró fajok pharyngeális táskái az előbbienekhez viszonyítva és aránylagosan már meglehetősen nagyok, miért is már külsőleg is könnyen feltűnnek, annyiival is inkább, mert a pharynx hátulsó vége a két táska között erősen bemélyedt s tulajdon-

képen a táskák befogadására szolgáló két karélyt alkot, mint ezt a *Diplodiscus Marenzelleri*-, a *Chiorchis papillatus* és *oxycephalus*-fajoknál találjuk. A pharyngealis táskák különben majdnem tipusosan körteforma tömlőkhöz hasonlítanak, keskenyebb végük mindig a pharynx üregével közlekedik, szélesebb zárt végük a pharynx külső falazata felé tekint, néha egymással s a test hossz tengelyével párhuzamosan fekszenek, máskor ellenben zárt végükkel ki- és hátrafelé tekintenek; az első eset tipusosan megtalálható a garattáskák második típusánál, míg az utóbbi eset leggyakoribb a garattáskák első típusánál. A *Microrchis ferrum equinum* garattáskái alakjuk tekintetében különböznek a többi fajokétól, a mennyiben egészen gömbformák s a pharynx üregével igen keskeny vezeték révén közlekednek. A pharyngeális táskákat egymástól elválasztó választófal vastagsága mindig szoros kapcsolatban áll egyfelől a pharynx falazatának vastagságával, másfelől a pharyngeális táskák mekkoraságával; minél vastagabb ugyanis a pharynx falazata s minél kisebb terjedelműek a pharyngealis táskák, annál vastagabb a közöttük lévő választófal, és minél vékonyabb a pharynx falazata s minél nagyobb terjedelműek a pharyngealis táskák, annál vékonyabb a közöttük lévő választófal, mint ezt nagyon szépen demonstrálja a *Diplodiscus Marenzelleri*-, *Chiorchis papillatus*- és *oxycephalus*-faj pharynx-a is. Különben a pharyngealis táskák minden esetben a pharynx üregének a falazatba való bemélyedése révén keletkeztek, mint ezt a vastagfalazatú pharynxon kétségtelenül megállapíthatjuk és létrejöttüket kétségtelenül a fölület, illetőleg a pharyngeális üreg megnagyobbitására irányuló törekvésnek köszönhetik.

A pharynx egész falazatának szöveti összetétele fajok szerint meglehetősen változó ugyan, de azért bizonyos tekintetben teljes egyezést mutatnak. Valamennyi faj pharyngealis üregének belső falazatát változó vastagságú kutikularéteg takarja, a mely bizonyára nem egyéb, mint a testnek a szájnnyíláson át betűrődött kutikulájának folytatása s a mely alatt a bőrizomtömlő rétegeinek megfelelő izomrostrétegek terülnek el. Közvetlenül a kutikularéteg alatt gyűrűs vagy æquatorialis rostok rétege sorakozik, a melyen belül a hosszirányú s illetőleg meridiona-

lis rostok különböző vastagságú rétege következik, de ez a pharynx mellső felében nem mindig, sőt csak ritkán fekszi meg az előbbenit. A pharynxnak a test parenchymája felőli fölületét vékonyabb vagy vastagabb, parenchyma-eredetű burok takarja, melyről a test falazata felé futó s a pharynx függesztésére, illetőleg mozgatására szolgáló parenchymarostok, esetleg elülről hátrafelé futó parenchyma-izomrostok erednek, mint specialiter a *Diplodiscus* genus fajainál. A parenchyma-eredetű burok alatt meridionális irányban futó izomrostoknak, a külső meridionalis izomrostoknak vékonyabb vagy vastagabb rétege terül el. A pharynx falazatának főtömegét azonban minden esetben a radialis izomrostok alkotják, a melyek szélesebb, gyakran elágazódó alappal a parenchymatikus buroktól indulnak ki s úgy futnak a pharyngeális üreg felé, de befelé haladtukban fokozatosan vékonyodnak; lefutásuk a pharynx mellső részében egyenes irányú, de a pharyngealis táskák fölött fekvők között tangentialisak is lépnek fel, a melyek a pharyngealis táskák falazatához ereszkednek le lejtősen és csatlakoznak ezeknek radialis izomrostjaihoz. A radialis izomrostok közötti hézagokat minden esetben parenchyma-hálózat tölti ki, a melyben a pharyngealis üreg mentén epithelsejtek sorakoznak elszórtan, vagy kisebb-nagyobb csoportokban, a melyek itt is a kutikula anyagát szolgáltatják.

Vége a pharynx falazatának anyagát kiegészítik az úgynevezett *myoblastok*, a melyekről a dúcsejtek tárgyalásánál már szóltam. A fajok egy részének pharyngealis falazata az előzőekben ismertetett és talán típusosnak mondható szerkezetet mutatja, mint a *Diplodiscus Marenzelleri*- és *cornu*-, valamint a *Chiorchis*-genusba tartozó fajoké, míg a többi fajoké már kisebb-nagyobb eltérést mutat.

A *Pseudocladorchis*-genus fajainak pharyngealis falazatában a belső lument határoló kutikula alatt elterülő gyűrűs és erőteljesebb belső meridionalis izomrostnyalábon túl kifelé, mintegy a falazat közepetáján, finom gyűrűs rostok rétege következik. A bőrízomtóló hosszirányú rostjainak megfelelő dél-körös rostok nyálába a garattáskák felé fokozatosan vékonyodik, majd pedig alig észrevehetővé válik. A külső gyűrűs ros-

tok pamata két végén elkeskenyedik és hátul csupán a pharyngealis táskákig követhető.

A *Microrchis ferrum equinum* pharynxának falazata szerkezet tekintetében nagyon hasonlít a *Pseudocladorchis*-genus fajaiéhoz s csak abban különbözik, hogy a belső meridionalis rostok nyalábjától kifelé fekvő gyűrűs rostok pamata vékonyabb, továbbá, hogy a külső meridionalis rostokon belül a pharynx elején 6—8 erős gyűrűs izomrost is fejlődött ki.

A legbonyolódottabb összetételű a *Microrchis megacotyle* pharynxának a falazata, a mennyiben itt összesen úgy a gyűrűs, valamint a meridionalis rostoknak is három különálló pamatát találjuk meg. A három gyűrűs rostpamat közül a lumenet határoló kutikula alatt s a belső meridionalis rostnyalábban túl kifelé fekvő homolog a *Pseudocladorchis*-genus fajai és a *Microrchis ferrum equinum* pharyngealis falazatából ismertettekkel, míg a harmadik, legkülső és legerősebb gyűrűs izomrostpamat némileg összehasonlítható a *Microrchis ferrum equinum* külső meridionalis rostjainak közelében fekvő erős gyűrűs rostokkal, csak hogy itt a rostok sokkal vékonyabbak, nagyobb számúak, elülről hátrafelé vékonyodó nyalábot alkotnak s a külső meridionalis rostoktól feltűnően eltávolodtak. A három meridionalis rostnyaláb közül a belső és a külső homolog a többi fajokéval, míg a középső, a mely a középső és a külső gyűrűs rostok pamata között húzódik el, csupán e fajnál található meg s csupán a pharyngealis táskákig követhető.

A gyűrűs és radialis rostok minden esetben a pharynx lumenének elszűkülésénél és kitágulásánál játszanak szerepet, még pedig a gyűrűsek bizonyára specialisan az elszűkülésnél, a radialisak pedig a kitágulásnál; a meridionalis rostok feladata a pharynx megrövidítésére irányulhat.

Valamennyi faj pharynxának falazatában jól elkülönült sphinctert találunk, a melynek száma és elhelyezése azonban két típust mutat. Vannak ugyanis a fajok között első sorban olyanok, a melyeknek pharynxában csupán egy sphincter fejlődött ki, mint a *Diplodiscus cornu*-ében, a *Microrchis*-genus fajaiében, továbbá a *Chiorchis papillatus*- és *oxycephalus*-ében; a fajok másik részének pharynxában már két sphincter különült

el, mint a *Diplodiscus Marenzelleri*-ében, a *Pseudocladorchis*-genus fajaiében s a *Chiorchis dilatatus*-ében.

Abban az esetben, ha a pharynxnak csupán egy sphincterje van, ez mindig annak mellső, a szájüreggel közlekedő végén van s a pharynx nyílásának elszűkítésére szolgál, de a fajok szerint változó fejlettségű, mindig azonban nagyobb mennyiségű gyűrűs rostból összetett. Leggyengébben fejlett sphinctert találunk a *Chiorchis papillatus* s a *Diplodiscus cornu* pharynxában, valamivel erősebb már a *Chiorchis oxycephalus*-é és legerőteljesebben fejlett a *Microrchis*-genus fajaié.

Ha a pharynx falazatában két sphincter fejlődött ki, akkor az egyik typusosan a pharynx szájüreg felőli végén helyezkedik el, míg a másik vagy az oesophagus benyílása előtt, vagy pedig az oesophagusnak a pharynx falazatában fekvő mellső vége körül. Az oesophagus nyílása előtti sphincter csupán a *Diplodiscus Marenzelleri* fajnál található meg, majdnem a pharynx közepén fekszik, a pharyngealis táskák eredése előtt és összehúzódása alkalmával a pharynxot némileg piskótaszerűen szűkíti el. Az oesophagus legmellső végét körülfogó sphincter már nagyobb elterjedésnek örvend, a mennyiben ilyen fejlődött ki a *Pseudocladorchis*-genus valamennyi fajánál, továbbá a *Chiorchis dilatatus*-nál. Általában majdnem szabályszerűnek mondható az, hogy mindazon fajok pharynxának falazatában, a melyeknek oesophagusa a pharynx hátulsó végének falazatát áttöri, a második sphincter itt helyezkedik el s csupán a *Diplodiscus cornu* tesz kivételt, minthogy ennél a második sphinctert nem tudtam megkülönböztetni. Az oesophagus körüli második sphincter mindig kisebb átmérőjű, mint a szájfelőli, falazatának vastagsága azonban igen gyakran meghaladja az előbbeniét.

Az oesophagus úgy a pharynx-szal való közlekedése, valamint szerkezete tekintetéből is két typust mutat. A fajok egy részénél az oesophagus mindig a pharynx hasoldalán, körülbelül ennek közepe táján, illetőleg a pharyngealis táskáknak a pharynx üregébe nyílása előtt nyomul be a falazatba, azaz nyílik be; ezt az esetet találjuk a *Diplodiscus Marenzelleri*-nél, a *Microrchis*-genus fajainál, mint a *Chiorchis papillatus*-nál és *oxycephalus*-nál. Ebben az esetben az oesophagus a

pharynx falazatából való kilépés után előbb a hasoldal felé és hátrafelé halad, majd íves hajlással a hátoldal felé és hátrafelé tart, hogy érintkezésbe léphessen a hátoldal közelébe húzódott gyomorágakkal. A fajok másik részének œsophagusa a pharynx hátulsó végén hatol át a pharyngealis falazaton, illetőleg lép összeköttetésbe a pharynx belső üregével. Ez a behatolás típusosan a két pharyngeális táska elválasztó falazatán át történik a középvonalban s a következő fajoknál található fel: a *Diplodiscus cornu*-nál, a *Pseudocladorchis*-genus valamennyi fájánál, valamint a *Chiorchis dilatatus*-nál. Ebben az esetben az œsophagus a pharynx falazatából való kilépés után egyenesen hátrafelé halad, de lefutásában ferdén a hátoldal felé tart, hogy egyesülhessen a gyomorágakkal.

Mint említettem volt, az œsophagus szerkezete tekintetéből a fajok szintén két csoportba oszthatók, nevezetesen vannak olyanok, a melyeknek œsophagusa a gyomorágakkal való érintkezése közelében csak kissé kiszélesedett, de valódi bulbust nem alkot, és vannak olyanok, a melyeknek œsophagusa a gyomorágakkal való egyesülése előtt valódi bulbusszá duzzadt.

A bulbusszal nem végződő œsophagus sokkal korlátoltabb elterjedésű, mint a bulbusszal végződő, a mennyiben csupán a *Pseudocladorchis*-genus fajainál található meg. Jellemzi az œsophagusnak e típusát az, hogy hátrafelé, illetőleg a gyomorágakhoz közelebb jutása során fokozatosan szélesedik, a gyomorágaktól kis távolságban kettéágazik, hogy így a két gyomorággal érintkezésbe léphessen; ágai a fajok szerint majd rövidebbek, majd hosszabbak és gyengén ki- meg hátrafelé tekintenek. Erre némileg emlékeztet a *Diplodiscus cornu* œsophagusa, a mely a gyomorágak közelében szintén kettéágazik, de az elágazás előtt falazata sokkal vastagabb, mint egyebütt, jóformán bulbusszá duzzadt s így átmenetet alkot a valódi bulbusszal végződő œsophagus és a bulbus nélküli között.

A bulbusszal végződő œsophagus már sokkal nagyobb elterjedésben található, a mennyiben ilyen fejlődött ki a *Diplodiscus Marenzelleri*-nél, a *Microrchis*- és *Chiorchis*-genusok fajainál. Jellemzi az œsophagus e típusát az, hogy a gyomorágak közelében lévő vége mindig erősebben duzzadt valódi, de

különböző alakú bulbust alkot, továbbá a gyomorágakkal nem két ág bocsátása, hanem bemélyedés révén érintkezik. A bulbus alakja és mekkorasága fajok szerint variál, így például majdnem gömbforma, de aránylag kicsiny a *Diplodiscus Marenzelleri*-é, meglehetősen nagy és hagymaforma a *Microrchis*-fajoké, valamint a *Chiorchis dilatatus*-é is, míg aránylag kicsiny és kevésbé duzzadt a *Chiorchis papillatus*-é és *oxycephalus*-é.

Az oesophagus minden esetben hengeres cső és szöveti szerkezete csaknem mindig azonos. Az oesophagus fölületén egész hosszában epithelsejtek halmozódtak fel, a melyeknek mirigytermészete egészen kétségtelen, de tartalmuk nem az oesophagus üregébe jut, hanem csupán az üregét kibélelő kutikula felépítésére szolgál, a mi bátran következtethető abból a körülményből, hogy maga a kutikula egészen egynemű, szerkezet nélküli, rajta likacscsatornáknak nyomait sem birtam felismerni. Az epithelsejtek egészen fűrtformán borítják az oesophagus fölületét, sőt még a gyomorágak közti keskeny területen is megvannak, mindig tömlőformák és mindenben egyeznek a test kutikulája mellett fekvőkkel; fölületük a parenchyma-anyaggal áll összeköttetésben, a mely különböző tömötségu hálózatot alkot.

Az epithelsejtek halmazán belül az egész oesophagus hosszában futó izomrostokat találunk, a melyek majd tömöttebben, majd gyérebben sorakoznak egymás mellé és egész réteget alkotnak, a melyen belül gyűrűs rostok rétege következik. A gyűrűs rostok az oesophagus pharynx felőli felén vékonyabb réteget alkotnak, mint a gyomorágak felőliben, illetőleg a gyűrűs rostok rétege hátrafelé meglehetősen feltűnően vastagodik, a menyiben mind több és több rost sorakozik egymás fölé; de legvastagabb a gyűrűs izomréteg a bulbus körül, a miről különösen a bulbus haránt átmetszeti képein győződhetünk meg kétségtelenül, mint egyebek között a *Microrchis ferrum equinum*-éin is. A gyűrűs rostok rétegén belül végre az oesophagus lumenét határoló kutikulaburkot találjuk, a mely feltűnő vastagságával tűnik ki, a mennyiben átlagosan 0.025 mm. átmérőjű, de mindig legvastagabb a bulbusban, még pedig ennek mellső felében. A kutikula mindig igen hajlékony, annyira, hogy az oesophagus falazatának összehúzódása során redőket alkot, mint ez a *Micror-*

chis ferrum equinum-nál is látható, máskülönben egészen szerkezetnélküli, illetőleg mindenben egyezik a testet borító kutikula-réteggel.

A *gyomor* a fajok valamennyiénél két ágra oszlott, a melyek, mint említettem, vagy magával az *oesophagus* bulbusával, vagy pedig ennek két ágával lépnek összeköttetésbe. A gyomorágak már eredésüktől kezdve vagy egyenesen hátrafelé futnak, mint specialiter a *Pseudocladorchis*-genus fajainál, vagy pedig eleinte a két oldala felé haladnak, majd pedig ívesen hátrafelé fordulnak, mint ezt a többi genus fajainál találjuk; máskülönben valamennyi fajnak közös jellemvonása az, hogy a gyomorágak sehol sem ágaznak el mellékágakra és hátul vakon végződnek. A gyomorágak lefutása genusok, sőt bizonyos fokig fajok szerint is változó, általában mindig a hátoldal közelében, a test két oldalától kisebb-nagyobb távolságban fekszenek, néha egymástól távolabb, néha ellenben közelebb; legtávolabb fekszik egymástól a *Diplodiscus*-genus két fájának gyomorága, átlagosan 1 mm.-nyire, és legközelebb a *Pseudocladorchis*-genus fajai, továbbá a *Chiorchis papillatus* és *oxycephalus*-fajok hengeres példányaié. A fajok egy részének gyomorágai egyenes lefutásúak, mint a *Diplodiscus*-genusba tartozóké, a *Microrchis megacotyle*-é s a *Pseudocladorchis cylindricus*-é; a fajok másik részének gyomorágai ellenben kigyózó lefutásúak, mint névszerint a *Microrchis ferrum equinum*-éi, a *Pseudocladorchis nephrodorchis*-éi és *macrostomus*-éi, továbbá az összes *Chiorchis*-fajokéi. A *Chiorchis papillatus* és *oxycephalus*-fajok példányai között találtam olyanokat is, a melyeknek gyomorágai nemcsak kigyózó lefutásúak voltak, hanem többszörösen hurkokat is alkottak, a minek okát én különben csupán az összehúzódnak különböző fokának és irányának tulajdonítom. A gyomorágak hossza is igen változatos, egyes esetekben nem terjednek túl a csíramirigyen, tehát visszamaradnak a szívókorongtól, mint a *Diplodiscus cornu*-nál, a *Microrchis megacotyle*-nél, továbbá a *Pseudocladorchis cylindricus*-nál és *nephrodorchis*-nál, máskor ellenben a szívókorong közelébe jutnak le, sőt ezt még érinthetik is, mint a *Diplodiscus Marenzelleri*-nél, a *Microrchis ferrum equinum*-nál, a *Pseudocladorchis macrostomus*-nál s a *Chiorchis*-

genus összes fajainál. Általános jellemvonása a gyomorágaknak az, hogy majdnem mindig hátrafelé fokozatosan szélesednek, illetőleg vastagodnak s e szabály alól csupán a *Pseudocladorchis*-genus fajai tesznek kivételt, a mennyiben ezeknek gyomorágai eredésüknél a legvastagabbak, hátrafelé fokozatosan vékonyodnak és hegyesen végződnek.

A *gyomorágak* szöveti szerkezete, a mennyire azt metszet-sorozataim áttanulmányozása alapján állíthatom, valamennyi fajnál csaknem teljesen azonos. A gyomorágaknak külső, illetőleg a test parenchymája felé tekintő fölületét parenchyma-anyag borítja finoman szemecskés rétegben, a melyben elszórtan parenchyma-magvakat is találunk, mint specialiter a *Chiorchis dilatatus*-nál; egyes esetekben azonban a parenchyma szemecskés rétegében az epithelsejtekhez hasonló sejteket is különböztethettem meg, a melyek a *Hein W.* értelmezése szerint valódi epithelsejteknek tekintendők s a gyomorágak tunica propriáját építik fel. Ilyen sejteket különösen a *Chiorchis papillatus* gyomorágainak mentén találtam. A gyomorágak fölületét takaró parenchyma továbbá rostokat is alkot, a melyek között kisebb-nagyobb öblök alakulnak ki s ezek néha szürkésebb szemecskés anyaggal kitöltöttek lehetnek.

A parenchyma-rétegen belül a gyomorágak egész lefutásában hosszirányú izomrostok fekszenek, a melyeknek vastagsága és egymástól való távolsága fajoként igen változik, sőt változik a gyomorágak belső tartalmának mennyisége szerint is, általában azonban mindig ritkábban fekszenek, mint az alattuk fekvő gyűrűs rostok, vastagságuk átlagosan egyezik az előbb említettekével. A gyűrűs rostok mindig tömöttebben sorakoznak egymás mellett, de teljesen összefüggő réteget mégsem alkotnak, egymástól rendesen egyenlő távolságban állanak ugyan, de a gyomorágak megrövidülése révén közvetetlen egymás mellé is kerülhetnek; a közöttük lévő hézag általában igen finoman szemecskézett állománynyal kitöltött.

A gyűrűs izomrostok rétegén belül igen vékony, szerkezet-nélküli kutikulahártya következik, a mely a gyomorágak endothelsejtjeit elválasztja a gyűrűs rostok rétegétől s a gyomorágak falazatának tunica propriáját alkotja. E tunica propriának anya-

gát, mint említettem, valószínűleg a hosszirányú izomrostok rétegén kívül s a parenchymában fekvő epithelsejtek választják el.

A gyomorágak falazatát belülről endothel-sejtek bélelik ki, a melyek alakjukat illetőleg a fajok és a gyomorágak különböző tájai szerint különböző fejlettségűek. A *Chiorchis dilatatus* endothelsejtjei ugyanis megnyúltak, oszlopformák, basalis harmadukban feltűnően elkeskenyedtek, közöttük mindig meglehetősen hézag van, mely szemecskés állománynyal kitöltött s a tunica propria közelében átlag 0·0025 mm. átmérőjű magot tartalmaz. E sejtközi hézagok szemecskés állományukkal és magjukkal véleményem szerint nem egyebek, mint a már felhasznált endothelsejtek utolsó maradványai, a melyekhez hasonló képleteket ismertetett H. v. Buttel-Reepen a *Distomum ampullaceum* mirigyes gyomrának falazatáról. (V. ö. 3. p. 201. Taf. 10. fig. 51.) A tulajdonképeni endothelsejtek átlag 0·035 mm. hosszúak, legnagyobb átmérőjük 0·008—0·01 mm., a legkisebb átmérőjük körülbelül 0·0025—0·003 mm. között ingadozik; plasmaállományuk basalis $\frac{2}{3}$ -ában szürkésen szemecskés, a szemecskék egy része hosszirányú sávokban rendeződött; apicalis $\frac{1}{3}$ -ának plasmaállománya egészen egynemű s úgy látszik, mintha a sejtek itt syncytiummá olvadtak volna össze, a mennyiben én itt határvonalait felismerni nem tudtam. E sejtek magja teljesen egyezik a sejtközi hézagokban fekvőkkel s mindig a sejtek apicalis felében fekszik. Az endothelsejteket a gyomorágak ürege felől igen vékony, de éles körvonalú kutikulahártya takarja, a melynek finom likacsosatornáin át az endothelsejtek homogen syncytiumából kiinduló s a gyomorágak üregébe nyomuló finom, csillangókra emlékeztető nyújtványok indulnak ki, melyeknek hossza átlag 0·01 mm. E nyújtványokhoz hasonlókat már Blumberg C. látott az *Amphistomum conicum* gyomorágainak endothelsejtjein és csillangóknak értelmezte (1. p. 24. fig. 6.); de hasonlókat írt le H. v. Buttel-Reepen a *Distomum ampullaceum* mirigyes gyomrából, csak hogy sokkal hosszabbakat (0·304 mm.), (3. p. 202. Taf. 10. fig. 51.) és magyarázatukat nem adja. Felfogásom szerint e nyújtványok tényleg nem csillangók, mint azt már előttem többen is állították, hanem az endothelsejtek

hyalin syncytiumának olyan nyújtványai, a melyeknek anyaga az emésztésnél az enzima szerepét játszsza, a miről meggyőz a később tárgyalandó *Chiorchis papillatus* endothelsejtjeinek sajátos módosulása.

A *Microrchis ferrum equinum* gyomorágainak szöveti szerkezete általánosságban egyezik a *Chiorchis dilatatus*-éval s csupán az endothelsejtek alakja, mekkorasága s a finom nyújtványok hosszúsága tekintetéből tér el. Itt ugyanis az endothelsejtek aránylag rövidek, hosszúságuk csupán 0·01 mm., négyszögű oszlopokhoz hasonlítanak, mindenütt egyforma vastagok, átmérőjük átlag 0·006 mm., plasmaállományuk ugyanazt a szerkezetet mutatja, mint a *Chiorchis dilatatus*-endothelsejtjeié, de a hyalin syncytium keskenyebb. Az endothelsejtek apicalis végének hyalin syncytiumából kiinduló nyújtványok már nem annyira csillangószerűek, mint a *Chiorchis dilatatus*-éi, hanem inkább ostorokhoz hasonlíthatók, majdnem 0·05 mm. hosszúak, tehát ötször hosszabbak maguknál a sejteknél. Jellemző még az, hogy itt az endothelsejtek közvetlenül sorakoznak egymás mellé, közöttük hézagok nincsenek és magjuk tojásforma.

Hogy milyen elterjedtségnek örvendenek a gyomorágakban az endothelsejtek finom nyújtványai s hogy feladatuk mire vonatkozik, legszembeszökőbben bizonyítják a *Chiorchis papillatus* gyomorágainak különböző tájairól való metszetek, illetőleg ezeknek összehasonlítása. E faj gyomorágainak elején, sőt még közepe táján is az endothelsejtek típusos szerkezetet mutatnak, határvonalaik élesek, könnyen felismerhetők, mindannyian négyszögű oszlopokhoz hasonlítanak, átlag 0·0015 mm. hosszúak és 0·001 mm. átmérőűek, közöttük hézagok nincsenek, magjuk gömbforma, hyalin syncytiumuk megvan, de igen keskeny, csillangószerű nyújtványaik 0·001—0·0014 mm. hosszúak, finom belső végük az elnyelt táplálékrögöket körül folyó anyagba mintegy beolvadni látszik. A gyomorágak hátulsó barmadában az endothelsejtek választó határai már egészen elenyésznek, úgy hogy plasmaállományuk syncytiummá folyt össze, melyben a helyükön maradt magok jelzik a korábbi sejtek helyét, ezenkívül maga az endothelialis réteg is kissé megváltozott, a menyiben keskenyebb, 0·0008 mm.-nyire vékonyodott s a csillangó-

szerű nyújtványok is ugyanennyire, sőt még valamivel kisebbre rövidültek, az elnyelt táplálékrögök feltűnően elapozódtak s a köztük levő emésztőnedv jobban megsűrűsödött. A gyomorágak hátulsó végének endothel-rétegében a sejtek határa szintén hiányzik és plasmaállományuk szintén syncytiummá folyt össze, de szerkezetét lényegesen megváltoztatta, mert hiányzanak belőle a szemecskesávok, egész tömege egyneműen szemecskésnek látszik, a magok sokkal gyéribben mutatkoznak, egy részük valószínűleg elenyészett. Igen jellemző itt a csillangószerű nyújtványok teljes hiánya, minek következtében a gyomorágak tartalma közvetlenül érintkezik az endothel-réteg belső határával s ezt nagyobb rögöket tartalmazó, tömörebb, szemecskés állomány gyanánt fekszi meg. Az endothel-réteg máskülönben itt alig észrevehetően vékonyabb, mint a gyomorágak hátulsó harmadában.

Az épen előadottakra támaszkodva, azt hiszem, nem nagyon tévedek, ha feltételezem azt, hogy a gyomorágak endothel-sejtjeinek csillangószerű nyújtványai nem csillagók, hanem a sejtek váladékából keletkezett oly nyújtványok, a melyeknek anyaga a táplálékrögökkel érintkezve enzymanemű állománynyá alakul s így ezek a nyújtványok az emésztésnél játszanak nagy szerepet.

Hogy a gyomorágak falazatát borító parenchyma-anyagban vannak-e kiválasztó edény-elágazódások s honnan jönnek, merre mennek a gyomorágak idegei, vizsgálódásaim során megállapítanom nem sikerült.

Hogy a vizsgált fajok milyen táplálékot fogyasztanak, részletesen megállapítani nem kísérlettem meg. A *Chiorchis dilatatus*-ról azonban konstatalhatom, hogy a gazdaállat gyomortartalmát fogyasztja válogatás nélkül, miután egyik gyomorágában a gazdaállat Nematoda-parasitájának egy példányát találtam meg zsírcseppek és vérsejtek társaságában. A *Chiorchis papillatus* gyomorágaiban csupán zsírcseppeket és a desorganisatio különböző stadiumain lévő vérsejteket láttam.

V. Kiválasztó edényrendszer.

Vizsgálataim során, a lehetőség határai között, igyekeztem valamennyi faj kiválasztó edényrendszerét minél kimerítőbben tanulmányozni, és bárha ez nem minden esetben sikerült kielégítőleg, mégis annyit meg tudtam állapítani, hogy az egyes fajok között e tekintetben nagyon lényeges különbség nincs. Valamennyi faj kiválasztó edényrendszerén typusosan három főrésztet különböztethetünk meg, nevezetesen a *főedénytörzseket* vagy gyűjtőcsatornákat és mellékágaikat a capillaris edényekkel, a *végsejtet* a csillangós tölcserrel és a *kivezető hólyagot*.

A *kiválasztó edénytörzsek* általánosan részint a gyomorágaktól körülzárt területen, ezek belső szegélye mentén és hasoldalán, részint a gyomorágakon kívüli területen húzódnak végig és rajtuk megkülönböztethetők a *főtörzsek* vagy *gyűjtőcsatornák*, a *mellékágak* és *capillaris edények*.

A *főtörzsek* vagy *gyűjtőcsatornák* a kivezető hólyagtól kiindulólág egészen a pharynxig követhetők. Legjobban tanulmányozhattam a *Chiorchis papillatus* és *oxycephalus* gyűjtőcsatornáinak a lefutását, a melyek excrementum-tartalmuk révén könnyen felismerhetők és követhetők s a következő eredményre jutottam. Mindkét gyűjtőcsatorna vagy főedénytörzs a kivezetőhólyagtól a test hátulsó harmadának elejéig, illetőleg a gyomorágak hátulsó behajlásáig ágazatlan, itt azonban mindkettő a test középvonala felé egy-egy mellékágat bocsát, a melyek előbb két nagyobb s aztán számos vékony mellékágacskára tagolódnak. A test középső harmadának elejéig, illetőleg a gyomorágak első bemélyedéseig a két főedénytörzs szintén nem ágazik el, itt azonban csaknem egyforma erős két főágra tagozódik, a melyeknek egyike a gyomorágak belső határa mentén halad az ivarnyílásig, illetőleg az oesophagus bulbusának hátulsó végéig, itt aztán be- és hátrafelé hajlik, lassacskán pedig mind több-több ágacskára pamatolódik. A másik főág a gyomorágak alatt s ezeken kívül egyenesen előre fut, lefutásában mind vékonyabb-vékonyabb ágacskákra oszlik, a melyek teljesen behálózják a test mellső végének parenchyma-anyagát. Minthogy a kiválasztó főedénytörzsek, vagy gyűjtőcsatornák hátulsó harmadából kiinduló

más mellékágat a már fentebb említetteken kívül megkülönböztetni nem tudtam, igen valószínűnek tartom azt, hogy ezek s illetőleg további ágacskaik hálózák be a test hátulsó végét és a szívókorongot is. E szabály alól mintegy kivételt alkot a *Microorchis ferrum equinum* (DIES), mert ennek kiürítő hólyagjából nem csupán a már ismertetett két főedénytörzs vagy gyűjtőcsatorna, hanem még egy harmadik is indul ki, még pedig ennek hasoldaláról, nem messze a kivezető cső kezdetétől s aztán föl- és hátrafelé halad a szívókoronghoz, a melynek állományában kétségtelenül nagyszámú mellékágacsakára tagolódik. Nem tartom különben kizártnak azt sem, hogy a kiválasztó edényrendszernek e typusa igen nagy elterjedésben fordul elő, de más fajoknál ezt kétségtelenül megállapítanom nem sikerült.

A főedénytörzsek vagy gyűjtőcsatornák, mint már említettem, lefutásuk bizonyos pontjain elágaznak, még pedig mind vékonyabb-vékonyabb mellékágacsákra, a melyek aztán a parenchyma-anyagot dúsan behálózák. Legkönnyebben felismerhetők e mellékágacsák a test mellső végén, illetőleg a pharynx körül és ennek szomszédságában, de felismerhetők a test más pontjain is.

A kis, finom mellékágak végre a *capillaris edényekbe* mennek át, a melyek tulajdonképen nem egyebek, mint az előbbenieknek sokkal vékonyabb s a csillangós tölcserrel, illetőleg végsejttel direct összeköttetésben álló folytatásai, de felismerésük már sokkal nehezebb.

A *végsejtek* és a csillangós tölcserék a *capillaris edények* distalis végén fekszenek. A csillangós tölcser tulajdonképen nem egyéb, mint a *capillaris edények* a végsejttel közlekedő részletének tölcserforma azon kiszélesedése, a melybe a csillangópamat lóg be. A csillangópamat metszeteimen csupán átlátszó kúpforma tömeg gyanánt mutatkozott, a melyen hosszirányú rostok, valószínűleg a csillangók körvonalai látszóttak. A végsejtek maguk teljes mértékben hasonlítanak azokhoz, a melyeket. A. Looss a *Distomum perlutum*, *Dist. folium*, *Dist. tereticole* és *Dist. cylindraceum* fajokból ismertetett. (9. Taf. 4. Fig. 74., 77., 87. Taf. 7. fig. 150.) Mindenik végsejt egy multipolaris sejthez hasonló; fölületét parenchyma-anyag és hálózat takarja;

plasma-anyaga finoman, szürkésen szemecskés és nagyobb számú, különböző mekkoraságú, sötétszínű, erősen fénytörő testecskéket tartalmaz, a melyek mindenben hasonlítanak a gyűjtő-csatornák, valamint a mellékágak és capillaris edények falazatában levő excrementum-szemecskékhez. A sejtmag gömbforma és csupán chromatin-szemecskéket tartalmaz. A sejtek átlagos legnagyobb átmérője 0.03—0.04 mm.; a mag átmérője 0.008—0.009 mm.

A főedénytörzseknek vagy gyűjtőcsatornáknak, valamint legfinomabb ágacskáinak s a capillaris edényeknek is fölületét parenchymaanyag takarja, a melyből finom, különbözőképen elágazódó hálózat indul ki. A parenchyma-anyagon belül a gyűjtőcsatornák, mellékágacskáik és a capillaris edények saját burkát találjuk, a mely élénk szineződése után következtetve nem kutikula-anyagból áll, hanem parenchyma-eredetű. E burkon belül szemecskés plasma-állomány különböző vastagságú rétege következik, a mely valódi syncytiumnak mutatkozik, legalább én benne sejteknek határait felismerni nem tudtam és magot is nagyon keveset különböztethettem meg, még pedig csupán a gyűjtőcsatornában s ezeknek is annyira elmosódottak voltak a körvonalai, hogy csupán igen halvány, rózsaszínű foltocskák alakjában mutatkoztak a pikrokarminnal festett metszeteken. A plasmasyncytium majdnem valamennyi faj gyűjtőcsatornáiban, a mellékágacskáiban, sőt még a capillaris edényekben is, szabálytalanul elszórtan, különböző mekkoraságú és alakú excrementum-rögöcskéket és szemecskéket tartalmaz, melyek sötét-kékesszürke színűkkel az összes edényeket könnyen felismerhetőkké teszik. Hogy folyadékot tartalmaznak-e a gyűjtőcsatornák és mellékágaik, megállapítani természetesen nem állott módomban, de a gyűjtőcsatornák átmetszeti képei azt mutatják, hogy plasmarétegük egy csatornát zár körül, a mely vagy egészen üresnek, vagy igen finoman szemecskés anyaggal, valószínűleg a volt folyadék csapadékjával, kitöltöttnek látszik.

A *kivezető-hólyag* valamennyi fajnál a test hátulsó végében, illetőleg a szívókorong közelében, de ettől kisebb-nagyobb távolságban fekszik, iránya, azaz helyzete azonban két típust mutat. A fajok valamennyiének kivezető-hólyagja, az egy *Micror-*

chis megacotyle kivételével, széles, a két gyűjtőcsatornát magába fogadó végével mindig a hasoldal felé tekint, néha a test közép-vonala alá ereszkedik le, máskor ellenben e fölé húzódik; kivezető csatornája majd egyenesen megy a hátoldalhoz, mint például a *Microrchis ferrum equinum*-é is, majd pedig, és leggyakrabban, ferdén föl- és hátrafelé, mint a *Pseudocladorchis* és *Chiorchis*-genus fajaié. A *Microrchis megacotyle* kiürítő hólyaga a gyűjtőcsatornát magába fogadó széles, zárt végével a szívókorong felé tekint s innen kiindulva egy darabig egyenesen előfelé húzódik, majd lassan a hátoldal felé emelkedik, hogy aztán a *Laurer*-féle csatorna oldalán a külvilágba nyíljon. A kivezető-hólyagnak kiürítő nyílása, mint azt a fajok leírásánál láttuk, igen különböző helyeken fekszik, majd a szívókoronghoz közelebb, majd ettől távolabb, vagy épen a szívókorong középpontja fölött, mint specialiter a *Diptodiscus*-genus fajainál.

A kiürítő-hólyag falazatának a parenchyma felé tekintő fölületét minden esetben vagy hálózatos parenchyma-anyag fődí, mint például a *Chiorchis papillatus*-nál, vagy pedig önálló parenchyma-sejtek környezik, mint a *Microrchis ferrum equinum*-nál és *megacotyle*-nál. A hólyagnak falazatát egy vékonyabb vagy vastagabb, erősen szineződő, kétségtelenül parenchymatikus eredetű burok alkotja, a melynek külső fölületén gyűrűs izmok helyezkednek el egymástól meglehetősen nagy távolságban, ezek fölött pedig még ritkábban hosszirányú izomrostok sorakoznak s e tekintetben a kiürítő-hólyag egyezik az *A. Looss*-tól ismert *Distomum*-félékével. (9. p. 157., 158.) A falazatot alkotó burok belső fölületén néha finoman szemecskés anyagot különböztethettem meg, de azokat az endothelsejteket, a melyekről *Otto R.* tesz említést (10. p. 58.), nem birtam megfigyelni, sőt még azokat a sejtmagokat sem tudtam észrevenni, a melyek *A. Looss* vizsgálatai szerint még akkor is felismerhetők, ha a kiürítő-hólyag megduzzadása következtében maguk a sejtek anynyira ellapulnak, hogy plasma-tömegük és körvonalaik egészen elenyészni látszanak. (9. p. 156. 157.) A kiürítő-hólyag falazatát alkotó burok különben minden határ nélkül megy át a gyűjtőcsatornának s a kivezető cső falazatának állományába, illetőleg az utóbbinak kutikula-burkába.

A kiürítő hólyag üregében leggyakrabban elszórtan igen apró excrementum-szemecskék vannak csupán; a *Chiorchis papillatus* faj számos példányának kiürítő-hólyagjában azonban már valóságos húgykövek is találhatók, a melyek különböző alakúak, különböző nagyságúak lehetnek és igen gyakran koncentrikus rétegekből összetettnek látszanak. E húgykövek természetesen a gyűjtőcsatornákból idekerült excrementum-rögöcskékből és szemecskékből alakulnak ki s hogy már az élő állatban is megvoltak s nem csupán a konzerválás műtermékei lehetnek, bizonyítja sajátosságos, rétegzetes szerkezetük, a mi bizonyára nem lehet momentán hatásnak az eredménye.

A kiürítő hólyag *vezetéke* szerkezet tekintetében lényegesen különbözik úgy a kiválasztó edénytörzsektől, valamint magától a hólyagtól. A kivezető csatornának vagy vezetéknek a test parenchymája felőli fölületét ugyanis typusos epithelsejtek takarják, a melyek, például a *Chiorchis papillatus*-nál, egészen körteforma tömlőcskékhöz hasonlítanak, tömötten, fűrtformán sorakoznak és szerkezet tekintetében teljesen egyeznek a test többi pontjain levőkkel. E sejteken belül hosszirányú izomrostok tömött rétege következik, a mely különösen egy kissé ferdén sikerült sagittalis metszeten tűnik fel igen jól. A hosszirányú rostok rétegén belül gyűrűsek sorakoznak szintén tömötten egymás mellé, de ezek vékonyabbnak látszanak a hosszirányúaknál. A gyűrűs rostokon belül végre a vezeték lumenét határoló kutikularéteg következik, a mely szerkezet nélküli és nem egyéb, mint a test kutikulájának folytatása, a miként az egész vezeték sem lehet egyéb, mint a test falának csőszerű, betűrődött s aztán a parenchymatikus eredetű kiürítő hólyaggal benső összeköttetésbe lépett részlete, a mit az egész vezeték szöveti összetétele is bizonyít.

A vezeték külső nyílása, a *porus excretorius* helyzete fajok szerint változik. Leggyakoribb az az eset, hogy a vezeték nyílása a test hátulsó negyedében, a szívókorong és a *Laurer*-féle csatorna közötti területen fekszik, majd az előbbenihez, majd az utóbbihoz közelebb, úgy, hogy helyzete bizonyos fokig jellemző az egyes fajokra. Kivételesen a *Microrchis megacotyle*-nél a *porus excretorius* nagy mértékben eltávozott a test hátulsó ne-

gyedétől, illetőleg a szívókorongtól és egészen a *Laurer*-féle csatorna nyílása mellé, a test közepére húzódott, itt pedig a *Laurer*-féle csatorna jobb oldalán helyezkedett el, úgy, hogy mindkét nyílás egy vonalba és egy síkba esik. E viszony némileg már oldalt fektetett egész állaton is feltűnik, de legjobban látható sagittalis vagy tangentialis metszeteken.

A *porus excretorius* szöveti szerkezete mindenben egyezik a vezetékével, de itt az epithel-sejtek körben és egy síkban helyezkednek el, úgy hogy fölülről nézve mintegy sphinctert látszának alkotni; de a nyitódást és csukódást, illetőleg elszűkülést kétségtelenül a gyűrűs izomrostok rétegének különböző irányú működése eredményezi. A nyílás átmérőjének mekkorasága igen nagy mértékben ingadozik és mindig szoros kapcsolatban áll a gyűrűs izomrostok rétegének összehúzódottságával; néha akkora, hogy könnyű szerrel felismerhető már gyengébb nagyítással is, máskor oly kicsiny, hogy erősebb nagyítással is csak nagy figyelem mellett s már korábbi tájékozódottság révén vehető észre.

VI. Szaporodásszervek.

A vizsgált fajok valamennyiének szaporodásszervei általános vonásokban egyeznek egymással s csak a részletekben mutatnak némi eltéréseket. Az összes fajok közös jellemvonása az, hogy az *ivarnyílás* (*porus genitalis*) kivétel nélkül mindig a test mellső harmadában vagy ez előtt, a hasoldal közepén fekszik, még pedig ritkán az oesophagus bulbusa alatt, vagy kevéssel az előtt, mint a *Diplodiscus*-fajoké, leggyakrabban azonban az oesophagus bulbusának hátulso végén, illetőleg a gyomorágak kiágazása közötti területen, mint az összes többé fajoké, különösen pedig a *Chiorchis papillatus*-é és *oxycephalus*-é.

Az ivarnyílás kivételesen, az oldalt fekvő állatkán, már külsőleg is első tekintetre felismerhető, mint a *Diplodiscus Marenzelleri*-é, máskor ellenben külsőleg nem egykönnyen különböztethető meg és jelenlétét csupán a gyűrűs izomzat erőteljesebb fejlettsége révén állapíthatjuk meg, mint az összes többi fajoknál. A *Diplodiscus Marenzelleri* ivarnyílását könnyen felismerhetővé az teszi, hogy krátterszerű kiemelkedés csúcsán ül.

a melynek falazatában az izomzat erőteljes korongot, illetőleg sphinctert alkot, a többi fajoknál ellenben az ivarnyílás inkább egy tölcsérszerű bemélyedés kezdete és környező izomzata, ha erőteljesebben fejlett is ki, de genitalis korongot mégsem alkot.

Az ivarnyílás minden esetben *ivaröbölbe* (sinus genitalis) vezet, a melynek falazata összenőtt a cirrus-zacskó vezetékének falazatával, úgy, hogy a tulajdonképeni ivarvezetékek közös részlete, a ductus hermaphroditicus, nyílásával áttöri az ivaröböl mélyedt részletének falazatát s a porus hermaphroditicus, illetőleg a cirrus nem csupán a ductus hermaphroditicus saját, hanem az ivaröböl falazatából is épül fel, a mely utóbbi külső fölületét takarja, míg az előbbi főtömegét alkotja. Az ivaröböl különben vagy kisebb-nagyobb terjedelmű egyszerű üreg alakjában mutatkozik, vagy pedig középpontján a porus hermaphroditicus kúpszerű halom gyanánt emelkedik ki változó magasságban, gyakran egészen magáig a porus genitalisig, s ez esetben az ivaröböl tulajdonképeni üregéből csak kevés marad meg, mert azt a cirrusnak megfelelő kiemelkedés majdnem egészen elnyomja; ezzel aztán szoros kapcsolatban áll az ivaröböl terjedelme is, a mi fajok szerint kétségtelenül meglehetősen változó.

1. Hím ivarszerv.

A vizsgált fajok hímvivarszerve általánosságban azonos összetételű és szerkezetű, és typusosan a *herék-ből*, *vas efferensek-ből*, *vas deferens-ből*, a *vesicula seminalis-okból*, a *prostata-mirigyek-ből* és a *kivezető részlet-ből* áll.

a) *A herék.*

A herék száma typusosan kettőnek mondható s csupán a *Diplodiscus cornu* (Dies) az egyedüli olyan faj, a melynek egyetlen heréje van. Akár párosan, akár páratlanul fejlődtek ki a herék, mindig a gyomorágaktól körülzárt területen, a gyomorágak alatt, tehát a hasoldalra húzódottan fekszenek a test közepén; helyzetük úgy a környező szervekhez, valamint egymáshoz viszonyítva is meglehetősen változatos. A *Diplodiscus* páratlan heréje egyforma távolságban fekszik az oesophagus bulbusától és

a csirafészekről, tehát jóformán a kettő között középen. A páros herével bíró fajok közül a *Diplodiscus Marenzelleri*-éi s az összes *Chiorchis*-fajokéi egymás mögé sorakoznak, úgy, hogy az egyik az oesophagus bulbusának s illetőleg az ivaröbölnek, a másik ellenben a csirafészeknek szomszédságába jut. bárha ettől nagyobb távolság választja is el. Ilyenforma elhelyezésű különben némileg a *Microrchis megacotyle* két heréje is, de ezek közül a mellső inkább kissé a bal gyomorághoz, a másik ellenben a jobbhoz közeledett. Erre nagyon emlékeztet aztán a *Microrchis ferrum equinum* heréinek az elhelyezése, a mennyiben itt a herék egymás mögött fekszenek ugyan, de nem ugyanabban a hosszasági vonalban, mert a mellső here sokkal előbbre húzódott és észrevehetően közeledett a bal gyomorághoz, míg a hátsó here hátrább vonult és a jobb gyomorág mellé helyezkedett el, közülök tehát egy sem fekszik a test középvonalában. Épen ez az eset a *Pseudocladorchis*-fajok heréinek elhelyezésénél is, de ezeknél már a herék nemcsak megközelítették a gyomorágakat, hanem azok alá vonultak, sőt gyakran egyes részeikkel a gyomorágaktól körülzárt területekre is kiterjeszkedtek. Arra különben, hogy a herék egyes részeikkel elhagyják a gyomorágak közötti területet, leggyakrabban a *Chiorchis*-fajoknál találkozunk, még pedig úgy a megnyúlt, valamint a különbözőképen összehúzódtott példányoknál egyaránt.

De a heréknek nem csupán elhelyezése mutat változatosságot a fajok szerint, hanem alakja és viszonylagos mekkorasága is. A *Diplodiscus*-genus mindkét fájának heréi például teljesen gömbformák, sima fölületűek, legfőljebb hátoldalukon lép fel néha néhány kisebb-nagyobb kiemelkedés az uterus nyomása következtében, ezenkívül aránylag igen nagyok, a mennyiben átmérőjük 0.66—1 mm. között ingadozik. A *Microrchis* genus fajainak heréi többé-kevésbé gömb- vagy tojásformák, fölületük egészen sima, rajtok kiemelkedések vagy nyújtványok nincsenek, néha azonban 2—3 ponton gyengén befűződöttek lehetnek, átmérőjük átlagosan 0.32—0.7 mm., a test mekkoraságához mérten azonban feltűnő kicsinyek. A *Pseudocladorchis*-genus fajai heréiknek alakjával és szerkezetével átmenetet alkotnak a *Microrchis*-genustól a *Chiorchis*-genushoz, nevezetesen a *Pseu-*

docladorchis macrostomus heréi veseformák, egészen sima fölületűek, 0.22 mm. hosszúak és átmérőjük 0.17 mm. A *Pseudocladorchis nephrodorchis* heréi szintén veseformák, de fölületükön, specialiter hasoldali részükön, újjforma nyújtványokat viselnek, 0.45—0.7 mm. hosszúak és 0.26—0.29 mm. átmérőjük. A *Pseudocladorchis cylindricus* heréi végre szabálytalan, változó alakú tömlők különböző nagyságú és alakú, de mindig csekélyszámú nyújtvánnyal, minek következtében már félreismerhetetlenül emlékeztetnek a *Chiorchis*-genus fajainak heréire, főtömegüknek hossza 0.8—1.7 mm. között ingadozik. A *Chiorchis*-genus fajainak heréi végre tipusosan kisebb-nagyobb mértékben elágazott tömlőkhöz hasonlítanak, az ágak majd karély-, majd ujjformák, majd gyengébben, majd erősebben kiemelkedtek, illetőleg különbözőképen hosszabbodtak meg, számuk igen tág határok között ingadozik. A *Chiorchis papillatus* heréinek nyújtványai mindig széles karélyok, ritkán erősebben megnyúltak. A *Chiorchis oxycephalus* fiatalabb példányainak heréi kisebb-nagyobb mértékben hasonlítanak a *Chiorchis papillatus*-éhoz, míg az idősebb példányokéi már feltűnően elágazottak s az ágak nagyrésze hegyesen végződik. A legdúsabban elágazódottak azonban a *Chiorchis dilatatus* fajnak a heréi, és ágai vagy nyújtványai részint karélyformák, kerekített csúcsúak, részint kúpformák, hegyes csúcsúak.

A herék *finomabb szerkezete* tekintetében, a mennyire azt vizsgálataim során megállapítanom sikerült, a fajok között nincs semmi lényegesebb említésre méltó eltérés.

A herék fölületét minden esetben lazábban vagy tömöttebben fekvő parenchyma-rostok borítják, a melyek között igen gyakran még parenchyma-magokat is találhatunk, mint különösen a *Chiorchis papillatus*-nál, valamint a *Microrchis* és *Pseudocladorchis*-fajoknál, azonban ilyenek csupán a heréktől távolabb fekvő pontokon mutatkoznak. A parenchymatikus rostok rétegén belül a herék saját falazatát alkotó kutikularéteget, a tunica propriát találjuk, a melynek vastagsága nemcsak fajonként, hanem a herék fejlettségének, illetőleg duzzadtságának foka szerint is változik, átlagosan 0.002—0.0035 mm. Vizsgálataim során egyetlen alkalommal sem sikerült a herék falaza-

tán gyűrűs és hosszirányú izomrostokat megfigyelnem, sőt majdnem kétségtelennek tartom ezek hiányzását, mindamellett, hogy *Otto R.* a töle tanulmányozott különböző *Amphistomum*-féléknél ilyeneknek jelenlétét konstata. (10. p. 64.)

A herék kutikula-burkán belül valamennyi fajnál endothel-sejteknek, az ondószálacsák anya- vagy csirasejtjeinek különböző vastagságú rétegét találjuk. Egyes pontokon e sejtek csupán egyszerű réteget, más pontokon ellenben kisebb-nagyobb halmokat alkotnak, mint például a *Chiorchis dilatatus*-nál is. A herék egész belső üregét részint elszórt, különböző nagyságú magános sejtek, bizonyára legnagyobbbrészt spermatogoniumok, részint nagyobb sejtek különböző halmazai és érett ondószálacsák pamatai töltik ki s mindezek szemecskés anyagba beágyazottak látszanak.

b) *A kivezető készülék.*

A him ivartermék kivezetésére szolgáló készülék aránylag meglehetősen bonyolódott szerkezetű, fajok szerint kis mértékben változó, általánosságban *vas efferens*-ből, *vas deferens*-ből és ennek módosult részleteiből, a *vesicula seminalis externa*- és *interná*-ból, továbbá a *ductus ejaculatorius*-ból áll, a mely *vesicula prostatica*-ra, *sinus hermaphroditicus*-ra, *ductus hermaphroditicusra* tagolódhatik és végre *cirrust* alkot; mindezekhez járulnak aztán a *prostatamirigyek*.

A *vas efferens*ek csupán a párosan fejlett heréknél találhatók meg s ezek, a mennyire ezt megállapítanom sikerült, a herék hátoldali fölületén indulnak ki s úgy futnak előre, míg egymással egyesülve, a *vas deferens*et alkotják. A hátulsó herének *vas efferense* természetesen mindig hosszabb a mellsőénél. A páratlan herének *vas efferense* nincs és kivezetője a tulajdonképeni *vas deferens*. A *vas efferens*ek szöveti szerkezete teljesen egyezik az alább tárgyalandó *vas deferens*ével.

A *vas deferens* legegyszerűbb alakjában a *Diplodiscus Marenzelleri*-nél mutatkozik; itt ugyanis a két here *vas efferens*ének egyesüléséből keletkezett *vas deferens* az ivaröböl közelében erősen kitágul, többszörösen felhurkolódik és egy *vesicula seminalist* alkot, mely egyszerűen fekszik a környező paren-

chymaanyagba, majd pedig izmos falazatú *ductus ejaculatorius*-ba, illetőleg distalis végenek közelében *ductus hermaphroditicus*-ba megy át, hogy az izmos falazatú, ki és behatoló *cirrus* csúcsának közepén a külvilággal érintkezzék a *porus hermaphroditicus* közvetítésével. Itt tehát nem különböztethető meg a *vesicula seminalis externa* és *interna*, valamint hiányzani látszik a *cirrus*-zacskó is, nemkülönben a *vesicula prostatica* is.

A *Diplodiscus cornu* (Dies) fajnak, kapcsolatban azzal, hogy csupán egy heréje van, hiányzik a vas efferense s így a here egyenesen a vas deferensbe megy át, de lefutásában előbb *vesicula seminalis externát*, majd *vesicula seminalis internát* alkot a *cirrus*-zacskóval és *prostatamirigyekkel*, míg további lefutásában egyezik a *Diplodiscus Marenzelleri*-ével.

Az összes többi genusok fajainak kivezető készüléke, a mennyire azt metszetsorozataim áttanulmányozása alapján megállapítanom sikerült, tagoltság és szerkezet tekintetében egyező; az alábbiakban nyújtott részletes ismertetés azonban legnagyobb-részt a *Chiorchis papillatus*-fajon végzett vizsgálataimnak eredménye gyanánt tekintendő.

A két here vas efferensének egyesülése után kialakult páratlan vas deferens épen úgy, mint a *Diplodiscus cornu*-fajnál, itt is nehányszor felhurkolódik, erősen megduzzad s a parenchyma-anyagtól körülvelt *vesicula seminalis externát* alkotja, hasonlólag az emlős állatokban élősködő *Paramphistomidáké*hez (lásd: *Fischoeder F. 6.*); belsejét igen gyakran már teljesen kész ondószálacskák pamataival kitöltöttnek találtam; külső falazatát parenchyma-anyag szemecskés állománya fűdi, a mely alatt hosszirányú és gyűrűs izomrostok rétege következik. A gyűrűs izomrostok rétegén belül kutikuláris burkot, a tunica propriát találjuk, a melyről a falazat legbelső rétegét alkotó endothelsejtek emelkednek. Ha a *vesicula seminalis externa* erősen duzzadt és sok ondószálacskát tartalmaz, akkor az endothelsejtek feltűnően ellapultak, sokszor csak magjuk révén ismerhetők fel.

A *vesicula seminalis externa* folytatása a *cirrus*-zacskótól körülzárt *vesicula seminalis internát* alkotja.

A *cirrus*-zacskó a különböző fajoknál változó alakú és elhelyezésű, leggyakrabban tojás- vagy körteforma tömlőhöz

hasonlítható, tompább végével majd egyenesen föl-, majd pedig kissé hátra- és fölfelé tekint; falazata csupán külső, tömötten álló parenchyma-rostocskákból és ezeknek rétegén belül fekvő kutikulaburokból összetettnek látszik, a mennyiben nekem nem sikerült sem az izomrostok rétegeit, sem az endothel-sejteket megkülönböztetnem; belső üregében nem csupán a vesicula seminalis interna foglal helyet, hanem egyúttal itt helyezkednek el a *prostatá-mirigyek* is, még pedig mindig a cirrus-zacskónak az ivarnyílás felé tekintő hegyesebb végében. A cirrus-zacskónak mindkét vége természetesen nyitott, hogy ilyenformán belehatolhasson a vesicula seminalist alkotó vas deferens és kijuthasson belőle a *ductus ejaculatorius*.

A *vesicula seminalis interna*, mint említettem, a vesicula seminalis externának a folytatása, illetőleg a vas deferensnek a cirrus-zacskóba nyomult részlete, a mely itt különbözőképen felhurkolódik s ha ondószálacskákkal telik meg, egyes részletei hólyagokká duzzadnak meg, de a cirrus-zacskó egész üregét sohasem tölti ki, mert elegendő helyet hagy a *prostatá-mirigyeknek* s a *vesicula prostatica*-nak. A vesicula seminalis interna szöveti szerkezete tekintetéből teljesen egyezik a vesicula seminalis externával, de falazatának fölületéről hiányzik a parenchyma-anyag, úgy, hogy az egész falazaton csupán a hossz- és gyűrűs izomrostok rétegét, a tunica propriát és a belső lument határoló endothelsejteket különböztethetjük meg. A hossz- és gyűrűs rostok átmérője, valamint a tunica propria vastagsága is igen változó, általában szoros kapcsolatban áll a duzzadtság fokával. Még szembetünöbben mutatják ezt a viszonyt az endothelsejtek, a melyek a csak igen kis mértékben duzzadt vagy épen üres vesicula seminalis interna falazatán magasan kiemelkednek, többé-kevésbé kúpformák, finoman szemecskés plasmájuk hosszirányú sávokat mutat, a melyek esetleg redők is lehetnek, míg az ondószálacskákkal teljesen megtöltött és így nagymértékben duzzadt vesicula seminalis interna endothelsejtjei a minden irányban való kiterjeszkedés következtében annyira ellapulnak, hogy jóformán csupán az egymástól igen nagy távolságokban fekvő magjaik révén ismerhetők fel.

A vesicula seminalis internának az ivarnyílás felé tekintő,

illetőleg a prostata-mirigyektől körülfogott részlete az előbb ismertetettől látszólag elütő szerkezetet mutat és működésében is eltérő, a mennyiben feltűnő vastag falazatú sphinctert. illetőleg tulajdonképeni *ductus seminalis*-t alkot. E *ductus seminalis* falazata lényegében egyezni látszik a *vesicula seminalis interna* és *externa* falazatával, de különbözik abban, hogy *endothel-sejtjei* alig, vagy egyáltalán nem vehetők észre és gyűrűs, valamint hosszirányú izomrostjainak rétege feltűnően megvastagodott. A *vesicula seminalis interna* ezen részlete nyilvánvalólag ondószálacskáknak továbbvezetésére szolgál s épen ezért neveztem *ductus seminalis*nak, de izmos falazatával a *vesicula seminalis interna* elzáródását is eszközli, ivarnyílás felé tekintő végével kúpszerűen kisebb-nagyobb mértékben benyomul a *vesicula seminalis internának* a prostata-mirigyektől körülfogott abba a részletébe, a mely *vesicula prostatica*-nak nevezhető.

A *vesicula prostatica* nem egyéb, mint a *vesicula seminalis internának* a *ductus seminalison* túl következő folytatása, a mely például a *Chiorchis papillatus*-nál szívforma öböllé duzzad, hegyes végével az ivarnyílás felé tekint, külső fölületén a prostata-mirigyek helyezkednek el, izomzata ugyanúgy fejlett, mint a *vesicula seminalis internáé*, sőt *endothelsejtjei* is teljesen azonos szerkezetűek, de sohasem oly hosszúak, illetőleg magasak. Ez az öböl nem csupán a *ductus seminalison* kinyomuló ondószálacskákat továbbvezetésére, hanem kétségtelenül és legfőképen a prostata-mirigyek váladékának a befogadására is szolgál, illetőleg egy *reservoir*, a melyben előzetesen meggyűl a prostata-mirigyek váladéka, hogy azonnal csatlakozhassék a *ductus seminalison* kinyomult ondószálacskákhöz.

A *vesicula prostatica* végső határán a *vesicula seminalis interna*, illetőleg a *vas deferens* elhagyja a *cirruszacskót* és a *ductus ejaculatorius*-ba megy át, a mely nem messze a *cirruszacskó* határától igen gyakran öböllé tágul, mint például a *Chiorchis papillatus*-nál is. Ez az öböl igen fontos szerepet játszik, a mennyiben beleszájadzik a *metraterm* s így tulajdonképen *sinus hermaphroditicus*-t alkot, minthogy egyaránt szolgál az ondószálacskákat és a peték befogadására. A *sinus hermaphroditicuson* túl már a *ductus ejaculatorius* a *ductus hermaphro-*

diticus-ba megy át, a mely erős izomfalazatával a kiölthető és visszahúzható *cirrust* alkotja. A ductus hermaphroditicus mindig a cirrusnak distalis végén, még pedig ennek középpontján nyílik a külvilágba a *porus hermaphroditicus*-on át s ilyenformán tulajdonképpen ez az igazi ivarnyílás.

A ductus ejaculatoris minden, előbb megkülönböztetett részletének szöveti szerkezete általános vonásokban egyezik a vesicula seminalis internáéval, illetőleg a vas deferens különböző részleteivel. A sinus hermaphroditicus fölületét parenchymaanyag takarja, de a ductus hermaphroditicus fölületéről ez már hiányzik. A falazat hossz- és gyűrűs izomrost-rétege mindenütt megtalálható, de különböző fejlettségben, nevezetesen a ductus hermaphroditicus kezdetéig a kétféle rost csupán egyszerű réteget alkot, míg a cirrus falazatában mindkettő igen erőteljesen fejlett, illetőleg több réteget formál. A tunica propria mindenütt megvan. Igen jellemzően módosultak az endothelsejtek, a mennyiben a lumen felé tekintő végükön ujjforma, egyneműnek látszó, sötéten színezett nyujtványokra czafatolódtak, a mely nyujtványok gyengébb nagyításoknál a porus hermaphroditicus felé irányuló tüskéknek látszanak. Hogy e nyujtványoknak van-e valami physiologiai hivatása, vagy pedig nem egyebek, mint a nyugalmi állapotban összehúzódott, megkeskenyedett endothelsejteknek különböző mekkoraságú és alakú redői, azt eldönteni nem tudom és meg sem kíséreltem, de a vesicula seminalis interna endothelsejtjeinek viselkedése az utóbbi eshetőség mellett látszik szólani, annyival is inkább, mert itt a sejtek máskülönben egészen olyan szerkezetűek és elhelyezésűek, mint amott. Megjegyezhetem itt még azt is, hogy ugyanilyen szerkezetű endothelsejteket talált Looss A. is tanulmányai során a halakban és kételtűekben élősködő *Distomideák*; egyebek között a *Distomum perlatum* ductus ejaculatoriusában. (9. Taf. 4. fig. 83., 84.)

A *cirrust* a fajok legtöbbször majdnem minden példányán vagy az ivaröbölben, vagy pedig az ivarnyílásból kitoltan találtam. A *Chiorchis papillatus* példányai között találtam olyant is, a melynek cirrusa teljesen visszahúzódtott s ezzel kapcsolatosan az ivaröböl keskeny csatornává szűkült el, a melynek

belső vége elzárodottnak mutatkozott. Ennél a példánynál aztán, nagy meglepetésemre, az öntermékenyítés esetét találtam meg, a mi oly módon nyilvánult, hogy a cirrus visszahúzódása után a ductus hermaphroditicus elzárulásával a vesicula seminalis internából a ductus seminalison és vesicula prostaticán a sinus hermaphroditicusba toluló ondószálacsákák, kifelé vezető útnak elzárodottsága következtében, a metratermben nyomultak, sőt tovább is haladtak az uterusba. Hogy ez a jelenség az öntermékenyítésnek az eredménye vagy legalább erre vezethet, az kétségtelen, de hogy vajjon typusos-e, vagy pedig csak esetleges, azt példányaimon végérvényesen eldöntenem nem sikerült.

Mint az előzőkben többször említettem, a cirrus-zacskó nemcsak a vesicula seminalis internát és ennek elkülönült részleteit, a ductus seminalist és vesicula prostaticát zárja magába, hanem egyúttal magába zárja a *prostatamirigyeket* is.

A *prostatamirigyek* még abban az esetben is, ha nem cirrushólyagban fekszenek, mint a *Diplodiscus Marenzelleri*-éi, s még inkább akkor, ha cirrushólyag veszi őket körül, mint az összes többi fajokéit, mindig a vesicula seminalis internának a porus genitalis felé tekintő végén helyezkednek el a ductus seminalis körül és a vesicula prostatica falazatán, úgy hogy ezt teljesen beborítják. Az egyes sejtek mindig megnyult tömlőformák, fűrtyszerűen halmozódnak egymás fölé, különböző hosszúságúak, plasmájuk finoman szemecskés, kisebb-nagyobb mértékben átlátszó, magjuk majd gömb-, majd pedig tojásforma, fajok szerint változó alakú; igen keskeny kivezető csövük bizonyára áttöri a tunica propriát s úgy lép összeköttetésbe a vesicula prostatica üregével. Ezt az esetet különben minden kételet kizárólag láttam a *Chiorchis dilatatus*-nál, a melynek vesicula prostaticáján a tunica propria egészen a zona radiata szerkezetét mutatja.

c) *Spermatogenesis.*

Vizsgálataim során tőlem telhetőleg igyekeztem az ondószálacsákák fejlődésmenetének teljes sorozatát egybeállítani, de fájdalom, igyekeztem nem vezetett minden tekintetben kielégítő eredményre s így csupán megfigyeléseimnek az alább következő

felsorolására szorítkozom, a nélkül, hogy azoknak általános vagy végérvényes jelentőséget tulajdonítanék.

Az ondószálacsókák *anya-* vagy *csirasejtjei* nem egyebek, mint a herék tunica propriajának belső fölületét borító endothel-sejtek, a melyek, mint már láttuk, vagy vékony, igen gyakran egysejtű réteget, vagy pedig itt-ott sejthalmazokat alkotnak. E csirasejtek a rétegből vagy a halmazokból leggyakrabban egyenként, néha tömegesebben válnak ki és kerülnek be a herék üregét kitöltő szemecskés, folyadékszerű, bizonyára tápláló anyagúl szolgáló állományba. Az elszabadult sejtek egyesei növekedésnek indulnak, egy idő multán azonban körülöttük kisebb sejtek halmozódnak fel, úgy hogy ezek a nagyot egészen körül fogják és lassanként maguk is növekedni kezdenek. A herékben szabadon és egyideig szétszórta levő, később a nagyobb sejtekre települő kisebb sejtek kétségtelenül nem egyebek *spermatogoniumoknál*, melyek a nagy sejtek körülzárása után bekövetkező nagyobbodás során a *spermatocyta-* s ezeknek osztódása folytán az *elsőrendű spermatocyta-stadiumba* lépnek, míg a körülzárt nagy, nem osztódó sejt *alimentarius cytophorrá* idomul.

Az *elsőrendű spermatocyta-stadiumon* levő sejtek még aránylag meglehetősen nagyok, egészen gömbformák, átmérőjük 0.01 mm., plasmatestük igen finoman szemecskés, majdnem homogennek mondható és átlátszó; magjuk szintén gömbforma, átlag 0.004 mm. átmérőjű és több chromatinszemecskét tartalmaz.

Az *elsőrendű spermatocyták* osztódása folytán létrejött *másodrendű spermatocyták* szerkezet tekintetében mindenben hasonlítanak az *elsőrendűek*hez, de átmérőjük csupán 0.004—0.005 mm., míg a magjuké átlag 0.0013 mm.; mindannyi egymástól is, a körülzárt cytophortól is független, tömegük a tipusos morulához hasonlít.

A fejlődés további során a *másodrendű spermatocyták* osztódása következtében még kisebb sejtek, a *spermatidák* keletkeznek, a melyek meglehetősen feltűnően különböznek anyasejtjeiktől, a *másodrendű spermatocytáktól*. A *spermatidák* ugyanis már nem gömbformák, hanem megnyult, egyik, még pedig a központon fekvő cytophor felé tekintő végükön erősen elvékonyodott tömlőkhez hasonlítanak, hosszuk átlag 0.007 mm., legnagyobb

átmérőjük 0·0025 mm., plasmaanyaguk alig észrevehetően szemecskés, magjuk gömbforma, 0·0008 mm. átmérőjű. Valamennyi spermatida független egymástól, de a cytophorral elkeskenyedett végének közvetítése révén mindannyi benső összeköttetésbe lép és e körül a gömb sugarainak iránya szerint helyezkednek el.

A spermatidáktól körülzárt *cytophor* a fejlődésnek vázolt folyamatai során magját elveszíteni látszik és csak syncytiumot alkot, legalább én vizsgálataim során nem bírtam benne saját magot megkülönböztetni.

Hogy a spermatidákból miként alakulnak ki az ondószálacsákák, legnagyobb igyekezetem mellett sem tudtam kifürkészni; annyit azonban positive megállapíthattam, hogy az ondószálacsákák teljes kialakulása a cytophoron történik s hogy az ondószálacsákák felépítésénél nem használdik fel teljesen sem az egyes spermatidák cytoplasmája, sem a cytophor anyaga, a melyek az ondószálacsákák teljes kialakulása után is megtalálhatók még, habár csak degenerált állapotban. A spermatidák cytoplasmájának fel nem használt része ugyanis gömb- vagy tojáshoz hasonló halmaznak fölületes, bizonyos fokig czafatolt, finoman szemecskés kéregrétegét alkotja, míg a cytophor megmaradt tömege az egész halmaznak központi részét teszi s ezen ülnek fejecskéikkel pamatokba rendeződve a kifejlett ondószálacsákák, olyanformán, mint a gömböstüppárnán a gömböstűk.

A teljesen kifejlett ondószálacsákákön gömbforma fejecskét és rendkívül hosszú ostort találunk, de fejlődésüknek helyét, a cytophort és a világos cytoplasmatikus syncytiumból álló övet nem egyenként, hanem kisebb-nagyobb pamatokban hagyják el s ilyen pamatokban találhatók a herékben is szétszórtan.

Nem szenved kétséget, hogy az ondószálacsákák pamatainak teljes elszabadulása után a cytophor megmaradt anyaga, valamint a spermatidák fel nem használt és degenerálódott cytoplasmája lassanként szétesik és a herék üregében található szemecskés folyadékanyagának gyarapítását eszközi.

Az ondószálacsákák fejlődésére vonatkozó s a fentebbiekben röviden ismertetett vizsgálati eredményeim általános vonásokban egyeznek OTTO R.-nek a tőle tanulmányozott *Amphistomida*-félék spermatogenesiséről közölt buvárlati adataival (10. p. 65.);

eltérnek azonban abban, hogy OTTO R. szerint a cytophor nem önálló sejtből alakul ki, hanem a spermatocyták és spermatidákat létrehozó egyetlen anyasejt-cytoplasmájának az osztódás során fel nem használódott maradványa; továbbá az anyasejt osztódásai folyamán a különböző rendű spermatocyták még nem alakulnak ki önálló sejtek gyanánt, hanem magjaik közös cytoplasmában fekszenek szabálytalanul szétszórva és csupán a spermatidák lépnek fel sarjadzáshoz hasonló folyamat mellett önálló, a cytophorral összeköttetésben álló sejtek gyanánt. Vagyis röviden összegezve az előzőekben mondottakat, vizsgálataim szerint az ondószálacsák fejlődése typusosan, OTTO R. vizsgálatai szerint reductióval, az önálló spermatocytá-stadiumok kimaradásával megy végbe.

2. Női ivarszerv.

A rendelkezésemre állott *Paramphistomidae*-fajok női ivarszerve, a mennyire azt tanulmányaim során megállapítanom sikerült, egy typus szerint épült fel és a részletekben sem mutat feltűnőbb, említésre méltó eltéréseket. A női ivarszerven minden esetben megkülönböztethetjük a csirafészket, a kivezető-készüléket és a székmirigyeket, a melyekről az alábbiakban külön-külön lesz szó.

a) Csirafészek.

Valamennyi fajnak közös jellemvonása az, hogy csupán egy csirafészük van, a mely majdnem typusosan gömb-, ritkábban tojásforma, síma fölületű, illetőleg rajta befűződésektől előlédézett karályok egyetlen esetben sem mutatkoznak.

A csirafészek helyzete már meglehetősen változatosságot mutat, így például a *Pseudocladorchis*- és *Chiorchis*-genusok fajaié mindig a szívókorong közelében, ettől nem nagy távolságban a test középvonalában és a hasoldalhoz valamivel közelebb fekszik, mint a hátoldalhoz. A *Diplodiscus*-genus fajainak csirafészke már valamivel messzebb fekszik a szívókorongtól, de míg a *Diplodiscus Marenzelleri*-nél a két gyomorágtól körülzárt terület közepén, illetőleg a test középvonalában a hasoldalhoz közeledetten van, addig a *Diplodiscus cornu* fajnál nem a test kö-

zépvonalaiban, hanem ugyancsak a gyomorágaktól körülzárt területen, de a bal gyomorág belső oldalának szomszédságában. A szívókorongtól legtávolabb fekszik a *Microrchis*-genus fajainak a csirafészke, így például a *Microrchis ferrum equinum*-é a gyomorágaktól körülzárt terület közepén, a test középvonalaiban és hátulsó harmadának elején, míg ellenben a *Microrchis megacotyle*-é épen a test közepén, a szívókorongtól és a test mellső végétől egyenlő távolságban a középvonalban, a hasoldalhoz közleledetten.

A csirafészek *mekkorasága* igen változó, sőt ugyanazon faj keretén belül sem állandó, nagy mértékben függ attól, hogy benne a csirák fejlődése mennyire haladt előre.

Valamennyi faj csirafészkének *szerkezete* egyező, fölületét finom parenchyma-rostocskák rétege, vagy esetleg hálózata takarja, a melyen belül rendkívül vékony, cuticula-anyagból álló tunica propria következik. A csirafészek belsejét a csirasejtek töltik ki egészen, a melyek a hasoldali részletben igen aprók, azon túl fokozatosan nagyobbodnak, míg végre a legnagyobbakat a hátoldali részletben, a tulajdonképeni *pete-* vagy *csiravezeték* közepén találjuk meg.

A *csirasejtek* fejlődésük foka szerint igen változó nagyságúak; a legkisebbek például 0·0006—0·001 mm. átmérőjűek, míg a legnagyobbaknak átmérője 0·003—0·004 mm.; alakjuk bizonyára a gömbforma, de ezt jóformán egy sem tartja meg, hanem az egymásra gyakorolt nyomás következtében szabálytalan sokszögletűekké válnak, szögleteik azonban rendesen többé-kevésbé kerekítettek, karélyszerűek. Valamennyi csirasejt buroktalan, cytoplasmájuk rendkívül finoman, alig észrevehetően szemecskés, úgy hogy csaknem teljesen egyneműnek látszik és nagy mértékben átlátszó. A *csirahólyag* mindig gömbforma, a fiatalabb csirasejtekben mindig kisebb, mint a nagyobbakban, a legnagyobbaknak átmérője a 0·002 mm.-t is megközelíti, chromatin-hálózata igen finom, úgy hogy egész tömege néha csaknem egyneműnek látszik. A *csirafolt* mindig a csirahólyag közép-pontján fekszik, gömbforma, változó mekkoraságú, a legnagyobbat 0·0008—0·001 mm. átmérőjűnek találtam, belsejében különböző számú és mekkoraságú vacuolumszerű testecskéket tartal-

maz. a melyek élénk, sötét szineződésük után ítélve chromatin-szerű anyagból állanak.

b) *A kivezető készülék.*

A csirafészek minden esetben több részletre tagolt kivezető készülékkel áll összeköttetésben, a mely a következőkből áll: *csiravezeték, Laurer-féle csatorna, receptaculum seminis, ootyp* a *héjymirigyekkel* s az *uterus*.

A *csiravezeték*, a mennyire azt megállapítanom sikerült, rendesen a csirafészek hátoldalán vagy ennek közelében ered, a különböző fajoknál különböző hosszúságú, rendesen hátra és a hasoldal felé fut, falazata hossz- és gyűrűs izomrostokból, továbbá a lument határoló cuticula-állományú tunica propriából áll; az endothelsejteket vagy ezeknek magjait felismerni nem bírtam. Lefutásában magába fogadja a Laurer-féle csatornát, a receptaculum seminist, a székmirigyek reservoirjának vezetékeit s aztán átmegy az ootypba.

A *Laurer-féle csatorna* typusosan a csirafészek fölött indul ki a csiravezetékből s aztán leggyakrabban kigyózva, néha azonban többször hurkoltan emelkedik a hátoldal felé, hogy a test falát áttörve, egy poruson át közlekedésbe lépjen a külvilággal. A porusnak a helyzete igen tág korlátok között változik, általában meglehetősen szoros kapcsolatban áll a csirafészek helyzetével, a mennyiben például a *Microrchis megacotyle*-nél a test közepén, a *Microrchis ferrum equinum*-nál a test hátulsó harmadának elején, a többi fajoknál a szívókorongtól, illetőleg a porus excretoriustól kisebb-nagyobb távolságban van, mint azt a fajok leírása során láttuk.

Szöveti szerkezet tekintetében a Laurer-féle csatorna megegyezik a csiravezetékkel, de falazatán, különösen a kivezető porus közelében, valamint a porus körül is epithelsejtek lépnek fel, a melyek mintegy sphinctert látszanak alkotni.

Nem messze azon ponttól, a hol a Laurer-féle csatorna a csiravezetébe nyílik, beszájadzik a *receptaculum seminis* is, a mely a különböző fajoknál különböző alakú, nagyságú és fekvésű; rendesen többé-kevésbé körte-, ritkábban veseforma tömlő; mekkorasága mindig tartalmától függ s tulajdonképen csak akkor

ismerhető fel biztosan, ha ondószálacskákat tartalmaz; ilyen állapotában mindig a csirafészek jobb- vagy baloldalán mutatkozik. Szöveti szerkezete teljesen egyezik a csiravezetékével és a Laurer-féle csatornáéval, de fölületén ephitel-sejteket nem bírtam megkülönböztetni, ezek helyén csupán parenchyma-hálózat van.

A receptaculum seminisnek nyílásától kisebb-nagyobb távolságban a csiravezeték az *ootypba* megy át, a mely tulajdonképpen nem egyéb, mint a csiravezeték oly kitágult öble, a melybe belenyílik a székmirigyek reservoirja s a melynek belsejében kialakul a teljes pete. Az ootyp rendesen tojásforma s ha petét tartalmaz, belső ürege is ilyen alakú, míg üresen többé-kevésbé orsóforma, hengeres csőnek látszik; rendesen a csirafészek mögött fekszik, kisebb-nagyobb mértékben a hasoldalra húzódottan, ritkábban a csirafészekkel majdnem egy síkban; falazatában hossz- és gyűrűs izomrostok rétege ismerhető fel, melyek közül az utóbbi erőteljesebben fejlett és ezen belül cuticula-állományú tunica propriát találunk. A tunica proprián belül egyes esetekben egymástól nagyobb távolságban sejtmagokat tudtam megkülönböztetni, a melyek nem egyebek, mint az endothelsejtek utolsó maradványai; legtöbbször azonban még e magokat sem bírtam felismerni.

Az ootyp felületét a *héjymirigyek* borítják, a melyek több rétegben fekszenek egymáson. Minden egyes héjymirigy megnyult, tömlőforma sejt, hosszúságuk fekvésük szerint változik, valamint változatos a legnagyobb átmérőjük is, így például a *Chiorchis papillatus* héjymirigyei átlag 0·02—0·035 mm. hosszúak és 0·005—0·008 mm. átmérőjűek, míg a *Chiorchis dilatatus*-éi 0·028—0·068 mm. hosszúak és 0·01—0·02 mm. átmérőjűek. Minden egyes mirigysejt cytoplasmája tömötten finoman szemecskés, magja gömbforma, több chromatin-szemecskét tartalmaz, minden tekintetben hasonlít a tulajdonképeni ephitelsejtekhez és váladéka nemcsak a tunica propria gyanánt szolgáló cuticula-állományú intimát, hanem egyúttal a petesejt coconjának anyagát is szolgáltatja.

Az ootyp folytatását az *uterus* alkotja, a mely a különböző genusok fajainál különböző lefutású, de egyező szerkezetű. A leg-

több fajnak uterusa eleinte a hasoldal és a szívókorong felé fut, mint például a *Microorchis*- és *Chiorchis* fajoké, majd a hátoldal felé emelkedik s aztán a két gyomorágtól körülzárt területen előre megy, s a csirafészek és a hátulsó here közti területet egészen kitölti; innen a herék fölé kerül s úgy halad a cirrus-zacskóig, a mely mellett és mögött aláhajolva a metratermben megy át s aztán a sinus hermaphroditicusba nyílik. Egyes esetekben azonban az uterus lefutásában nem marad meg a gyomorágaktól körülzárt területen, hanem azok alatt és fölött mélyebben nyomul be a test parenchymájába két oldalt, sőt meghaladja a cirrus-zacskót is és a gyomorágak eredése előtt több hurkot alkotva kerül vissza a cirrus-zacskó mögé, hogy e mellett elhaladva jusson a metratermmel a sinus illetőleg ductus hermaphroditicusához, mint ezt különösen a *Pseudocladorchis cylindricus*-nál találjuk. Legbonyolódottabb azonban a *Chiorchis dilatatus* uterusának lefutása, a mely a gyomorágaktól körülzárt területen kívül a test parenchymájába többszörösen benyomul s ezt majdnem elnyomja, elől pedig mindkét oldalon több előre nyomuló hurokkal meghaladja az oesophagus bulbusát s csak azután fordul vissza tipusos helyére.

Az uterus falazatának szerkezete mindenben egyezik a vas deferens illetőleg ductus ejaculatorius szerkezetével; fölületét ugyanis parenchymatikus anyag és hálózat borítja, a melyen belül meglehetősen tömötten álló hosszirányú, s ezeken belül gyűrűs rostok rétege következik. A gyűrűs rostok rétegén belül az uterusnak cuticula-anyagból álló tunica propriáját találjuk, melynek vastagsága attól függ, hogy mennyi petét tartalmaz az uterus. A tunica propriáról az uterus endothelsejtjei emelkednek, a melyek tipusosan kerekített, tompa csúcsú kúphoz hasonlitanak, tömötten és finoman szemecskések, rajtuk hosszirányú sávok láthatók, a melyek talán redőknek a képei, magjuk gömbforma, központi fekvésű és több apró chromatin-szemecskét tartalmaz. Az endothel-sejteket ilyen tipusos fejlettségükben azonban az uterusnak csupán petéket nem tartalmazó, elszűkült részleteiben ismerhetjük fel, míg a petéket tartalmazó részletekben a sejteknek határai teljesen elmosódtak a nagyfokú ellapulás következtében és csupán magjaik ismerhetők fel egymástól nagyobb távolságokban.

Az uterus *metratermnek* nevezett az a részlete, a mely a sinus hermaphroditicusba, esetleg a ductus hermaphroditicusba nyílik, teljesen azt a szerkezetet mutatja, a mit a ductus ejaculatorius, illetőleg endothelsejtjeinek a lumen felé tekintő vége; különböző hosszúságú, többé-kevésbé ujjforma nyújtványokra pamatolódott, a melyeknek szürkésen színeződött plasmaanyaga meglehetősen merev s ennek következtében a porus hermaphroditicus felé irányuló tüskéknek látszanak.

c) *A székmirigyek.*

A női ivarszerv typusos és lényeges kiegészítő részét a *székmirigyek* teszik, a melyek kivétel nélkül két főtörzsből s ezek aztán számos folliculusból állanak; de úgy az egyes törzsek elhelyezése és lefutása, valamint a folliculusok csoportosulása is a fajok szerint meglehetősen változatos.

A *székmirigy-törzsek* elhelyezése két feltűnőbb typust mutat. A fajok legtöbbjének székmirigy-törzsei ugyanis a hátoldalon, a gyomorágaktól körülzárt területen kívül, illetőleg a gyomoráguk külső oldalától kisebb-nagyobb távolságban, e között s a test oldalfala között fekszenek; ezt az esetet találjuk például a *Diplodiscus*-, *Microrchis*- és *Pseudocladorchis*-fajoknál. A fajok másik, de kisebb csoportjánál a székmirigyek vagy egészen, vagy legalább is legnagyobb részben a gyomorágaktól körülzárt területen helyezkednek el, mint a *Chiorchis*-genus összes fajainál, legtypusosabban azonban a *Chiorchis oxycephalus*-nál.

Mind a két székmirigy-törzs egymással és a test hossztengelyével párhuzamosan fekszik, de egy-egy páratlan *vezeték* révén, illetőleg a vezetékeket magába foglaló reservoir közvetítése folytán egymással összeköttetésben állanak. E páratlan vezetékek illetőleg reservoir a különböző fajoknál különböző fekvésű. A *Diplodiscus Marenzelleri*-nek páratlan vezetékei a törzseknek hátulsó végéről erednek s ugyanezen vonalban fekszik a reservoir is. A *Diplodiscus cornu*-nál, valamint a *Pseudocladorchis*- és *Chiorchis*-genusok összes fajainál a páratlan vezetékek ugyan a törzsek hátulsó vége közelében, de ettől már kisebb-nagyobb távolságban erednek s ugyanilyen a reservoir fekvése is. Még nagyobb mértékben előrehúzódtak a *Microrchis ferrum equinum* páratlan

vezetékei és reservoirja, míg végre a *Microrchis megacotyle* fajé épen a törzsek közepén erednek, s ennek megfelelőleg fekszik a reservoir is.

A székmirigy-törzsek hossza meglehetősen változó, aránylag legrövidebbek a *Diplodiscus*-genus fajaiéi, valamivel hosszabbak a *Chiorchis*- és *Pseudocladorchis*-genusok fajaiéi, míg leghosszabbak a *Microrchis*-genusba tartozó fajokéi.

A székfoliculusok leggyakrabban gömbformák és fürtszerű pamatokat alkotnak, mint különösen a *Chiorchis papillatuséi*, máskor pedig ujjformák s egymással összefüggve többé-kevésbé bokoralakú telepeket formálnak, mint a *Microrchis*-, különösen pedig a *Pseudocladorchis*-fajokéi. A székfoliculusok az egy *Diplodiscus Marenzelleri* kivételével, a melynek törzsein csupán a külső oldalon vannak egy sorban elhelyezve, a többi összes fajoknál két sorban, csaknem átellenesen ülnek, minek következtében a törzsek többé-kevésbé fürtformáknak látszanak, még pedig mindkét végük rendesen kihegyesedett.

A székfoliculusok tömege különböző nagyságú sejtekből áll, a melyeknek cytoplasmája szürkésbarna széktestecskéket tartalmaz, még pedig oly nagy mennyiségben, hogy a magot teljesen elfödik. Az egyes székfoliculusoknak külön-külön vezetékük van, a melyek csoportonként egy-egy nagyobb vezetékbe nyilnak s ez lép aztán összeköttetésbe a törzsszel.

c) *A pete.*

A peték fejlődésének legkorábbi stádiumait minden igyekezetem daczára sem bírtam megfigyelni; épen így nem bírtam adatokat szerezni a termékenyítés folyamata felől sem. A *Chiorchis papillatus* számos példányából készített metszet-sorozataim egyik-másikán azonban alkalmam volt az ootypba került csira-sejtet s az ezt környező széksejtek tömegét is látni a petévé alakulás, illetőleg a cocon felépülésének első stádiumaiban.

Az uterusba került, már teljesen kész peték minden fajnál kupakos cocontól körülzártak, a mely legtöbb esetben teljesen sima fölületű és mindenütt egyenlő vastag; e szabály alul csupán a *Diplodiscus*-fajok s a *Chiorchis dilatatus* petéi tesznek kivételt, mert ezeknek coconja hátulsó, tompább, kupaktalan végén korong-

formán megvastagodott, a fölületen krátterszerűleg kiemelkedett s e kráter üregéből igen rövid, kocsányszerű képlet emelkedik ki. A teljesen érett peték mekkorasága a fajok szerint igen tág határok között változik, mint azt a fajok leírása során említettem.

Befejezésül még csak azt említem meg, hogy az uterusnak a csirafészekből legtávolabb fekvő részleteiben már különböző stadiumban lévő embriókat találtam.

AZ IDÉZETT IRODALOM.

1. BLUMBERG C., Ueber den Bau des Amphistomum conicum. Dorpat. 1871. Taf. 1.
2. BRANDES G., Zum feineren Bau der Trematoden. — Z. f. w. Zool. 53. Bd. 1892. p. 588. Taf. 22.
- 2a. BRAUN M., Vermes., Bronn: Klass. u. Ord. d. Thierreichs V. 4. Leipzig. 1879—1893.
3. BUTTEL-REEPEN H. v., Zur Kenntniss der Gruppe des Distomum clavatum, insbesondere des Dist. ampullaceum und Dist. Siemersi. Zool. Jahrb. 17. Bd. Abth. für Syst. etc. 1903. p. 165. Taf. 6—10. Textfig. 1—8.
4. DIESING C. M., Monographie der Gattungen Amphistoma und Diplodiscus. Annales d. Wiener Museums. Bd. 1. 1836. p. 237. Taf. 23—24.
5. DIESING C. M., Neue Gattungen von Binnenwürmern, nebst einem Nachtrag zur Monographie der Amphistomen. — Ibid. Bd. 2. 1840. p. 219. Taf. 14—20.
6. FISCHÖDER F., Die Paramphistomiden der Säugethiere. Zool. Jahrb. 17. Bd. Abth. für Syst. etc. 1903. p. 483. Taf. 20—31. Textfigur 17.
7. HEIN W., Zur Epithelfrage der Trematoden. — Z. f. w. Z. 37. Bd. 1904. p. 546. Taf. 23—25.
8. LOOSS A., Ueber Amphistomum subclavatum Rud. und seine Entwicklung. — Festschr. zum siebenzigsten Geburtstage Rudolf Leuckarts. 1892. p. 147. Taf. 19—20. Textfig. 1.
9. LOOSS A., Die Distomen unserer Fische und Frösche. — Zoologica. Heft. 16. 1894. Taf. 1—9.
10. OTTO R., Beiträge zur Anatomie und Histologie der Amphistomeen. Leipzig. 1896. Mit 30 Textfig.
11. SCHUBERG A., Zur Histologie der Trematoden. Arb. aus d. Zool. Instit. Würzburg. 10. Bd. 1894. p. 167. Taf. 10.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906. június 25.-én tartott üléséből).

ASYMPTOTICUS ELŐÁLLÍTÁSOK A LINEÁR DIFFERENTIÁLRENDSZEREK ELMÉLETÉBEN.

SCHLESINGER LAJOS 1. tagtól.

Azon sorbontások között, a melyek linearis differentiál-egyenleteknek forma szerint eleget tesznek, és melyek a független változó valamely linearis függvényének hatványai szerint haladnak, vannak, a mint tudva van, olyanok is, melyek sehol sem convergensnek. Ha az a pont, a melyben az illető linearis függvény eltűnik, regularis vagy nem határozatlansági hely, akkor, miként FUCHS kimutatta, az említett hatványsorok mindig véges vagy végtelen radiusu körön belül convergensnek, ha pedig a mondott linearis függvény zérópontja az integráloknak határozatlansági helye, akkor e sorok *általánosan* sehol sem convergensnek, csak kivételes esetekben birhatnak convergenttartománnyal. E divergens soroknak — ugynevezett *normál-sorok*-nak — fölfedezője THOMÉ (1876), de POINCARÉ volt az, a ki (1885) e soroknak jelentőségét föltárta az integrálok quantitativ meghatározására nézve, ha a független változó az illető határozatlansági hely felé határozott irányban közeledik. Ezen POINCARÉ-től *asymptoticus előállítások*-nak nevezett módszerek, a melyek csak az úgynevezett STIRLING-féle sorban birnak előddel a régiebb irodalomban, azután különösen HORN-tól lettek tovább követve.

Ha a differentialegyenlet coefficientsei egy paraméternek függvényei, akkor léteznek oly, e parameter linearis függvényei szerint haladó hatványsorok, a melyek a differentialegyenletnek forma szerint eleget tesznek, és melyek véges vagy végtelen nagy tartományon belül convergensnek. Ily sorokkal találkozunk elvértve már a régiebb irodalomban (STURM, LIOUVILLE stb.), az

újabb analysis segédeszközeivel általánosan szintén POINCARÉ tárgyalta először a soroknak ezt a nemét (Acta Math. IV. kötet, 1884). HORN egy speciális másodrendű lineár differentiálegyenlet esetében¹ észrevette, hogy a parameter lineáris függvényei szerint haladó s a differentiálegyenletet kielégítő hatványsorok között is vannak olyanok, a melyek általánosan szólva sehol sem convergenssek, de a melyek, épen úgy mint a THOMÉ-féle normálsorok, az integráloknak asymptoticus előállításait szolgáltatják, ha a parameter egy oly érték felé közeledik, mely az integráloknak mint a parameter függvényeinek határozatlansági helye.

A RIEMANN-féle problemánál fellépő határesetek behatóbb vizsgálata — melyről magáról egy későbbi alkalommal lesz szerencsém beszámolni — arra indított, hogy a parameter hatványai szerint haladó, a differentiálegyenletnek forma szerint eleget tevő, de divergens sorokat, valamint az ilyenek által adható asymptoticus előállításokat egészen általánosan és behatóan tanulmányozzam. Kiderült, hogy itt is, valamint a független változó hatványai szerint haladó normálsorok vizsgálatában, fölötte hasznos az n -ed rendű differentiálegyenlet helyettesítése az n elsőrendű differentiálegyenlet rendszerével, és ily szempontból fejtem ki a tárgyra vonatkozó vizsgálataimnak első részét a jelen dolgozat V. fejezetében. Mint e vizsgálatnak előttem érdekesnek látszó eredményeit kiemelem először azt a szerepet, mely ott az ABEL-féle integráloknak jut, továbbá azt, hogy összeolvasztva a parametert a független változóval, sikerül az asymptoticus előállítás vizsgálatát a POINCARÉ-tól fölállított² Lemmára alapítani, hasonló módon, a mint azt HORN a független változó szerint haladó normálsorok esetében tette. Hogy a későbbben kifejtendő, a RIEMANN-féle problémára vonatkozó következtetések talán első példáját szolgáltatják annak, hogy az asymptoticus előállítások közvetlenül qualitativ analytikai tulajdonságok kiderítésére is alkalmasak, ezt szintén már e helyen akarom fölemlíteni.

¹ Mathem. Annalen, 52. kötet.

² American Journal, VII. kötet.

Szükségesnek mutatkozott, hogy nemcsak a független változó szerint haladó normálsorok elméletét, hanem a successiv approximációk módszerét, valamint egynehány formális, a complet rendszerekre vonatkozó fejtegetést itt újból összefoglaljak. (I—IV. fejezet). Ha ezek tekintetében nem is nyújthatok lényegesen új *eredményeket*, mégis reménylem, hogy az által, hogy ezen elméleteket a lineár differenciálrendszerek tölem megkísérlett új tárgyalási módjához illesztettem, módszertani szempontból nem végeztem teljesen fölösleges munkát.

I.

Az inhomogen (complet) rendszerek integrálása.

Tekintsük a

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda a_{\lambda k} \quad (1)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

homogén rendszert, melyet a

$$dy_k - dx \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda a_{\lambda k} = 0 \quad (1a)$$

alakban írjunk. Ha μ_k oly függvényei az x -nek, hogy

$$\sum_{k=1}^n \mu_k (dy_k - dx \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda a_{\lambda k}) = dZ \quad (2)$$

egy Z függvénynek totális differenciálja, akkor LAGRANGE és JACOBI szerint a μ_k -król azt mondjuk, hogy *multiplicátoroknak a rendszerét* alkotják. Z lehet az x, y_1, \dots, y_n független változóknak függvénye. Ha a (2) egyenlet áll, akkor

$$\int \sum_k \mu_k (dy_k - dx \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda a_{\lambda k}) = \sum_k \int \mu_k (dy_k - dx \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda a_{\lambda k}) \quad (3)$$

partiális integrációval átalakítható. Lesz ugyanis

$$\int \mu_k dy_k = \mu_k y_k - \int y_k d\mu_k,$$

a (3) alatti kifejezés tehát így írható:

$$\int \sum_k \mu_k (dy_k - dx \sum_{\lambda=1}^n y_{\lambda} a_{\lambda k}) = \sum_k [\mu_k y_k - \int (y_k d\mu_k + \mu_k dx \sum_{\lambda} y_{\lambda} a_{\lambda k})] =$$

$$\sum_k \mu_k y_k - \int (\sum_k y_k d\mu_k + dx \sum_k \sum_{\lambda} \mu_k y_{\lambda} a_{\lambda k}),$$

vagy a kettős összegben k, λ -t egymással fölcserélve, tovább egyenlő

$$\sum_k \mu_k y_k - \int \sum_k y_k [d\mu_k + dx \sum_{\lambda} a_{k\lambda} \mu_{\lambda}].$$

Az így adódó egyenlet differenciálásával nyerjük a LAGRANGE-féle identitást:

$$\sum_k [\mu_k (dy_k - dx \sum_{\lambda} y_{\lambda} a_{\lambda k}) + y_k (d\mu_k + dx \sum_{\lambda} a_{k\lambda} \mu_{\lambda})] = d \sum_k \mu_k y_k. \quad (L)$$

Ha a μ_k -kat úgy választjuk, hogy

$$d\mu_k + dx \sum_{\lambda} a_{k\lambda} \mu_{\lambda} = 0, \quad (4)$$

akkor

$$\int \sum_k \mu_k (dy_k - dx \sum_{\lambda} y_{\lambda} a_{\lambda k}) = \sum_k \mu_k y_k,$$

ez esetben tehát a μ_k -k multiplicátorok, a mennyiben a (2) egyenlet

$$Z = \sum_k \mu_k y_k$$

ra teljesül. A (4) egyenletek rendszere azonban nem egyéb, mint az (1) differenciárendszernek adjungált rendszere

$$\frac{d\mu_k}{dx} = - \sum_{\lambda} a_{k\lambda} \mu_{\lambda},^1 \quad (4a)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

mely akkor és csak akkor egyezik az (1) rendszerrel magával, ha

$$a_{ik} = -a_{ki}.$$

Az ilyen önmaguknak adjungált rendszerek a variációszámításban szerepelnek.

Legyen y_{ik} az (1) rendszernek egy integrálmatrixa, és

¹ Értesítő XXII, p. 497.

$$(y_{ik})^{-1} = (Y_{ik}),$$

akkor¹ a mint tudva van

$$D_x(Y_{ik}) = -(y_{ik})(a_{ik})(y_{ik})^{-1},$$

ha tehát

$$b_{ik} = -a_{ki},$$

akkor

$$\frac{dY_{ik}}{dx} = -\sum_{\lambda} a_{i\lambda} Y_{\lambda k} = \sum_{\lambda} b_{\lambda i} y_{\lambda k}.$$

Ha most

$$Y_{ik} = z_{ki},$$

akkor

$$\frac{dz_{ik}}{dx} = -\sum_{\lambda} a_{k\lambda} z_{i\lambda} = \sum_{\lambda} z_{i\lambda} b_{\lambda k},$$

azaz a (z_{ik}) matrix, mely nem egyéb, mint az $(y_{ik})^{-1}$ transponált matrixa, a (4a) rendszernek egy integrálmatrixa. E matrixot az (y_{ik}) matrix *adjungált matrixának* mondjuk. Följegyezzük, hogy

$$(a_{ik}) = (y_{ik})^{-1} \left(\frac{dy_{ik}}{dx} \right).$$

ből következik

$$(a_{ik}) = (Y_{ik}) \left(\frac{dY_{ik}}{dx} \right),$$

vagyis

$$a_{ik} = \sum_{\lambda} z_{\lambda i} \frac{dy_{\lambda k}}{dx}. \quad (5)$$

Mivel

$$\sum_{\lambda} y_{i\lambda} Y_{\lambda k} = \sum_{\lambda} y_{i\lambda} z_{k\lambda} = \delta_{ik} \quad (6)$$

és épen úgy

$$\sum_{\lambda} z_{i\lambda} Z_{\lambda k} = \delta_{ik}, \quad (7)$$

a hol

$$(Z_{ik}) = (z_{ik})^{-1},$$

következik a (6), (7) egyenletek összehasonlításából:

$$y_{i\lambda} = Z_{\lambda i},$$

azaz (y_{ik}) a $(z_{ik})^{-1}$ -nek is a transponált matrixa. A vonatkozás

¹ U. o. III. egyenlet.

adjungált rendszerek valamint adjungált mátrixok között tehát kölcsönös. Nyilvánvaló, hogy

$$b_{ik} = \sum_{\lambda} y_{\lambda i} \frac{dz_{\lambda k}}{dx}. \quad (5a)$$

Az (5), (5a) relációk mellé még ezeket jegyezzük:

$$\sum_{\lambda} z_{\lambda i} y_{\lambda k} = \delta_{ik}, \quad (8)$$

$$\sum_{\lambda} y_{\lambda i} z_{\lambda k} = \delta_{ik}. \quad (8a)$$

Ha a LAGRANGE-féle identitásban μ_k helyébe z_{ik} -t írunk, lesz:

$$\sum_k z_{ik} (dy - dx \sum_k y_{\lambda} a_{\lambda k}) = d \sum_k y_k z_{ik},$$

tehát integrálva

$$\sum_k y_k z_{ik} = \int \sum_k z_{ik} (dy_k - dx \sum_k y_{\lambda} a_{\lambda k});$$

ha ezt az egyenletet y_{iv} -vel megszorozzuk és i -re nézve összegezzük, lesz

$$\sum_i \sum_k y_k y_{iv} z_{ik} = \sum_i y_{iv} \int \sum_k z_{ik} (dy_k - dx \sum_k y_{\lambda} a_{\lambda k}),$$

azaz tekintettel a (8) egyenletekre

$$\sum_k y_k \delta_{vk} = y_v = \sum_i y_{iv} \int \sum_k z_{ik} [dy_k - dx \sum_k y_{\lambda} a_{\lambda k}]; \quad (9)$$

ezek az egyenletek *identitások*, melyek tetszésszerűen y_1, \dots, y_n függvényekre nézve fennállanak.

Legyen most adva a

$$\frac{du_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda k} u_{\lambda} + f_k(x) \quad (A)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

inhomogén lineár differenciálrendszer, akkor megalkotva a (9) identitásokat, az (A) rendszer valamely u_1, \dots, u_n integrálrendszerére nézve, kapjuk, hogy

$$u_v = \sum_i y_{iv} \int \sum_k z_{ik} f_k(x) dx, \quad (10)$$

a mi azt mutatja, hogy az (A) complet rendszer általános integrálrendszere a *reducált* (1) rendszer valamely integrálmatrixából *quadraturák* által adódik.

Eddig tisztán formálisan jártunk el. Legyenek most az a_{ik} , $f_k(x)$ -ek az x complex változó monogén függvényei, melyek bizonyos egyszeresen összefüggő S területen belül holomorphok; akkor ha x_0 az S -nek egy rögzített, x pedig az S -nek változó pontja, az

$$u_v = \sum_i y_{iv} \int_{x_0}^x \sum_k z_{ik} f_k(x) dx \quad (11)$$

integrálrendszert az x_0 -hoz tartozó *fő(principális) rendszernek* mondjuk.¹ E rendszer az által van jellemezve, hogy összes elemei $x=x_0$ -ban eltűnnek, és ez által S -en belül egyértékűleg van meghatározva; a (11)-ben szereplő integrálok természetesen S -en belül elhaladó út mentén veendők. Az (A) rendszer *általános* integrálrendszere akkor az

$$u_v + \sum_{i=1}^n c_i y_{iv} \\ (v=1, 2, \dots, n)$$

alakkal van adva, hol c_1, \dots, c_n tetszőleges állandók.

Ha $x=a$ az (1) *reducált rendszernek* oly izolált singuláris pontja, melynek környezetében az a_{ik} -k egyértelműek, és melyben az y_{ik} nem határozatlanok, akkor a complet rendszer integráljai $x=a$ -ban nem határozatlanok, ha az $f_k(x)$ függvények $x=a$ -ban nem határozatlanok, tehát például ha az $x=a$ pont környezetében

$$f_k(x) = (x-a)^{\mu_k} \varphi_k(x)$$

alakúak, hol μ_k tetszésszerinti állandók, $\varphi_k(x)$ pedig a $\log(x-a)$ egész racionális függvénye, melynek *coëfficiensei* az $x=a$ környezetében holomorphok.

¹ FUCHS, Werke I, p. 298.

II.

A successiv approximatiók módszere.¹

Legyenek az

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda a_{\lambda k} \quad (1)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

differentiálrendszer coefficientsei az x monogén függvényei. Képzeljük ezeket valami módon

$$a_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik} \quad (2)$$

alakban írva, a hol az α_{ik} , β_{ik} -k szintén monogén függvények. Legyen y_1, \dots, y_n az (1) rendszernek egy integrálrendszere, mely például az által legyen meghatározva, hogy $x=x_0$ -ban, a mely pont környezetében az α_{ik} , β_{ik} -k holomorphok,

$$y_1 = \eta_1, \dots, y_n = \eta_n$$

kezdeti értékek adva vannak. Jelöljük $u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}$ -nel a

$$\frac{du_k^{(0)}}{dx} = \sum_{\lambda} u_\lambda^{(0)} a_{\lambda k} \quad (3)$$

differentiálrendszernek amaz integrálrendszerét, mely $x=x_0$ -ban

$$u_1^{(0)} = \eta_1, \dots, u_n^{(0)} = \eta_n$$

kezdőértékekkel bír és tegyük

$$y_k = u_k^{(0)} + v_k^{(0)}. \quad (4)$$

Akkor

$$\frac{d(u_k^{(0)} + v_k^{(0)})}{dx} = \sum_{\lambda} (\alpha_{\lambda k} + \beta_{\lambda k}) (u_\lambda^{(0)} + v_\lambda^{(0)})$$

ból a (3)-ra való tekintettel következik, hogy

$$\frac{dv_k^{(0)}}{dx} = \sum_{\lambda} (\alpha_{\lambda k} + \beta_{\lambda k}) v_\lambda^{(0)} + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda k} u_\lambda^{(0)}, \quad (5)$$

¹ V. Ö. CAQUÉ, Journal de Mathém. II. série, t. 9, p. 185 (1864); FUCHS az i. h. (1870); PEANO, Math. Annalen Bd. 32, p. 456 (1886).

és mivel $x=x_0$ -ban $v_1^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}$ eltűnnek, kell, hogy $v_k^{(0)}$ az (5) rendszernek $x=x_0$ -hoz tartozó főrendszere legyen.

Legyen $u_1^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}$ a

$$\frac{du_k^{(1)}}{dx} = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda k} u_{\lambda}^{(1)} + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda k} u_{\lambda}^{(0)} \quad (6)$$

rendszernek $x=x_0$ -hoz tartozó főrendszere, és tegyük

$$v_k^{(0)} = u_k^{(1)} + v_k^{(1)},$$

akkor $v_k^{(1)}$ mint a

$$\frac{dv_k^{(1)}}{dx} = \sum_{\lambda} (\alpha_{\lambda k} + \beta_{\lambda k}) v_{\lambda}^{(1)} + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda k} u_{\lambda}^{(1)} \quad (7)$$

rendszernek $x=x_0$ -hoz tartozó főrendszere van meghatározva. Folytatva az így kezdett eljárást, legyen $u_1^{(v)}, \dots, u_n^{(v)}$ a

$$\frac{du_k^{(v)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n \alpha_{\lambda k} u_{\lambda}^{(v)} + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda k} u_{\lambda}^{(v-1)} \quad (8)$$

($v=1, 2, \dots, n$)

differenciálrendszernek $x=x_0$ -hoz tartozó főrendszere, $v_1^{(v)}, \dots, v_n^{(v)}$ pedig a

$$\frac{dv_k^{(v)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n (\alpha_{\lambda k} + \beta_{\lambda k}) v_{\lambda}^{(v)} + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda k} u_{\lambda}^{(v)} \quad (9)$$

($v=1, 2, \dots$)

differenciálrendszernek $x=x_0$ -hoz tartozó főrendszere, akkor minden pozitív egész számú v -re nézve lesz

$$y_k = u_k^{(0)} + u_k^{(1)} + \dots + u_k^{(v)} + v_k^{(v)}. \quad (10)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

Feladatunk lesz, megvizsgálni az

$$u_k^{(0)} + u_k^{(1)} + \dots \text{ in inf.} \quad (11)$$

sorok convergentiáját, valamint azt, vajjon a *maradéktagok* határértékei

$$\lim_v v_k^{(v)} \quad (12)$$

zérók-e. Ha a (11) sorok convergensnek és a (12) határértékek eltűnnek, akkor a (11) sorok az (1) differenciálrendszernek y_1, \dots, y_n integrálrendszerét állítandják elő.

Mindenekelőtt számítsuk ki az $u_k^{(v)}$ ill. $v_k^{(v)}$ -ket az I. fejezetben fölállított képletek segítségével.

Tegyük

$$\sum_{\lambda} \beta_{\lambda k} u_{\lambda}^{(v-1)} = F_k^{(v-1)}(x), \quad (13)$$

($v=1, 2, \dots$)

úgy hogy tehát $u_k^{(v)}$ a (8), vagyis a

$$\frac{du_k^{(v)}}{dx} = \sum_{\lambda} a_{\lambda k} u_{\lambda}^{(v)} + F_k^{(v-1)}(x) \quad (8a)$$

differenciálrendszer főrendszerre, akkor az I. fejezet (11) képlete szerint

$$u_k^{(v)} = \sum_i u_{ik}^{(0)} \int_{x_0}^x \sum_{\mu} w_{i\mu}^{(0)} F_{\mu}^{(v-1)}(x) dx,$$

a hol $u_{ik}^{(0)}$ a (3) differenciálrendszernek valamely integrálmatrixát, $w_{ik}^{(0)}$ pedig az $u_{ik}^{(0)}$ -hoz adjungált matrixot jelenti. Ha pedig

$$(u_{ik}^{(0)})^{-1} = (U_{ik}^{(0)}), \quad U_{ik}^{(0)} = w_{ki}^{(0)},$$

akkor

$$u_k^{(v)} = \sum_i u_{ik}^{(0)} \int_{x_0}^x \sum_{\mu} U_{i\mu}^{(0)} F_{\mu}^{(v-1)}(x) dx. \quad (14)$$

A (13)-ra való tekintettel adódik tehát:

$$F_k^{(v)}(x) = \sum_{\lambda} \beta_{\lambda k} u_{\lambda}^{(v)} = \sum_{\lambda} \sum_i \sum_{\mu} \beta_{\lambda k} u_{i\lambda}^{(0)} \int_{x_0}^x U_{\mu i}^{(0)} F_{\mu}^{(v-1)}(x) dx, \quad (15)$$

mely képlet szerint az $F_k^{(v)}(x)$ függvények recursive meg vannak adva.

A $v_k^{(v)}$ -k a (9), illetőleg a

$$\frac{dv_k^{(v)}}{dx} = \sum_{\lambda} (a_{\lambda k} + \beta_{\lambda k}) v_{\lambda}^{(v)} + F_k^{(v)}(x) \quad (9a)$$

differenciálrendszer főrendszerét alkotják; lesz tehát

$$v_k^{(v)} = \sum_i y_{ik} \int_{x_0}^x \sum_{\mu} Y_{\mu i} F_{\mu}^{(v)}(x) dx, \quad (16)$$

a hol (y_{ik}) az eredeti (1) rendszernek egy integrálmatrixát jelentí és

$$(Y_{ik}) = (y_{ik})^{-1}.$$

Fogalmazzuk a kérdést mindjárt akkép, hogy nem az (1) differentiálrendszernek egy y_1, \dots, y_n integrálrendszerét, hanem azt az integrálmatrixát vizsgáljuk, mely $x=x_0$ -ban (δ_{ik}) -ra redukálódik. Legyen eme integrálmatrix (y_{ik}) , azaz

$$(y_{ik}) = \int_{x_0}^x (a_{ik}(t) + \delta_{ik}).$$

Jelentse akkor $(u_{ik}^{(0)})$ a (3) rendszernek azt az integrálmatrixát, mely $x=x_0$ -ban (δ_{ik}) -ra redukálódik,

$$(u_{ik}^{(0)}) = \int_{x_0}^x (a_{ik}(t) + \delta_{ik}),$$

akkor az előzők szerint a következő algorithmussal van dolgunk:

$$(u_{ik}^{(v)}) = \sum_q u_{qk}^{(0)} \int_{x_0}^x \sum_\mu U_{\mu q}^{(0)} F_{i\mu}^{(v-1)}(x) dx,$$

$$F_{ik}^{(v-1)}(x) = \sum_\lambda u_{i\lambda}^{(v-1)} \beta_{\lambda k},$$

$$F_{ik}^{(v)}(x) = \sum_\lambda \sum_q \sum_\mu \beta_{\lambda k} u_{q\lambda}^{(0)} \int_{x_0}^x U_{\mu q}^{(0)} F_{i\mu}^{(v-1)}(x) dx,$$

$$i_{ik}^{(v)} = \sum_q y_{qk} \int_{x_0}^x \sum_\mu Y_{\mu q} F_{i\mu}^{(v)}(x) dx,$$

$$(y_{ik}) = (u_{ik}^{(0)}) + (u_{ik}^{(1)}) + \dots + (u_{ik}^{(v)}) + (i_{ik}^{(v)}).$$

Ezt az algorithmust jobban áttekinthető alakban írhatjuk, ha a következő jelöléssel élünk:

$$\left(\int \varphi_{ik}(x) dx \right) = \int (\varphi_{ik}(x)) dx,$$

a hol $(\varphi_{ik}(x))$ egy függvénymatrixot jelent; és ha az algorithmusunkban szereplő integrálokban x helyébe t -t trunk integrációs változóként, az integrálok előtt álló x -től függő factorokat pedig az integráljelek alá viszzük, akkor lesz

$$(F_{ik}^{(0)}(x)) = (u_{ik}^{(0)})(\beta_{ik}), \quad (\text{I})$$

$$(F_{ik}^{(v)}(x)) = \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(v-1)}(t)) (U_{ik}^{(0)}(t)) (u_{ik}^{(0)}(x)) (\beta_{ik}(x)) dt, \quad (\text{II})$$

$$(u_{ik}^{(v)}) = \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(v-1)}(t)) (U_{ik}^{(0)}(t)) (u_{ik}^{(0)}(x)) dt, \quad (\text{III})$$

($v=1, 2, \dots$)

és végre

$$(v_{ik}^{(v)}) = \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(v)}(t)) (Y_{ik}(t)) (y_{ik}(x)) dt. \quad (\text{IV})$$

A convergentia-vizsgálatot most mindenekelőtt az alatt a föltevés alatt végezzünk, *hogy az oly S területen belül maradunk, a hol az a_{ik} , β_{ik} függvények holomorphok.*

Előre bocsátunk két egyszerű matrixtételt.

Legyen (a_{ik}) egy matrix, melynek minden eleme olyan, hogy

$$\text{mod } a_{ik} < M^1$$

és melyre nézve az a_{ik} -kból alkotott determináns

$$\text{mod } |a_{ik}| > A,$$

akkor ha

$$(a'_{ik}) = (a_{ik})^{-1},$$

lesz:

$$\text{mod } a'_{ik} < \frac{(n-1)! M^{n-1}}{A}. \quad (\alpha)$$

Ha (β_{ik}) egy más matrix, a melyre nézve

$$\text{mod } \beta_{ik} < N,$$

akkor a componált

$$(a_{ik})(\beta_{ik}) = (\sum_{\lambda} a_{i\lambda} \beta_{\lambda k})$$

matrixra nézve

$$\text{mod } \sum_{\lambda} a_{i\lambda} \beta_{\lambda k} < nMN. \quad (\beta)$$

Az S területen belül legyen

$$\text{mod } u_{ik}^{(0)} < M, \quad \text{mod } |u_{ik}^{(0)}| > A, \quad \text{mod } \beta_{ik} < N,$$

¹ A determináns-jelöléssel való összeütközés kikerülése céljából a jelen fejezetben az absolut értékeket mod.-sal jelöljük.

akkor az (a) szerint

$$\text{mod } U_{ik}^{(0)} < \frac{(n-1)! M^{n-1}}{J}$$

és a (β) szerint [v. ö. az (I) képletet]

$$\text{mod } F_{ik}^{(1)} < nMN.$$

Akkor (II) szerint, $\nu=1$ -re:

$$\text{mod } F_{ik}^{(1)} < \int_{x_0}^x n^3 \cdot nMN \cdot \frac{(n-1)! M^{n-1}}{J} \cdot M \cdot N \cdot \text{mod } dt,$$

ha tehát az S -en belül folyó integrátiógörbe hosszát

$$\int_{x_0}^x \text{mod } dt = s$$

sel jelöljük,

$$\text{mod } F_{ik}^{(1)} < nMN \cdot \frac{n^3(n-1)!}{J} M^n \cdot N \cdot s.$$

Ugyancsak (II) szerint, $\nu=2$ -re lesz:

$$\begin{aligned} \text{mod } F_{ik}^{(2)} &< n \cdot M \cdot N \cdot \frac{n^3(n-1)!}{J} M^n N \cdot n^3 \cdot \frac{(n-1)! M^{n-1}}{J} \\ &\quad \cdot MN \cdot \int_{x_0}^x s ds, \end{aligned}$$

hol $\text{mod } dt$ helyébe ds -t írtunk. Azaz

$$\text{mod } F_{ik}^{(2)} < n \cdot M \cdot N \cdot \left(\frac{n^3(n-1)! M^n N}{J} \right)^2 \frac{s^2}{2!}.$$

Teljes inductióval adódik általánosan

$$\text{mod } F_{ik}^{(\nu)} < nMN \cdot \left(\frac{n^3(n-1)! M^n N}{J} \right)^{\nu} \frac{s^{\nu}}{\nu!},$$

a miből az következik, hogy a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} F_{ik}^{(\nu)} \\ (i, k=1, 2, \dots, n)$$

sorok az S területen belül föltétlenül és egyenletesen *convergens*ek. A *convergentia* egyenletes voltára nézve jegyezzük meg, hogy ha az S terület véges, kijelölhető az oly pozitív \bar{s} mennyiség, *melynél kisebb hosszúságú* integrációk út mentén nemcsak x_0 -tól juthatunk el az S -nek bármilyen más x pontjához, hanem még az x_0 -hoz visszatérő zárt integrációkat is tudunk végezni. A fönti egyenlőtlenségekben azután s mindig \bar{s} -sal helyettesíthető, a mely \bar{s} most x -től független.

Ha az

$$\left(\sum_{v=1}^{\infty} F_{ik}^{(v-1)}(t) \right) = \sum_{v=1}^{\infty} (F_{ik}^{(v-1)}(t))$$

matrixot jobbfelől $(U_{ik}^{(0)}(t))(u_{ik}^{(0)}(x))$ -szel componáljuk és az így adódó egyenletesen *convergens* elemekből álló matrix minden elemét x_0 -tól x -ig tagonként integráljuk, akkor a (III) szerint

$$\left(\sum_{v=1}^{\infty} u_{ik}^{(v)} \right)$$

matrixot kapunk, melynek egyes elemei tehát szintén S -en belül föltétlenül és egyenletesen *convergens* sorok. Az

$$\sum_{v=0}^{\infty} u_{ik}^{(v)} \\ (i, k=1, 2, \dots, n)$$

sorok tehát S -en belül föltétlenül és egyenletesen *convergens*ek, és ugyanez áll nyilvánvalóan a

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{du_{ik}^{(v)}}{dx}$$

sorokról is, lévén

$$\begin{aligned} \left(\frac{du_{ik}^{(v)}}{dx} \right) &= \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(v-1)}(t)) (U_{ik}^{(0)}(t)) \left(\frac{du_{ik}^{(0)}(x)}{dx} \right) dt + (F_{ik}^{(v-1)}(x)) = \\ &= \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(v-1)}(t)) (U_{ik}^{(0)}(t)) (u_{ik}^{(0)}(x)) (a_{ik}(x)) dt + (F_{ik}^{(v-1)}(x)). \end{aligned}$$

Ha most az (A) differenciálrendszerbe y_{ik} helyébe a $\sum_{v=0}^{\infty} u_{ik}^{(v)}$ sorokat, $\frac{dy_{ik}}{dx}$ helyébe pedig a $\sum_{v=0}^{\infty} u_{ik}^{(v)}$ sorok x szerinti derivált-

jait, melyek az előzők szerint a

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{dw_{ik}^{(v)}}{dx}$$

sorokkal adva vannak, behelyettesítjük, akkor a differenciálorend-szer teljesül, mert

$$\begin{aligned} & \left(\sum_v \frac{dw_{ik}^{(v)}}{dx} \right) - \left(\sum_{v=0}^{\infty} w_{ik}^{(v)} \right) (a_{ik}) - \left(\frac{dw_{ik}^{(0)}}{dx} \right) = \\ & + \sum_{v=1}^{\infty} \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(v-1)}(t)) (U_{ik}^{(0)}(t)) (w_{ik}^{(0)}(x)) (a_{ik}^{(0)}(x)) dt + \\ & + \sum_{v=1}^{\infty} F_{ik}^{(v-1)}(x) - (w_{ik}^{(0)})(a_{ik} + \beta_{ik}) - \\ & - \sum_{v=1}^{\infty} \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(v-1)}(t)) (U_{ik}^{(0)}(t)) (w_{ik}^{(0)}(x)) (a_{ik}(x) + \beta_{ik}(x)) dt, \end{aligned}$$

a mi tekintettel a (3) és (I), (II) egyenletekre identice zéró.

Az

$$y_{ik} = \sum_{v=0}^{\infty} w_{ik}^{(v)} \quad (17)$$

($i, k=1, 2, \dots, n$)

sorok tehát előállítják az (y_{ik}) integrálmatrixot minden oly egyszerűen összefüggő S területen belül, a hol az (a_{ik}) és (α_{ik}) matrixok elemei holomorphok. Ha az S terület többszörösen összefüggő, akkor a convergentia-bizonyítás változatlanul fennmarad, feltéve, hogy az integráció útja véges hosszúságú és hogy a sor egyes tagjainak megalkotásánál mindig ugyanaz az integrációs út használatik. Azaz, ha

$$(y_{ik}) = L \int_{x_0}^x (a_{ik} dx + \delta_{ik})$$

integrálmatrixot akarjuk előállítani, akkor az összes $w_{ik}^{(v)}$ -k megalkotásánál szereplő integrálokat az L út, illetőleg egy az L -vel æquivalens út mentén kell vennünk. Ha tehát például az a_{ik} , α_{ik} -k racionális függvények, melyeknek singuláris pontjai

$\alpha_1, \dots, \alpha_\sigma, \infty$, akkor e pontokat kis görbékkel kizárva kapunk oly többszörösen összefüggő T területet, a melyen belül a (17) sorok az (y_{ik}) integrálmatrixot a *magja teljes többértékűségében* előállítják.

Ha az épen kifejtett módszert nem az integrálok existenciabizonyítására, hanem csak az előállítás céljaira akarjuk használni, akkor tehát ismeretesnek lehet föltételezni, hogy az S -en belül az (y_{ik}) integrálmatrix elemei véges határok alatt maradnak,

$$\text{mod } y_{ik} < P,$$

és hogy

$$\text{mod } |y_{ik}| > Q;$$

akkor a (IV) egyenletek szerint directe kimutathatjuk, hogy a $v_{ik}^{(n)}$ maradéktagok növekedő ν -vel zéró felé convergálnak, más szóval meg tudjuk becsülni a közelítés mekkorását, ha a (17) sort a ν -dik taggal megszakítjuk. Lesz ugyanis

$$\text{mod } v_{ik}^{(\nu)} < n^2 \cdot n \cdot M \cdot N \cdot \left(\frac{n^3 (n-1)! M^{\nu} N}{J} \right)^{\nu} \frac{(n-1)! P^{n-1}}{Q} \cdot P \frac{s^{\nu+1}}{(\nu+1)!},$$

a mi tehát növekedő ν -vel úgy tart a zéró felé, mint egy exponentiális sornak $(\nu+1)$ -dik tagja.

Ha a sort $\nu-1$ -gyel megszakítjuk, adódik:

$$(y_{ik}) = (u_{ik}^{(0)}) + \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(0)}(t)) (Y_{ik}(t)) (y_{ik}(t)) dt$$

vagy $(y_{ik})^{-1}$ -gyel jobbfelől componálva:

$$(\partial_{ik}) = (u_{ik}^{(0)}) (Y_{ik}) + \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(0)}(t)) (Y_{ik}(t)) dt.$$

Ez az egyenlet föltünteti azt a kapcsolatot, a mely a successiv approximációk módszere és az újabb időkben¹ oly sokat tárgyalt »lineáris integrálegyenletek» elmélete között fönnáll.

¹ FREDHOLM, Acta Mathem. 27; HILBERT, Göttinger Nachrichten 1904 s. köv.

Néha célszerű az a_{ik} -knak fölbontását egyszerűen akkép végezni, hogy az a_{ik} -kat mind *zérónak* választjuk. Ebben az esetben az $(u_{ik}^{(0)})$ matrix egyszerűen (δ_{ik}) -ra redukálódik és lesz:

$$\begin{aligned} (F_{ik}^{(0)}) &= (a_{ik}), \\ (F_{ik}^{(v)}) &= \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(v-1)}(t)) (a_{ik}(x)) dt, \\ (u_{ik}^{(v)}) &= \int_{x_0}^x (F_{ik}^{(v-1)}(t)) dt, \\ &\quad (v=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{18}$$

a (17) sorok elemei tehát az (a_{ik}) coefficiensek matrixának *iterált integrációjával* adódnak:

$$\begin{aligned} (u_{ik}^{(1)}) &= \int_{x_0}^x (a_{ik}) dx, \\ (u_{ik}^{(2)}) &= \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x a_{ik}(dx) \right) (a_{ik}) dx, \\ &\quad \text{stb.}^1 \end{aligned} \tag{19}$$

III.

Az integrálok mint egy a coefficiensekben szereplő parameter függvényei.

Legyenek az (1) differentialrendszer coefficiensei (a_{ik}) egy μ paraméternek *egész racionális* függvényei. Akkor az $x = x_0$ reguláris pontban magát (δ_{ik}) -ra redukáló integrálmatrix (y_{ik}) elemei a μ -nek függvényei. Állítsuk elő az (y_{ik}) matrixot a (19) egyenletekkel adott $(u_{ik}^{(v)})$ -k sorával,

$$(y_{ik}) = \sum_{v=1}^{\infty} (u_{ik}^{(v)}), \quad u_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}$$

akkor nyilvánvaló, hogy mindegyik $u_{ik}^{(v)}$ a μ -nek egész racionális

¹ V. Ö. PEANO, I. c.

függvénye lesz; mivel e sorok x -nek S -en belül fekvő értékei és a μ minden véges értékére nézve föltétlenül is egyenletesen convergensek, szabad azokat a μ hatványai szerint rendezni, és akkor kapjuk az y_{ik} -kat μ -nek positiv egész hatványai szerint haladó sorokkal előállítva, mely sorok μ -nek minden véges értékére convergensek. Az y_{ik} -k e szerint a μ -nek egész transcendens függvényei.¹

Tegyük fel általánosabban, hogy

$$a_{ik} = \mu^\tau \left(a_{ik}^{(0)} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{\mu} + \dots \right),$$

hol τ egy positiv egész szám, a zárójelben álló sorok pedig

$$|\mu| > R$$

mellett, a hol R az x -től független, convergensek, és vizsgáljuk az (1) differentiálrendszernek amaz integrálmatrixát, mely $x=x_0$ -ban

$$(y_{ik})_{x_0} = (r_{ik})$$

állandó (azaz x -től független) matrixra redukálódik, hol

$$(r_{ik}) = \mu^k \left(r_{ik}^{(0)} + \frac{r_{ik}^{(1)}}{\mu} + \dots \right), \quad (a)$$

k positiv egész szám, a zárójelben álló sorok pedig ugyancsak $|\mu| > R$ tartományban convergensek. Lesz

$$\int_{x_0}^x (a_{ik} dx + \delta_{ik}) = (\delta_{ik}) + \sum_{v=1}^{\infty} (u_{ik}^{(v)}). \quad (20)$$

és

$$(y_{ik}) = (r_{ik}) \int_{x_0}^x (a_{ik} dx + \delta_{ik}).$$

Ha x az S területen belül van, és

$$R' < |\mu| < R'', \quad (21)$$

hol $R < R' < R''$, akkor

¹ POINCARÉ, Acta Math. IV, p. 212, v. ö. P. GÜNTHER, Crelle Journal Bd. 107, p. 312.

$$\begin{aligned}
& \text{tehát} & \text{mod } a_{ik} &< M, \\
& & \text{mod } u_{ik}^{(1)} &< M \cdot s, \\
& & \text{mod } u_{ik}^{(2)} &< nM^2 \frac{s^2}{2!}, \\
& \text{és ha} & \text{mod } u_{ik}^{(v)} &< n^{v-1} M^v \frac{s^v}{v!}, \\
& \text{akkor} & \text{mod } u_{ik}^{(v+1)} &< n^v M^{v+1} \frac{s^{v+1}}{v!},
\end{aligned}$$

a (20) sorok tehát föltétlenül és egyenletesen convergenssek, ha x az S -en belül és ha μ a (21) tartományon belül van.

Nyilvánvaló, hogy

$$u_{ik}^{(v)} = \mu^v \mathfrak{P}_{ik}^{(v)} \left(\frac{1}{\mu} \right),$$

hol $\mathfrak{P}_{ik}^{(v)}$ egy $|\mu| > R$ -re convergens közönséges hatványsort jelent, melynek coëfficiensei az x -nek S -en belül holomorph függvényei; ha e szerint a (20) sorokat μ -nek hatványai szerint rendezzük, akkor sorok adódnak, melyek általánosan szólva μ -nek végtelen sok positiv és végtelen sok negativ egész kitevőjű hatványát tartalmazzák (LAURENT-féle sorok) s melyek a (21) tartományon belül egyenletesen convergenssek. Az (a) kezdeti föltételekkel adott integrálmatrix elemei tehát

$$y_{ik} = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} y_{ik}^{(v)} \mu^v \quad (22)$$

alakban állíthatók elő, s e sorok minden véges μ -re, mely a $|\mu| > R$ tartományon belül van, convergenssek.¹ Ha $\tau = k = 0$, akkor a positiv kitevőjű tagok kiesnek.

Vizsgáljuk közelebbről azt az esetet, a mikor az a_{ik} -k az x -nek *racionális függvényei*. Legyenek a_1, \dots, a_σ a singuláris pontok, akkor partiális törtekre bontva lesz

¹ HORN, Mathem. Annalen Bd. 52, p. 343.

$$a_{ik} = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \sum_{\mu=1,2,\dots}^{\nu} \frac{A_{ik;\nu\mu}}{(x-a_{\nu})^{\mu}}.$$

Az a_{ik} -ban szereplő paraméterek:

1. az $A_{ik;\nu\mu}$ állandók
2. az a_1, \dots, a_{σ} singuláris pontok.

Látjuk, hogy az előzők szerint az

$$(y_{ik}) = \int_{x_0}^x (a_{ik} dx + \delta_{ik})$$

integrálmatrix elemei az 1. alatti mennyiségeknek egész transcendens függvényei, ha e mennyiségeket az $a_1 \dots a_{\sigma}$ pontoktól függetleneknek tekintjük. Az (y_{ik}) -k függési viszonya az $a_1 \dots a_{\sigma}$ singuláris pontoktól ellenben egészen más jellegű.

Képzeljük az (y_{ik}) -kat a (20) alatti sorok alakjában előállítva és azután e sorokat az $A_{ik;\nu\mu}$ mennyiségek hatványai szerint rendezve. Az $u_{ik}^{(n)}$ ezeknek a mennyiségeknek legfőlegb ν -dfokú egész racionális és pedig *homogén* függvénye; e függvényekoefficiensei pedig a következő alakkal bírnak. Tegyük¹

$$A(x, a_1) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x-a_1}; \quad A(x, a_1, a_2) = \int_{x_0}^x \frac{A(x, a_1) dx}{x-a_2}, \dots$$

$$A(x, a_1, \dots, a_q, a_{q+1}) = \int_{x_0}^x \frac{A(x, a_1, \dots, a_q) dx}{x-a_{q+1}},$$

akkor az $u_{ik}^{(n)}$ oefficiensei ily A függvények, a melyekben az a_1, \dots, a_{q+1} mennyiségek az a_1, \dots, a_{σ} singuláris pontok, tetszésszerinti számban és sorrendben ismételve. A (20) alatti sorokoefficiensei, ha e sorokat az $A_{ik;\nu\mu}$ mennyiségek hatványai szerint rendezzük, tehát ily A függvények összegei.

Ha az (y_{ik}) matrixban az integráció útja *zárt görbe*, például egy az x_0 -ból kiinduló a_{ν} körül fektetett hurok s_{ν} , és ha megfelelően az $u_{ik}^{(n)}$ -k megalkotásánál szereplő utolsó integratiót e zárt görbe illetve hurok mentén vesszszük, akkor a (20) sorok

¹ POINCARÉ, l. c., v. ö. VOGT, THÈSES, GÜNTHER, l. c.

azt a *substitutiót* állítják elő, melyet az (y_{ik}) matrix az illető hurok befutásánál szenved. *E substitutió elemei tehát szintén az $A_{ik; \nu}$ mennyiségek egész transcendens függvényei s az ezen mennyiségek hatványai szerint haladó sorbontások: roéfficiensei e hurok mentén vett A függvények összegei.*

Azzal a feladattal fogunk foglalkozni, hogy az integrálok, illetve a substitutiók elemeit egyrészt mint az $A_{ik; \nu}$ mennyiségek, másrészt mint a singuláris pontok függvényeit közelebbről megvizsgáljuk. A mi mindenekelőtt az itt fellépő egész transcendens függvényeket illeti, az ilyeneknek a magatartása a változók *véges* értékei mellett, a hol a közönséges hatványsorok convergensek, semmi különös nevezetességet nem mutat. csak a lényeges singuláris pontok (határozatlansági helyek) környezete képezheti tehát a közelebbi vizsgálatnak a tárgyát. Tehát foglalkoznunk kell ezeknek az egész transcendens függvényeknek a vizsgálatával az $A_{ik; \nu} = \infty$ pontok környezetében, vagy a mi ezzel lényegében azonos, a (22)-féle soroknak vizsgálatával nagy μ értékekre nézve. Az ezen vizsgálatnál kövendő módszerek lényegesen kihasználják azt a körülményt, hogy a szóban forgó függvények épen lineáris differenciálegyenleteknek tesznek eleget. E módszerek ezért nem csak abban az esetben alkalmazhatók, a mikor egy μ paraméternek függvényeiről van a szó, hanem akkor is, ha egy lineáris differenciálrendszer megoldásait a független változó, x oly pontjának a környezetében kell vizsgálni, mely ezeknek a megoldásoknak határozatlansági helye. Tekintettel arra, hogy a történelmi fejlődésben ez a vizsgálat a prius volt, mindenekelőtt ezen fogjuk az illető módszereket bemutatni. Az általánosság megszorítása nélkül $x = \infty$ pontot képzelhetjük mint azt a helyet, a mely az integráloknak határozatlansági helye.

IV.

Az integrálok vizsgálata a végtelen távol pont környezetében.

Legyenek a differenciálrendszer coefficiensei a végtelen távol pont környezetében sorba bontva

$$a_{ik} = \sum_{v=-\infty}^{\tau} a_{ik}^{(-v)} x^v, \quad (23)$$

a hol τ egy positiv egész számot jelent s e sorok az $|x| > R$ tartományon belül convergenssek. A coefficiensekről tehát fölteszszük, hogy $x = \infty$ környezetében *racionális függvények* jellegével bírnak.

Ha a (23) sorokban csak negativ kitevőjű hatványok szerepelnek, ha tehát

$$a_{ik} = \frac{a_{ik}^{(1)}}{x} + \frac{a_{ik}^{(2)}}{x^2} + \dots \text{ in inf.}, \quad (24)$$

akkor a mint tudva van az $x = \infty$ az integráloknak nem lesz határozatlansági helye. Ebben az esetben az $x = \infty$ -hez tartozó integrálmatrixot η_{ik} -t a következőképen kapjuk.

Ha az $a_{ik}^{(1)}$, azaz az a_{ik} függvényeknek $x = \infty$ -hez tartozó residui, zérók, akkor a differenciálrendszer integráljai $x = \infty$ környezetében holomorphok, azaz $\frac{1}{x}$ positiv egész hatványai szerint bonthatók sorba. Azok a tagok, a melyek a singularitást okozzák, tehát épen az $\frac{a_{ik}^{(1)}}{x}$ tagok. Igyekezünk tehát e tagoknak a befolyását felkutatni. Tegyük e célból

$$y_k = e^{\omega} \cdot \varphi_k, \quad (25)$$

a hol az ω az x -nek ismeretlen függvénye, a melyet akkárunk meghatározni, hogy a φ_k -k holomorphok, azaz x -nek fogyó hatványai szerint sorba bonthatók legyenek. Lesz

$$\frac{dy_k}{dx} = e^{\omega} \frac{d\varphi_k}{dx} + e^{\omega} \varphi_k \cdot \frac{d\omega}{dx},$$

tehát az (1) rendszerbe behelyettesítve és e^ω -val osztva

$$\frac{d\varphi_k}{dx} + \varphi_k \frac{d\omega}{dx} = \sum_{\lambda} \left(\frac{a_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots \right) \varphi_{\lambda}$$

vagy

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = \sum_{\lambda} \left[\varphi_{\lambda} \left(\frac{a_{\lambda k}^{(1)}}{x} - \delta_{\lambda k} \frac{d\omega}{dx} \right) + \varphi_{\lambda} \left(\frac{a_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots \right) \right]. \quad (26)$$

Válaszszuk az ω -t akkép, hogy

$$\left| \frac{a_{\lambda k}^{(1)}}{x} - \delta_{\lambda k} \frac{d\omega}{dx} \right| = 0, \quad (27)$$

azaz, ha a

$$|a_{ik}^{(1)} - \delta_{ik} r| = 0 \quad (28)$$

egyenlet gyökei $-r_1, \dots, -r_n$ -nel jelöljük, legyen

$$\frac{d\omega_i}{dx} = -\frac{r_i}{x},$$

$$\omega_i = r_i \log \frac{1}{x},$$

($i=1, 2, \dots, n$)

(tetszőleges állandót mellőzve, mely ugyanis csak az y_k -nak állandó factorát képviselné). Ha r_1, \dots, r_n különbségei sem zérók, sem egész számok, akkor tudva van, hogy a (26) differenciárendszer, ha ω helyébe valamely ω_i -t teszünk, egy *particuláris* integrálrendszerrel bír, mely $x=\infty$ környezetében holomorph, és ez által kapjuk a (25)-ben az $x=\infty$ -hez tartozó integrálmatrix elemeit.

Az épen körvonalzott eset után a legegyszerűbb az lesz, a mikor az a_{ik} -k sorfejtései még absolut tagokkal bírnak, azaz

$$a_{ik} = a_{ik}^{(0)} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{x} + \frac{a_{ik}^{(2)}}{x^2} + \dots \text{ in inf.} \quad (29)$$

Ebben az esetben az integrálok általánosan szólva $x=\infty$ -ben már határozatlanok; POINCARÉ szerint azt mondjuk, hogy a differenciárendszer *rangja egy*. Tegyük ebben az esetben is

$$y_k = e^\omega \cdot \varphi_k \quad (30)$$

és igyekezzünk az ω -t akkép meghatározni, hogy a φ_k -k oly sorbontások legyenek, a melynek az előbb tárgyalt esetben az y_k -kra nézve kiadódtak, tehát

$$\varphi_k = x^q \left(c_k^{(0)} + c_k^{(1)} \frac{1}{x} + \dots \right). \quad (31)$$

Lesz, ha a (30) kifejezéseket az (1) differenciálrendszerbe behelyettesítjük és e^{ω} -val osztunk:

$$\frac{d\varphi_k}{dx} - \sum_{\lambda} \left[\left(a_{\lambda k}^{(0)} - \delta_{\lambda k} \frac{d\omega}{dx} \right) + \frac{a_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots \right] \varphi_{\lambda};$$

az ω -t akkép meghatározva, hogy

$$\left| a_{\lambda k}^{(0)} - \delta_{\lambda k} \frac{d\omega}{dx} \right| = 0, \quad (32)$$

adódik, ha a

$$| a_{\lambda k}^{(0)} - \delta_{\lambda k} a | = 0 \quad (33)$$

egyenlet gyökeit a_1, \dots, a_n -nel jelöljük,

$$\omega_i = a_i x,$$

úgy hogy föltéve, hogy a_1, \dots, a_n egymástól különböző

$$y_{ik} = e^{a_i x} \varphi_{ik}$$

ban, a φ_{ik} számára a

$$\frac{d\varphi_{ik}}{dx} = \sum_{\lambda} \left[\left(a_{\lambda k}^{(0)} - \delta_{\lambda k} a_i \right) + \frac{a_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots \right] \varphi_{\lambda} \quad (34)$$

differenciálegyenleteket kapjuk. A további számítás egyszerűsítése végett határozzuk meg a_{ik} mennyiségeket az

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda k} (a_{\lambda k}^{(0)} - \delta_{\lambda k} a_i) = 0 \quad (33a)$$

($i, k=1, 2, \dots, n$)

egyenletekből. E mennyiségek determinánsa $|a_{ik}|$ zérótól különböző, ha az $a_1 \dots a_n$ egymástól különbözők. Akkor

$$(a_{ik}) (a_{ik}^{(0)}) = (a_i a_{ik}). \quad (35)$$

Transformáljuk most az (1) differenciálrendszert

$$y_k = \sum_{\lambda} z_{\lambda} a_{\lambda k} \quad (36)$$

substitutióval, akkor

$$(a_{ik}) (a_{ik}^{(0)})^{-1} = (a_i \delta_{ik}) \quad (37)$$

és ha

$$(a_{ik}) (a_{ik}^{(v)})^{-1} = (b_{ik}^{(v)}), \quad (v=1, 2, \dots) \quad (37a)$$

a z_k -ra szóló transformált differenciálrendszer ez lesz:

$$\frac{dz_k}{dx} = a_k z_k + \sum_{\lambda} \left(\frac{b_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{b_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots \right) z_{\lambda}. \quad (1a)$$

A (36) szerint

$$z_{ik} = \sum_{\lambda} y_{i\lambda} a'_{\lambda k} = e^{a_i x} \sum_{\lambda} \varphi_{i\lambda} a'_{\lambda k}, \quad (36a)$$

$$(a'_{ik}) = (a_{ik})^{-1}$$

és a

$$\sum_{\lambda} \varphi_{i\lambda} a'_{\lambda k} = \phi_{ik}$$

menyiségek eleget tesznek a

$$\frac{d\phi_{ik}}{dx} = \phi_{ik}(a_k - a_i) + \sum_{\lambda} \left[\frac{b_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{b_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots \right] \phi_{i\lambda} \quad (34a)$$

egyenleteknek. Tegyük most a (31)-nek megfelelően

$$\phi_{ik} = x^{a_i} \left(c_{ik}^{(0)} + \frac{c_{ik}^{(1)}}{x} + \dots \right) = \sum_{v=0}^{\infty} c_{ik}^{(v)} x^{a_i - v},$$

akkor ezeket a sorokat a (34a)-ba helyettesítve és x^{a_i} -vel osztva lesz:

$$\sum_{v=0}^{\infty} (\rho_i - v) c_{ik}^{(v)} x^{-v-1} = (a_k - a_i) \sum_{v=0}^{\infty} c_{ik}^{(v)} x^{-v} + \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{b_{\lambda k}^{(\mu)}}{x^{\mu}} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_{i\lambda}^{(v)}}{x^v}.$$

Összehasonlítva az abszolút tagokat, kapjuk, hogy

$$(a_k - a_i) c_{ik}^{(0)} = 0,$$

tehát

$$c_{ik}^{(0)} = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq k.$$

Összehasonlítva az x^{-1} coefficientenseit pedig adódik:

$$\rho_i c_{ik}^{(0)} = (a_k - a_i) c_{ik}^{(1)} + \sum_{\lambda} c_{i\lambda}^{(0)} b_{\lambda k}^{(1)}, \quad (38)$$

azaz, $k=i$ -re, tekintettel arra, hogy szükségképen $c_{ii}^{(0)} \neq 0$,

$$\rho_i = -b_{ii}^{(1)}; \quad (38a)$$

a magasabbrendű hatványok összehasonlításából eredő egyenletek azután a $c_{ik}^{(p)}$ -k meghatározására szolgálnak. A $c_{ii}^{(1)}$ tetszőleges, de zérótól különböző állandóknak tekinthetők, vehetjük például $c_{ii}^{(p)} = 1$.

A $c_{ik}^{(1)}$ -ra adódik a (38)-ból $i \neq k$ -ra nézve:

$$c_{ik}^{(1)} = -\frac{b_{ik}^{(1)}}{a_i - a_k}. \quad (38b)$$

Ily módon kapjuk tehát az (1) differenciálrendszert formszerint kielégítő sorokat

$$y_{ik} = e^{a_i x} x^q \left(c_{ik}^{(0)} + c_{ik}^{(1)} \frac{1}{x} + \dots \right), \quad (39)$$

hol a_1, \dots, a_n a (33) egyenlet, melyet *characteristicus egyenletnek* nevezhetünk, gyökei, ρ_1, \dots, ρ_n a (38) egyenletekkel vannak meghatározva, hol (37a) szerint

$$(b_{ik}^{(1)}) = (a_{ik}) (a_{ik}^{(1)}) (a_{ik})^{-1},$$

az a_{ik} -k pedig a (33a) egyenletekkel advák, végre a (36a) szerint

$$(e_{ik}^{(0)}) = (c_{ik}^{(0)}) (a_{ik}),$$

azaz

$$(e_{ik}^{(0)}) = (a_{ik}).$$

Hogy a (39) soroknak a jelentését a differenciálrendszerre nézve kikutassuk, vizsgáljuk e differenciálrendszer integráljainak a magatartását, ha x a végtelen felé közeledik.¹

Tegyük föl, hogy x mint *positiv valós* mennyiség nő a végtelenbe, továbbá azt is, hogy a (33) *characteristicus* egyenlet gyökei, nemcsak egymástól különbözők, hanem, hogy valós részek is egymástól különbözők legyenek. Legyen a jelölés

¹ Lásd a következőkre nézve POINCARÉ, American Journal, t. VII; HORN, Acta Mathematica, t. 24 és Samml. Schub. L. p. 188 s. köv.

akkép választva, hogy

$$\Re(a_1) > \Re(a_2) > \dots > \Re(a_n).$$

Az (1a) differenciálrendszert írjuk így:

$$\frac{dz_k}{dx} = a_k z_k + \sum_{\lambda} Q_{\lambda k} z_{\lambda}, \quad (1b)$$

a hol tehát

$$Q_{\lambda k} = \frac{b_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{b_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots;$$

azonban a $Q_{\lambda k}$ -król a pillanatban elég lesz föltételezni, hogy

$$\lim Q_{\lambda k} = 0. \quad (40)$$

Az (1b) differenciálrendszerből kapjuk, hogy

$$\frac{d \log z_k}{dx} = a_k + \sum_{\lambda} \frac{z_{\lambda}}{z_k} Q_{\lambda k}$$

($k=1, 2, \dots, n$)

és tovább, hogy

$$\frac{d \log \frac{z_k}{z_1}}{dx} = a_k - a_1 + Q_{kk} - Q_{11} + \sum_{\lambda \neq k} \frac{z_{\lambda}}{z_k} Q_{\lambda k} - \sum_{\lambda > 1} Q_{\lambda 1} \frac{z_{\lambda}}{z_1}. \quad (41)$$

($k=2, \dots, n$)

Elegendő nagy x -re nézve áll a (40) szerint, hogy

$$Q_{\lambda k} < \delta, \quad \lim \delta = 0;$$

továbbá lesz

$$0 > \Re(a_k - a_1) > \Re(a_2 - a_1).$$

($k=2, \dots, n$)

Ha egy bizonyos x -re áll, hogy

$$\left| \frac{z_{\lambda}}{z_k} \right| < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \left| \frac{z_{\lambda}}{z_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon}, \quad (42)$$

$\lambda \neq k$ $\lambda > 1$

akkor a (41) szerint ezen x -re nézve lesz

¹ A lim-jellel röviden azt jelezzük, hogy x mint pozitív mennyiség tart a végtelen felé.

$$\Re \left(\frac{d \log \frac{z_k}{z_1}}{dx} \right) < \Re (a_2 - a_1) + 2\delta + 2(n-1)\delta \cdot \frac{1}{\varepsilon}. \quad (43)$$

Most határozott δ -hoz határozzunk egy ε mennyiséget akkép, hogy

$$\Re (a_2 - a_1) + 2\delta \left(1 + \frac{n-1}{\varepsilon} \right) = -g, \quad (44)$$

a hol g egy szabott, de különben az alábbi kikötés mellett tetszőlegesen választandó pozitív mennyiséget jelent. Adódik:

$$\varepsilon [-2\delta - g + \Re (a_1 - a_2)] = 2\delta (n-1),$$

ha tehát δ elegendő kicsiny, g pedig kisebb mint

$$\Re (a_1 - a_2) - 2\delta,$$

akkor ε pozitív, és

$$\lim \varepsilon = 0.$$

A következőben ε -on mindig az így (szabott δ és alkalmas g -vel) meghatározott mennyiség értendő.

Legyen bizonyos x -re nézve

$$\left| z_{i_1} \right| \geq \left| z_{i_2} \right| \geq \dots, \\ (i_1, i_2, \dots = 2, \dots, n)$$

úgy hogy

$$M = \left| \frac{z_{i_1}}{z_1} \right| \geq \left| \frac{z_{i_2}}{z_1} \right| \geq \dots$$

Tegyük föl, hogy

$$\varepsilon < M < \frac{1}{\varepsilon}, \quad (45)$$

(a hol tehát ε az x értékével — mely a maga részéről a δ -t meghatározza — a (44) szerint meghatározott pozitív mennyiség), akkor

$$\left| \frac{z_k}{z_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon}, \\ (k=2, 3, \dots, n)$$

és mivel $M > \varepsilon$

$$\left| \frac{z_1}{z_{i_1}} \right| < \frac{1}{\varepsilon}; \quad (46)$$

de mivel

$$\left| z_k \right| \leq \left| z_{i_1} \right| \\ (k=2, \dots, n)$$

következik, hogy

$$\left| \frac{z_k}{z_{i_1}} \right| < \frac{1}{\varepsilon}, \quad (42b)$$

($k \neq i_1$)

az ε t. i. növekedő x -szel zéró felé tart, tehát föltételezhető, hogy arra az x -re nézve, a melyet vizsgálunk, $\frac{1}{\varepsilon} > 1$.

Ha most a (43) egyenlőtlenséget $k=i_1$ -re alkalmazzuk, a mi meg van engedve, mivel — föltéve, hogy (45) teljesül — a (42) egyenlőtlenségek teljesülnek $k=i_1$ -re (lásd (42a) és (42b)-t), kapjuk, hogy

$$\frac{d \log M}{dx} < -g. \quad (46)$$

Ha tehát bizonyos x mellett a (45) teljesül, akkor M növekedő x -szel fogy. Jelölje $\bar{M}(h)$ a legnagyobb értéket, melyet az M fölvehet, ha $x > h$; akkor azt állítjuk, hogy

$$\bar{M}(h) \leq \varepsilon; \quad (47)$$

tényleg láttuk, hogy míg $M > \varepsilon$, az M -nek fogynia kell; ha azután (természetesen növekedő x -szel) ismét növekedni talál, semmiesetre az ε -nál nagyobbá nem válhatik. De mivel $\lim \varepsilon = 0$, következik a (47)-ből, hogy

$$\lim M = 0,$$

azaz, ha x -nek bizonyos (nagy pozitív) értéke mellett

$$\varepsilon < \left| \frac{z_k}{z_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon}, \quad (48)$$

($k=2, 3, \dots, n$)

akkor

$$\lim \frac{z_k}{z_1} = 0; \quad (49)$$

($k=2, 3, \dots, n$)

ha pedig egyetlen egy x -re nézve sem áll a (48) egyenlőtlenség, akkor $\left| \frac{z_k}{z_1} \right|$ vagy mindig kisebb az ε -nál, azaz limese zéró, vagy mindig nagyobb az $\frac{1}{\varepsilon}$ -nál, azaz limese végtelen. Mondhatjuk tehát, hogy az (1b) differenciálrendszer valamely integrál-

rendszerére nézve áll, hogy *általánosan szólva*

$$\lim_{z_1} \frac{z_k}{z_1} = 0, \quad (50)$$

de bizonyos particuláris integrálrendszerekre nézve lehet

$$\lim_{z_1} \frac{z_k}{z_1} = \infty. \quad (51)$$

Mint hogy particuláris integrálrendszert mindig akkép tudunk meghatározni, hogy a valamely nagy pozitív x melletti kezdőértékek a (48) egyenlőtlenségeknek eleget tegyenek, mondhatjuk, hogy az (1b) differenciálrendszernek mindenestre van oly integrálrendszere, melyre az (50) egyenletek állanak. E tételt POINCARÉ *féle lemmának* fogjuk nevezni.

A $\frac{z_k}{z_1}$ hányadosok eleget tesznek a következő differenciálrendszernek.

Ha általánosan

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda} a_{\lambda k} y_{\lambda}, \quad (A)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

akkor

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_k}{y_1} \right) = \sum_{\lambda} a_{\lambda k} \frac{y_{\lambda}}{y_1} - \frac{y_k}{y_1} \sum_{\lambda} a_{\lambda 1} \frac{y_{\lambda}}{y_1},$$

($k=2, \dots, n$)

azaz az

$$\frac{y_k}{y_1} = \zeta_k$$

($k=2, \dots, n$)

menyiségekre áll, hogy

$$\frac{d\zeta_k}{dx} + \zeta_k \sum_{\lambda=1} a_{\lambda 1} \zeta_{\lambda} + \zeta_k a_{11} = \sum_{\lambda=1} a_{\lambda k} \zeta_{\lambda} + a_{1k}. \quad (B)$$

($k=2, \dots, n$)

Ha különösen $n=2$, akkor az

$$\frac{y_2}{y_1} = \zeta$$

eleget tesz a

$$\frac{d\xi}{dx} + a_{21}\xi^2 + (a_{11} - a_{22})\xi - a_{12} = 0$$

RICCATI-féle differenciálegyenletnek.

Az (1b) differenciálrendszerre

$$\begin{aligned} a_{\lambda k} &= Q_{\lambda k}, & \lambda \neq k, \\ a_{kk} &= a_k + Q_{kk}, \\ (\lambda, k &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \frac{z_k}{z_1} &= \eta_k \\ (k &= 2, \dots, n) \end{aligned}$$

hányadosok tehát eleget tesznek a

$$\frac{d\eta_k}{dx} + \eta_k \sum_{\lambda=1} Q_{\lambda 1} \eta_\lambda = (a_k - a_1) \eta_k + \sum_{\lambda=2} (Q_{\lambda k} - \delta_{\lambda k} Q_{11}) \eta_\lambda + Q_{1k} \quad (1c)$$

($k=2, \dots, n$)

differenciálrendszernek. Monthatjuk tehát, hogy egy

$$\frac{du_k}{dx} + u_k \sum_{\lambda} R_{\lambda 1} u_\lambda = \beta_k u_k + \sum_{\lambda} R_{\lambda k} u_\lambda + R_{1k} \quad (1d)$$

($k, \lambda=2, 3, \dots, n$)

alakú differenciálrendszernek, melyben

$$\Re(\beta_k) < 0, \quad \lim R_{\lambda 1} = \lim R_{1k} = \lim R_{\lambda k} = 0,$$

mindig van oly integrálrendszer, melyre nézve

$$\lim u_k = 0.$$

Egy ilyen (1d) alakú rendszer mindig felfogható mint olyan, mely egy (1b) alakúból keletkezett. Legyenek most a $Q_{\lambda k}$ -k ismét

$$Q_{\lambda k} = \frac{b_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{b_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots$$

alakban előállítva, de olyképen, hogy e sorok vagy az $x=\infty$ pont bizonyos környezetében convergenssek, vagy pedig csupán asymptoticus előállításai a $Q_{\lambda k}$ -knak.¹ Akkor láttuk, hogy tudunk

¹ V. ö. az asymptoticus sorok értelmezésére nézve POINCARÉ, Acta Mathem. VII.

oly

$$z_{ik} = e^{a_i x} x^{\rho_i} \left(c_{ik}^{(0)} + \frac{c_{ik}^{(1)}}{x} + \dots \right) \quad (52)$$

formálisan a differenciálrendszert kielégítő sorokat föllálistani, n melyekben (v. ö. a (38) egyenletet)

$$\rho_i = b_i^{(1)}, \quad c_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}.$$

Különösen adódik $i=1$ -re, ha a $\frac{z_{1k}}{z_{11}}$ hányadosokat megalkotjuk

$$\frac{z_{1k}}{z_{11}} = \frac{\frac{c_{1k}^{(1)}}{x} + \frac{c_{1k}^{(2)}}{x^2} + \dots}{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \frac{c_{11}^{(2)}}{x^2} + \dots} = \frac{\gamma_{1k}^{(1)}}{x} + \frac{\gamma_{1k}^{(2)}}{x^2} + \dots, \quad (53)$$

($k=2, 3, \dots, n$)

a hol tekintettel a (38b) képletre (p. 644)

$$\gamma_{1k}^{(1)} = c_{1k}^{(1)} = \frac{b_{1k}^{(1)}}{a_1 - a_k}; \quad (53a)$$

természetesen az osztás elvégzésével nyert sorok szintén csak formális jelleggel bírnak. Mindenesetre mondhatjuk, hogy az (1d) alakú differenciálrendszernek, föltéve, hogy az $R_{\lambda k}$ -k

$$R_{\lambda k} = \frac{\beta_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{\beta_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots \quad (54)$$

($\lambda, k=1, 2, \dots, n$)

alakban vannak előállítva ($x=\infty$ környezetében vagy asymptoticusan!),

$$u_k = \frac{\gamma_k^{(1)}}{x} + \frac{\gamma_k^{(2)}}{x^2} + \dots \quad (55)$$

($k=2, \dots, n$)

alakú sorokkal *formálisan* tudunk eleget tenni. Tegyük most

$$R_{\lambda k} = \frac{\beta_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{\beta_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots + \frac{\beta_{\lambda k}^{(p+1)}}{x^{p+1}} + \frac{B_{\lambda k}}{x^{p+1}},$$

úgy hogy, akár convergenssek az (54) alatti sorok, akár asymptoticusak,

$$\lim B_{\lambda k} = 0,$$

és

$$u_k = \frac{\gamma_k^{(1)}}{x} + \frac{\gamma_k^{(2)}}{x^2} + \cdots + \frac{\gamma_k^{(p+1)}}{x^{p+1}} + \frac{\Gamma_k}{x^{p+1}},$$

a hol a Γ_k -k az u -nek függvényei, akkor ¹ e függvények eleget tesznek a következő differenciálrendszernek:

$$\frac{d\Gamma_k}{dx} + \Gamma_k \sum_{\lambda=2}^n S_{\lambda 1} \Gamma_\lambda = \beta_k \Gamma_k + \sum_{\lambda=2}^n S_{\lambda k} \Gamma_\lambda + S_{1k},$$

($k=2, \dots, n$)

a hol

$$S_{\lambda 1} = \frac{R_{\lambda 1}}{x^{p+1}}; \quad S_{\lambda k} = R_{\lambda k} - R_{\lambda 1} U_k, \quad (\lambda=k)$$

$$S_{kk} = R_{kk} - R_{k1} U_k - (R_{21} U_2 + \cdots + R_{n1} U_n) + \frac{p+1}{x},$$

$$\lim S_{1k} = 0, \quad U_k = \frac{\gamma_k^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{\gamma_k^{(p+1)}}{x^{p+1}}.$$

Ennek a rendszernek, mely ugyanoly alakú, mint az (1d) rendszer (p. 649), a POINCARÉ-féle lemma szerint van oly integrárendszer, melyre nézve

$$\lim \Gamma_k = 0,$$

mondhatjuk tehát, hogy akármilyen pozitív egész szám a p , az (1d) rendszernek mindig van oly

$$u_k = \frac{\gamma_k^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{\gamma_k^{(p+1)}}{x^{p+1}} + \frac{\Gamma_k}{x^{p+1}}$$

alakú megoldása, melyre nézve

$$\lim \Gamma_k = 0,$$

($k=2, \dots, n$)

a mivel (tekintettel arra, hogy p egyelőre rögzített számot jelent) még nincs kimutatva, hogy az (55) sorok az u_k integráloknak *asymptoticus előállításait* szolgáltatják. Nézzük, hogy ez mit

¹ V. ö. HORN, Acta Mathem. 24; S. S. L. p. 195.

szolgáltat az (1) differenciálrendszerre nézve. E differenciálrendszer szerint, melyet most így írunk:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n (a_{\lambda k}^{(0)} + P_{\lambda k}) y_{\lambda}, \quad (1)$$

$$P_{\lambda k} = \frac{a_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\lambda k}^{(2)}}{x^2} + \dots$$

($k=1, 2, \dots, n$)

$$\frac{d \log y_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n \left(a_{\lambda k}^{(0)} \frac{y_{\lambda}}{y_k} + P_{\lambda k} \frac{y_{\lambda}}{y_k} \right),$$

($k=1, 2, \dots, n$)

tehát, ha a (36) egyenletek szerint (p. 643) az

$$\frac{y_{\lambda}}{y_k} = \frac{z_1 a_{1\lambda} + \dots + z_n a_{n\lambda}}{z_1 a_{1k} + \dots + z_n a_{nk}}$$

kifejezéseket bevezetjük:

$$\frac{d \log y_k}{dx} = - \frac{1}{z_1 a_{1k} + \dots + z_n a_{nk}} \left\{ \sum_{\lambda} \sum_i a_{i\lambda} a_{\lambda k}^{(0)} z_i + \sum_{\lambda} \sum_i a_{i\lambda} P_{\lambda k} z_i \right\}.$$

Mivel azonban a (35) szerint (p. 642)

$$\sum_{\lambda} a_{i\lambda} a_{\lambda k}^{(0)} = a_i a_{ik},$$

lesz

$$\frac{d \log y_k}{dx} = \frac{z_1 a_{1k} + \dots + z_n a_{nk}}{z_1 a_{1k} + \dots + z_n a_{nk}} + \frac{\sum_{\lambda} \sum_i a_{i\lambda} P_{\lambda k} z_i}{z_1 a_{1k} + \dots + z_n a_{nk}}. \quad (56)$$

Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy az

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$$

mennyiségek zérótól különbözők; ha ez t. i. nem áll, akkor az y_1, \dots, y_n -eket alávétjük alkalmas lineáris transzformációnak.¹

¹ Megjegyezzük, hogy abban az esetben is, a mikor az a_{1k} -k közül egynémelyik eltűnik, a következő megfontolások mutatis mutandis érvényben maradnak. Például magára az (1a) rendszerre lesz

$$\frac{d \log z_k}{dx} = \alpha_k + \frac{b_{kk}^{(1)}}{x} + \dots + \sum_{\lambda \neq k} \left(\frac{b_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \dots \right) \frac{z_{\lambda}}{z_k},$$

E föltétel mellett $z_1 a_{1k}$ -val oszthatunk az (56) jobb oldalának számlálójában és nevezőjében, akkor lesz

$$\frac{d \log y_k}{dx} = \frac{a_1 + a_2 \frac{a_{2k}}{a_{1k}} \frac{z_2}{z_1} + \dots + a_n \frac{a_{nk}}{a_{1k}} \frac{z_n}{z_1}}{1 + \frac{a_{2k}}{a_{1k}} \frac{z_2}{z_1} + \dots + \frac{a_{nk}}{a_{1k}} \frac{z_n}{z_1}} +$$

$$+ \frac{\sum_{\lambda} \sum_i \frac{a_{i\lambda}}{a_{1k}} P_{\lambda k} \frac{z_i}{z_1}}{1 + \frac{a_{2k}}{a_{1k}} \frac{z_2}{z_1} + \dots + \frac{a_{nk}}{a_{1k}} \frac{z_n}{z_1}}; \quad (57)$$

ha ezekben az egyenletekben a $\frac{z_i}{z_1}$ hányadosok helyébe a talált

$$\frac{\gamma_i^{(1)}}{x} + \dots + \frac{\gamma_i^{(p+1)}}{x^{p+1}} + \frac{\Gamma_i}{x^{p+1}}$$

($i=2, \dots, n$)

tehát a z_{11}, \dots, z_{1n} integrálrendszerre nézve:

$$\frac{d \log z_{11}}{dx} = a_1 + \frac{b_{11}^{(1)}}{x} + \dots + \sum_{\lambda > 1} \left(\frac{b_{\lambda 1}^{(1)}}{x} + \dots \right) \frac{\frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \dots}{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \dots}$$

$$= a_1 + \frac{\tau_1^{(1)}}{x} + \dots + \frac{\tau_1^{(p)}}{x^p} + \frac{T_1}{x^p},$$

továbbá $k > 1$ esetén

$$\frac{d \log z_{1k}}{dx} = a_k + \frac{b_{kk}^{(1)}}{x} + \dots + \sum_{\lambda \neq k} \left(\frac{b_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \dots \right) \frac{\delta_{1\lambda} + \frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \dots}{\frac{c_{1k}^{(1)}}{x} + \dots}$$

$$= a_k + \frac{b_{kk}^{(1)}}{x} + \dots + \left(\frac{b_{1k}^{(1)}}{x} + \dots \right) \frac{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \dots}{\frac{c_{1k}^{(1)}}{x} + \dots} +$$

$$+ \sum_{\substack{\lambda > 1 \\ \lambda \neq k}} \left(\frac{b_{\lambda k}^{(1)}}{x} + \dots \right) \frac{\frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \dots}{\frac{c_{1k}^{(1)}}{x} + \dots},$$

és mivel (53a) szerint $c_{1k}^{(1)} = \frac{b_{1k}^{(1)}}{a_1 - a_k}$

$$\frac{d \log z_{1k}}{dx} = a_1 + \frac{\tau_k^{(1)}}{x} + \dots + \frac{\tau_k^{(p)}}{x^p} + \frac{T_k}{x^p}.$$

kifejezéseket behelyettesítjük, akkor x hatványai szerint rendezve adódik:

$$\frac{d \log y_k}{dx} = a_1 + \frac{\sigma_k^{(0)}}{x} + \frac{\sigma_k^{(1)}}{x^2} + \dots + \frac{\sigma_k^{(p)}}{x^{p+1}} + \frac{\sum_k}{x^{p+1}},$$

a hol

$$\lim \sum_k = 0.$$

Ha most x -re nézve integrálunk, akkor

$$\log y_k = a_1 x + \sigma_k^{(0)} \log x - \frac{\sigma_k^{(1)}}{x} - \dots - \frac{\sigma_k^{(p)}}{p x^p} + \int_{\infty}^x \frac{\sum_1 dx}{x^{p+1}} + \text{const.}$$

és áttérve a numerusokhoz

$$y_k = e^{a_1 x} x^{\sigma_k^{(0)}} \left(e_{1k}^{(0)} + \frac{e_{1k}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{e_{1k}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{1k}^{(p)}}{x^p} \right), \quad (58)$$

a hol¹

$$\lim E_{1k}^{(p)} = 0. \quad (59)$$

Nyilvánvaló, hogy e sorokban $\sigma_k^{(0)} = \rho_1 = b_{11}^{(1)}$, valamint, hogy az $e_{ik}^{(1)}$ -k, a p. 644-en ugyanígy jelölt mennyiségekkel azonosak.

Eredményünk az (1) differenciálrendszerre nézve tehát az, hogy mindig létezik egy (58) alakú integrálrendszer, melyet

$$y_{11}, \dots, y_{1n}$$

nel fogunk jelölni, és melyre nézve az (59) egyenletek állanak.

Most egy segédtétele van szükségünk, mely szerint egy

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_{\lambda} a_{\lambda k} \quad (I)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

differenciálrendszert n ismeretlennel, szintén lineáris differenciálrendszerre $n-1$ ismeretlennel lehet visszavezetni, ha az (I)-nek egy particularis integrálrendszere

$$y_{11}, \dots, y_{1n}$$

¹ Ugyanazon okoskodás alkalmazásával, a mely szerint kimutatják, hogy asymptoticus sort szabad tagonként integrálni és convergens sorba behelyettesíteni. (V. ö. POINCARÉ l. c., BOREL, Leçons sur les séries div.)

ismeretes.¹ Tegyük ugyanis az (I)-ben

$$y_k = y_{1k} \cdot \eta_k,$$

akkor

$$y_{1k} \frac{dy_k}{dx} + \frac{dy_{1k}}{dx} \eta_k = \sum_{\lambda} y_{1\lambda} \eta_{\lambda} a_{\lambda k},$$

és tekintettel arra, hogy

$$\frac{dy_{1k}}{dx} = \sum_{\lambda} y_{1\lambda} a_{\lambda k}$$

lesz

$$y_{1k} \frac{d\eta_k}{dx} = \sum_{\lambda} y_{1\lambda} \eta_{\lambda} a_{\lambda k} - \sum_{\lambda} \eta_k y_{1\lambda} a_{\lambda k},$$

vagy

$$\frac{d\eta_k}{dx} = \sum_{\lambda \neq k} \frac{y_{1\lambda}}{y_{1k}} \eta_{\lambda} a_{\lambda k} - \eta_k \sum_{\lambda \neq k} \frac{y_{1\lambda}}{y_{1k}} a_{\lambda k}.$$

(k=1, 2, ..., n)

E rendszernek egy integrárendszerre $\eta_k=1$, a mi abban nyilvánul, hogy minden egyenletben a baloldal coefficientseinek az összege zéró. Tegyük

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{1\lambda}}{y_{1k}} a_{\lambda k} = f_{\lambda k}, \quad (\lambda \neq k) \quad & - \sum_{\lambda \neq k} \frac{y_{1\lambda}}{y_{1k}} a_{\lambda k} = f_{kk}, \\ f_{1k} + f_{2k} + \dots + f_{nk} = 0, \\ \eta_k - \eta_1 = u_k, \quad & (k=2, 3, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad \text{(II)}$$

akkor

$$\frac{d\eta_1}{dx} = f_{21} u_2 + \dots + f_{n1} u_n, \quad \text{(III)}$$

$$\frac{du_k}{dx} = (f_{2k} - f_{21}) u_2 + \dots + (f_{nk} - f_{n1}) u_n. \quad \text{(IV)}$$

(k=2, 3, ..., n)

Ha ismeretes a (IV) differenciárendszernek egy integrárendszerre

$$u_2, \dots, u_n,$$

akkor a (III) szerint

¹ Lásd például KOENIGSBERGER, Lehrbuch der Differentialgleichungen (1889), p. 122; SAUVAGE, Annales de la Faculté de Toulouse VIII, IX, 1895, p. 17.

$$\eta_1 = \int (f_{21}u_2 + \dots + f_{n1}u_n) dx,$$

azaz (II) szerint

$$\eta_n = \int \sum_{\lambda=2}^n \frac{y_{1\lambda}}{y_{11}} a_{\lambda 1} u_\lambda dx$$

és

$$\eta_k = u_k + \eta_1, \\ (k=2, 3, \dots, n)$$

úgy hogy az (I) rendszernek egy integrálrendszerét az

$$y_k = y_{1k} \left(u_k + \int \sum_{\lambda=2}^n \frac{y_{1\lambda}}{y_{11}} a_{\lambda 1} u_\lambda dx \right) \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

alakban kapjuk, hol $u_1=0$.

*

Ez eljárást most az (1) differenciárendszer reductiójára fogjuk fölhasználni, ismeretes integrálrendszerként választva az (58) kifejezésekkel előállított y_{1k} ($k=1, 2, \dots, n$) függvényeket.

A számítás egyszerűsítése céljából azonban nem az (1), hanem a transformált (1a) rendszerrel (p. 643) dolgozunk.

E rendszerre nézve ismeretes a

$$z_{1k} = e^{a_1 x} x^{c_1} \left(\partial_{1k} + \frac{c_{1k}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{c_{1k}^{(p)}}{x^p} + \frac{C_{1k}}{x^p} \right)$$

alakú y_{1k} -nak megfelelő integrálrendszer, a hol

$$\lim C_{1k} = 0$$

és azonkívül (38a), (38b) szerint

$$\rho_1 = b_{11}^{(1)}, \quad c_{1k}^{(1)} = \frac{b_{1k}^{(1)}}{a_1 - a_k} \\ (k > 1)$$

Tegyük tehát

$$u_k = \frac{z_k}{z_{1k}} - \frac{z_1}{z_{11}}, \\ (k=2, 3, \dots, n) \quad (60)$$

akkor az u_k -kat értelmező differenciárendszer

$$\frac{du_k}{dx} = B_{2k}u_2 + \dots + B_{nk}u_n, \quad (61)$$

($k=2, 3, \dots, n$)

a hol tekintettel a (II), (IV) egyenletekre és az (1a) differenciálrendszer coefficienseinek az alakjára:

$$B_{\lambda k} = f_{\lambda k} - f_{\lambda 1},$$

($\lambda, k=2, 3, \dots, n$)

$$\begin{aligned} f_{\lambda k} &= \frac{z_{1\lambda}}{z_{1k}} \left(\delta_{\lambda k} a_k + \frac{1}{x} b_{\lambda k}^{(1)} + \dots \right) = \\ &= \frac{\delta_{1\lambda} + \frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \dots}{\delta_{1k} + \frac{c_{1k}^{(1)}}{x} + \dots} \left(\delta_{\lambda k} a_k + \frac{1}{x} b_{\lambda k}^{(1)} + \dots \right), \\ &\quad \cdot (\lambda \neq k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{kk} &= - \sum_{\lambda \neq k} \frac{z_{1\lambda}}{z_{1k}} (\delta_{\lambda k} a_k + \dots) = \\ &= - \sum_{\lambda \neq k} \frac{\delta_{1\lambda} + \frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \dots}{\delta_{1k} + \frac{c_{1k}^{(1)}}{x} + \dots} \left(\delta_{\lambda k} a_k + \frac{1}{x} b_{\lambda k}^{(1)} + \dots \right), \end{aligned}$$

tehát:

$$f_{\lambda k} = \frac{c_{1\lambda}^{(1)} + \dots}{c_{1k}^{(1)} + \dots} \frac{1}{x} (b_{\lambda k}^{(1)} + \dots),$$

($\lambda, k=2, 3, \dots, n; \lambda \neq k$)

$$f_{\lambda 1} = \frac{\frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \dots}{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \dots} \frac{1}{x} (b_{\lambda 1}^{(1)} + \dots),$$

($\lambda=2, 3, \dots, n$)

$$f_{kk} = - \frac{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \dots}{\frac{c_{1k}^{(1)}}{x} + \dots} \left(\frac{1}{x} b_{1k}^{(1)} + \dots \right) = - \frac{b_{1k}^{(1)}}{c_{1k}^{(1)}} + \frac{1}{x} (\dots),$$

($k=2, \dots, n$)

és tekintettel a (53a)-ra (p. 650)

$$f_{kk} = a_k - a_1 + \frac{1}{x} (\dots) \\ (k=2, \dots, n)$$

A (61) differenciálrendszernek tehát ez az alakja van:

$$\frac{du_k}{dx} = (a_k - a_1) u_k + \sum_{\lambda=2}^n u_\lambda T_{\lambda k}, \quad (61a) \\ (k=2, \dots, n)$$

a hol a $T_{\lambda k}$ az $\frac{1}{x}$ -nek hatványai szerint haladó sorok, melyek $x=\infty$ -ben eltűnnek.

Mindenekelőtt azt akarjuk bebizonyítani, hogy az (1a) rendszernek nem csak az a_1 -hez tartozó z_{1k} integrálrendszere van, hanem, hogy hasonlóképen a_2, \dots, a_n -hez tartozó integrálrendszerek is léteznek,

$$z_{ik} = e^{\alpha_i x} x^{q_i} \left(\delta_{ik} + \frac{c_{ik}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{c_{ik}^{(p)}}{x^p} + \frac{C_{ik}}{x^p} \right), \\ (i=2, \dots, n)$$

a hol (határozott p -re)

$$\lim C_{ik} = 0.$$

Teljes inductiót alkalmazunk; föltéve, hogy állításunk helyes $n-1$ ismeretlent tartalmazó differenciálrendszerre, kimutatjuk, hogy n ismeretlent tartalmazó rendszerre is áll. Nyilvánvaló, hogy $n=1$ -re a tétel igaz; t. i. ha

$$\frac{dz}{dx} = \left(\alpha + \frac{b^{(1)}}{x} + \frac{b^{(2)}}{x^2} + \dots \right) z, \quad (62)$$

akkor

$$z = e^{\int \left(\alpha + \frac{b^{(1)}}{x} + \dots \right) dx} = e^{\alpha x} x^{b^{(1)}} \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots \right),$$

föltéve, hogy a (62)-ben szereplő sor $x=\infty$ környezetében convergens; ha c sor pedig csak asymptoticus, tehát

$$\frac{dz}{dx} = \left(\alpha + \frac{b^{(1)}}{x} + \dots + \frac{b_{p+1}}{x^{p+1}} + \frac{B}{x^{p+1}} \right) z, \quad \lim B=0$$

akkor

$$z = e^{\alpha x} x^{b^{(1)}} \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_p}{x^p} + \frac{C_p}{x^p} \right). \quad \lim C_p=0$$

A föltevés szerint $n-1$ -re, tehát a (61a) differenciálrendszerre áll a tétel, léteznek tehát ily alakú integrálrendszerek

$$u_{ik} = e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \left(\delta_k + \frac{g_{ik}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{g_{ik}^{(p)}}{x^p} + \frac{G_{ik}}{x^p} \right),$$

$$\lim_{(i=2, 3, \dots, n)} G_{ik} = 0,$$

Ezekről az (V) képletek révén áttérhetünk az (1a) rendszernek $n-1$ integrálrendszeréhez:

$$z_{ik} = z_{1k} \left(u_{ik} + \int_{\infty}^x \sum_{\lambda=2}^n \frac{z_{1\lambda}}{z_{11}} \left(\delta_{\lambda 1} + \frac{b_{\lambda 1}^{(1)}}{x} + \dots \right) u_{i\lambda} dx \right)$$

képletekkel. Számítsuk ki a zárójelben szereplő integrált!

Az integráljel alatt szereplő összeg ily alakú:

$$e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \sum_{\lambda=2}^n \frac{\delta_{1\lambda} + \frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \dots}{\delta_{11} + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \dots} \left(\delta_{\lambda 1} + \frac{b_{\lambda 1}^{(1)}}{x} + \dots \right) \left(\delta_{i\lambda} + \frac{g_{i\lambda}^{(1)}}{x} + \dots \right),$$

a hol a pontokkal megjelölt sorok $\frac{1}{x^p}$ -vel megszakadnak és még egy $\frac{\varepsilon}{x^p}$ alakú maradéktaggal bírnak, a hol $\lim \varepsilon = 0$. A kijelölt szorzásokat és osztásokat elvégezve s tekintetbe véve, hogy

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0, \quad \delta_{11} = 1$$

kapunk az integráljel alatt

$$e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \left(\frac{g_i^{(2)}}{x^2} + \dots + \frac{g_i^{(p)}}{x^p} + \frac{G_i}{x^p} \right), \quad (63)$$

a hol

$$\lim G_i = 0, \quad \text{sőt} \quad \lim x G_i = 0.$$

Ha a

$$d(e^{\beta x} x^{\sigma - \nu}) = \left(\beta + \frac{\sigma - \nu}{x} \right) e^{\beta x} x^{\sigma - \nu} dx$$

egyenletet ∞ -től x -ig integráljuk, kapjuk, hogy

$$\beta \int_{\infty}^x e^{\beta x} x^{\sigma - \nu} dx + (\sigma - \nu) \int_{\infty}^x e^{\beta x} x^{\sigma - \nu - 1} dx = e^{\beta x} x^{\sigma - \nu};$$

ezen képlet segítségével kifejezhetjük a

$$\int_{\infty}^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \frac{g_i^{(v)}}{x^v} dx$$

($v=2, 3, \dots, p$)

alakú integrálokat

$$\int_{\infty}^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i - p - 1} dx.$$

szel. A (63) kifejezés ∞ -tól x -ig vett integrálja tehát így alakul

$$e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \left(\frac{h_i^{(2)}}{x^2} + \dots + \frac{h_i^{(p)}}{x^p} \right) + h \int_{\infty}^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i - p - 1} dx + \\ + \int_{\infty}^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i - p} G_i dx,$$

a hol h állandó; vagy ha

$$\tau_i = G_i x + h,$$

a mely τ_i limese mindenesetre véges, úgy:

$$e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \left(\frac{h_i^{(2)}}{x^2} + \dots + \frac{h_i^{(p)}}{x^p} \right) + \int_{\infty}^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i - p - 1} \tau_i(x) dx. \quad (64)$$

Tegyük

$$H_i = e^{-(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{-\sigma_i + p} \int_{\infty}^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)\xi} \xi^{\sigma_i - p - 1} \tau_i(\xi) d\xi,$$

akkor könnyű lesz kimutatni, hogy $\lim H_i = 0$. Tegyük ugyanis

$$\xi = x + \eta = x \left(1 + \frac{\eta}{x} \right),$$

akkor

$$H_i = - \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{(\alpha_i - \alpha_1)\eta} \left(1 + \frac{\eta}{x} \right)^{\sigma_i - p - 1} \tau_i(x + \eta) d\eta.$$

Az η pozitív, x -et nagyobbak vehetjük az 1-nél, akkor

$$|\sigma_i - p - 1| \log \left(1 + \frac{\eta}{x} \right) \leq M \log(1 + \eta), \quad M > 0.$$

Ha x elegendő nagy, akkor $\tau_i(x)$ és így a potiori $\tau_i(x + \eta)$

abszolút értéke kisebb, mint egy véges g mennyiség, lesz tehát

$$|H_i| \leq \frac{g}{x} \int_0^\infty e^{\Re(\alpha_i - \alpha_1)\eta + M \log(1+\eta)} d\eta.$$

Az integrál convergens, tehát $\lim H_i = 0$, $q. e. d.$

A mi integrálunk (p. 659 a zárójelben szereplő integrál z_{ik} kifejezésében) tehát ilyen alakú:

$$e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \left(\frac{k_i^{(2)}}{x^2} + \dots + \frac{k_i^{(p)}}{x^p} + \frac{K_i}{x^p} \right),$$

$$\lim K_i = 0,$$

úgy hogy végre

$$z_{ik} = e^{\alpha_i x} x^{\rho_i} \left(\delta_{ik} + \frac{c_{ik}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{c_{ik}^{(p)}}{x^p} + \frac{C_i}{x^p} \right),$$

$$\lim C_{ik} = 0. \quad q. e. d.$$

Áttérve most az (1) differenciálrendszerhez, ki van mutatva, hogy tetszésszerű, de rögzített pozitív egész számú p mellett létezik n integrálrendszer:

$$y_{ik} = e^{\alpha_i x} x^{\rho_i} \left(e_{ik}^{(0)} + \frac{e_{ik}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{e_{ik}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{ik}}{x^p} \right)$$

$$(i, k=1, 2, \dots, n)$$

$$\lim E_{ik} = 0. \quad (63)$$

Ezekről mindenekelőtt kimutatjuk, hogy integrálmatrixot alkotnak.

Ha a differenciálrendszer segélyével (v. ö. p. 652) megalkotjuk a

$$\frac{d \log y_{ik}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n \left(a_{\lambda k}^{(0)} \frac{y_{i\lambda}}{y_{ik}} + P_{\lambda k} \frac{y_{i\lambda}}{y_{ik}} \right)$$

kifejezéseket, akkor nyilvánvaló, hogy

$$\frac{d \log y_{ik}}{dx} = \frac{1}{e_{ik}^{(0)} + \dots} \sum_{\lambda} (e_{i\lambda}^{(0)} + \dots) (\alpha_{\lambda k}^{(0)} + \dots)$$

és mivel (p. 644)

$$(e_{ik}^{(0)}) = (\alpha_{ik}),$$

továbbá a (35) szerint (p. 642)

$$(e_{ik}^{(0)})(a_{ik}^{(0)}) = (\alpha_i e_{ik}^{(0)})$$

következik, hogy ha $e_{ik}^{(0)} \neq 0$:¹

$$\frac{d \log y_{ik}}{dx} = a_i + \frac{\sigma_{ik}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{\sigma_{ik}^{(p)}}{x^p} + \frac{\Sigma_{ik}}{x^p},$$

$$\lim \Sigma_{ik} = 0.$$

E szerint

$$\lim_{d.r} \frac{d \log y_{ik}}{dx} = a_i, \quad \text{ha } e_{ik}^{(0)} \neq 0 \quad (64)$$

a (63) szerint pedig

$$y_{ik} = e_{ik}^{(0)} x^{q_i} e^{a_i x + \varepsilon_{ik}}, \quad (65)$$

a hol

$$\lim \varepsilon_{ik} = 0.$$

Tegyük föl, hogy létezik egy

$$C_1 y_{1k} + C_2 y_{2k} + \dots + C_n y_{nk} = 0 \quad (66)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

alakú relatió, melynek coefficiensei C_1, \dots, C_n állandók. Szorozzunk $x^{-\varepsilon_1} e^{-a_1 x}$ -szel, akkor lesz tekintettel a (65)-re

$$C_1 e_{1k}^{(0)} e^{\varepsilon_{1k}} + \sum_{i=2}^n C_i e_{ik}^{(0)} e^{(a_i - a_1)x} x^{q_i - q_1} e^{\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{1k}} = 0.$$

Növesszük az x -et a ∞ -be, akkor lévén

$$\Re(a_i - a_1) < 0, \quad (i=2, \dots, n)$$

lesz

$$C_1 e_{1k}^{(0)} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

¹ Megjegyzendő, hogy a következtetés e föltevés nélkül is áll, (v. ö. p. 652 jegyzet), ha t. i. $e_{ik}^{(0)} = 0$, akkor $\sum_{\lambda} e_{ik}^{(0)} a_{ik}^{(0)}$ is zéró.

² Ha $e_{ik}^{(0)} = 0$, akkor az illető y_{ik} -ban egyszerűen a q_i kitevő módosul; a további következtetésekre ez nincs befolyással. Egyszerűség kedvéért azt is föl lehet tételni, hogy az összes $e_{ik}^{(0)}$ -k zérótól különbözők, ami ha közvetlenül nem áll, lineáris transzformáció alkalmazásával mindig elérhető.

de az összes $e_{1k}^{(0)}$ -k nem lehetnek zérók, mivel az $|e_{ik}^{(0)}|$ determináns zérótól különböző, kell tehát, hogy

$$C_1 = 0.$$

Így tovább következtetve, kiadódik

$$C_2 = 0, \dots, C_n = 0,$$

azaz egy (66) alakú reláció lehetetlen, úgy hogy az y_{ik} -k tényleg integrálmatrixot alkotnak. Ha tehát y_1, \dots, y_n egy tetszőleges integrárendszer, akkor

$$y_k = c_1 y_{1k} + \dots + c_n y_{nk}, \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

a hol c_1, \dots, c_n állandók. Ha e kifejezésben

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{i-1} = 0, \quad c_i \neq 0,$$

akkor a (63) szerint:

$$y_k = c_i e^{\alpha_i x} x^{q_i} \left(e_{ik}^{(0)} + \dots + \frac{e_{ik}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{ik}}{x^p} \right) + \dots + \\ + c_n e^{\alpha_n x} x^{q_n} \left(e_{nk}^{(0)} + \dots + \frac{e_{nk}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{nk}}{x^p} \right).$$

Tegyük

$$\bar{E}_{ik} = E_{ik} + \sum_{\lambda=i+1}^n c_\lambda e^{(\alpha_\lambda - \alpha_i)x} x^{q_\lambda - q_i + p} \left(e_{\lambda k}^{(0)} + \dots + \frac{e_{\lambda k}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{\lambda k}}{x^p} \right),$$

akkor tekintettel arra, hogy $\Re(\alpha_\lambda - \alpha_i) < 0$

$$\lim \bar{E}_{ik} = 0,$$

tehát

$$y_k = c_i e^{\alpha_i x} x^{q_i} \left(e_{ik}^{(0)} + \dots + \frac{e_{ik}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{ik}}{x^p} \right).$$

Most könnyen kimutathatjuk, hogy az y_{ik} -k a régebben fölállított formális sorokkal a szó szoros értelmében asymptotically vannak előállítva. Képzeldjék ugyanis, hogy egy $p' > p$ pozitív egész számra nézve fölállítottuk volna az y'_{ik} integrálmatrixot, mely

$$y'_{ik} = e^{\alpha_i x} x^{q_i} \left(e_{ik}^{(0)} + \dots + \frac{e_{ik}^{(p')}}{x^{p'}} + \frac{E'_{ik}}{x^{p'}} \right), \quad \lim E'_{ik} = 0$$

alakkal bir. Akkor az előzők szerint nyilvánvaló, hogy

$$y_{ik} = y'_{ik} + c_{i+1}y'_{i+1,k} + \dots + c_n y'_{nk}$$

és így

$$y_{ik} = e^{\alpha_i x} x^{q_i} \left(e_{ik}^{(0)} + \dots + \frac{e_{ik}^{(p')}}{x^{p'}} + \frac{E'_{ik}}{x^{p'}} \right), \quad \lim E'_{ik} = 0$$

minden tetszőleges p' -re nézve, a mivel az asymptoticus előállítás be van bizonyítva.

Eredményünk tehát ez:

Ha

$$\Re(a_1) > \Re(a_2) > \dots > \Re(a_n),$$

akkor létezik egy y_{ik} integrálmatrix, melyre nézve

$$y_{ik} \sim e^{\alpha_i x} x^{q_i} \left(e_{ik}^{(0)} + \frac{e_{ik}^{(0)}}{x} + \dots \text{ in inf.} \right)$$

és egy integrálrendszer y_1, \dots, y_k , mely

$$y_k = c_i y_{ik} + c_{i+1} y_{i+1,k} + \dots + c_n y_{nk}, \quad c_i \neq 0$$

alakban előállítható, az

$$y_k \sim c_i e^{\alpha_i x} x^{q_i} \left(e_{ik}^{(0)} + \frac{e_{ik}^{(1)}}{x} + \dots \right)$$

alakban van asymptoticusan előállítva.

Ha a (67) sorokat a differenciálrendszerünkbe behelyettesítjük, kapjuk a $\frac{dy_{ik}}{dx}$ -eknek asymptoticus előállítását, a miből tüstént következik, hogy az itt fellépő asymptoticus sorok tagonként differentiálhatók, a mi tudvalevőleg általános asymptoticus orokra nem áll.

Az itt alkalmazott módszer minden lényeges módosítás nélkül akkor is alkalmazható, ha a differenciálrendszer coefficientjei a végtelen távoli pont környezetében

$$a_{ik} = a_{ik}^{(-\tau)} x^\tau + \dots + a_{ik}^{(0)} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{x} + \dots$$

alakúak, hol τ pozitív egész szám, azaz, ha a rendszer rangja $\tau + 1$. Ez esetben a formális sorok általánosan szólva ily alakúak

$$e^{\alpha_i^{(\tau+1)} x^{\tau+1} + \dots + \alpha_i^{(1)} x} x^{\rho_i} \left(e_{ik}^{(0)} + \frac{e_{ik}^{(1)}}{x} + \dots \right),$$

a hol az $\alpha_i^{(\lambda)}$, ρ_i , $e_{ik}^{(\lambda)}$ meghatározására szolgáló képletek hasonló természetűek mint a részletesen tárgyalt $\tau=0$ esetben. Ezen úgynevezett THOMÉ-féle *normálsorok* formális meghatározása tekintetében utalhatunk E. CUNNINGHAM-nek a mult évben közzétett dolgozatára,¹ a melyben azok az esetek is tárgyalvák, a mikor a fellépő characteristicus egyenleteknek többszörös gyökei vannak.

V.

Az asymptoticus sorok alkalmazása az integráloknak mint egy parameter függvényeinek vizsgálatára.

A III. fejezetben láttuk, hogy abban az esetben, a mikor az

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda a_{\lambda k} \quad (A)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

differentiálrendszer coëfficiensei

$$a_{ik} = \mu^\tau \left(a_{ik}^{(0)} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{\mu} + \dots \right) \quad (1)$$

alakban állíthatók elő a $\mu=\infty$ -nek x -től független

$$|\mu| > R$$

környezetében, az $x=x_0$ reguláris pontban

$$r_{ik} = \mu^k \left(r_{ik}^{(0)} + \frac{r_{ik}^{(1)}}{\mu} + \dots \right) \quad (2)$$

kezdőértékekkel bíró integrálmatrix elemei

$$y_{ik} = \sum_{\nu=-\infty}^n y_{ik}^{(\nu)} \mu^\nu \quad (3)$$

alakú LAURENT-féle sorokkal vannak előállítva, a melyek az (1),

¹ Philosophical Transactions, Ser. A. Vol. 205, p. 1—35, 1905.

(2) soroknak közös convergentia-tartományán belül, a $\mu = \infty$ pont kivételével convergenssek. A (3) alatti sorokkal előállított függvényeket akarjuk most vizsgálni a $\mu = \infty$ határozatlansági hely közelében, és pedig olyképen, hogy e függvényeket asymptoticus sorokkal állítjuk elő.¹ Egyszerűség kedvéért arra az esetre szorítkozunk, a mikor $\tau = 1$, $k = 0$; aoefficiensek analitikai jellegére vonatkozó föltevéseket majd később fogjuk bevezetni.

Legyen tehát

$$a_{ik} = \mu \left(a_{ik}^{(0)} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{\mu} + \dots \right), \quad |\mu| > R \quad (1a)$$

A IV. fejezetben fölállított normálsorok mintájára képezzük az

$$y_k = e^{\mu\omega} \left(y_k^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_k^{(1)} + \dots + \text{in inf.} \right) \quad (4)$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

alakú kifejezéseket s igyekezzünk az ω , $y_k^{(0)}$, $y_k^{(1)}$, ... mennyiségeket mint az x függvényeit olyképen meghatározni, hogy a (4) kifejezések az (A) differenciálrendszert *forma szerint* kielégítsék. E kifejezéseket behelyettesítve adódik, ha $e^{\mu\omega}$ -val atosztunk

$$\begin{aligned} \frac{dy_k^{(0)}}{dx} + \frac{1}{\mu} \frac{dy_k^{(1)}}{dx} + \dots + \mu \frac{d\omega}{dx} \left(y_k^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_k^{(1)} + \dots \right) = \\ = - \sum_{\lambda=1}^n \mu \left(y_{\lambda}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{\lambda}^{(1)} + \dots \right) \left(a_{\lambda k}^{(0)} + \frac{1}{\mu} a_{\lambda k}^{(1)} + \dots \right), \end{aligned}$$

és ha ez egyenlet mindkét oldalán a μ hatványainak cooefficienseit összehasonlítjuk:

$$\frac{d\omega}{dx} y_k^{(0)} = \sum_{\lambda} y_{\lambda}^{(0)} a_{\lambda k}^{(0)}, \quad (6)$$

$$\frac{dy_k^{(0)}}{dx} + \frac{d\omega}{dx} y_k^{(1)} = \sum_{\lambda} (y_{\lambda}^{(0)} a_{\lambda k}^{(1)} + y_{\lambda}^{(1)} a_{\lambda k}^{(0)}), \quad (7)$$

$$\frac{dy_k^{(v)}}{dx} + \frac{d\omega}{dx} y_k^{(v+1)} = \sum_{\lambda} (y_{\lambda}^{(0)} a_{\lambda k}^{(v+1)} + y_{\lambda}^{(1)} a_{\lambda k}^{(v)} + \dots + y_{\lambda}^{(v+1)} a_{\lambda k}^{(0)}). \quad (8)$$

$(v=1, 2, \dots)$

¹ Az asymptoticus sorok ilyennemű alkalmazását adja HORN, Mathem. Ann. 52. kötet, egy speciális másodrendű homogén lineáris differenciál-egyenlet esetében.

A (6) egyenletet így írjuk:

$$\sum_{\lambda=1}^n y_{\lambda}^{(0)} (a_{\lambda k}^{(0)} - \partial_{\lambda k} \tilde{\omega}) = 0, \quad \tilde{\omega} = \frac{d\omega}{dx} \quad (6a)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

a mely alakból tüstént azt látjuk, hogy $\tilde{\omega}$ mint a

$$|a_{ik}^{(0)} - \partial_{ik} \tilde{\omega}| = 0 \quad (9)$$

($i, k=1, 2, \dots, n$)

egyenlet megoldása határozandó meg. E characteristicus egyenlet az ω -ra nézve elsőrendű és n -edfokú differentiális egyenlet; ha a (9) egyenlet gyökeit $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ -nel jelöljük, akkor ω számára kapjuk, hogy

$$\omega_i = \int \tilde{\omega}_i dx. \quad (10)$$

($i=1, 2, \dots, n$)

E szerint a (6a)-ból:

$$\sum_{\lambda=1}^n y_{\lambda}^{(0)} (a_{\lambda k}^{(0)} - \partial_{\lambda k} \tilde{\omega}_i) = 0 \quad (11)$$

és ezekből az egyenletekből általánosan szólva meghatározhatók az

$$y_{i1}^{(0)} : y_{i2}^{(0)} : \dots : y_{in}^{(0)} \quad (12)$$

viszonyok. Ha a (9) egyenlet diskriminánsa $\tilde{\omega}$ -ra nézve nem identice zéró, akkor az $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ -ek egymástól különbözök, és a (11) egyenleteknek eleget tevő $y_{ik}^{(0)}$ mennyiségekből alkotott determináns

$$|y_{ik}^{(0)}| \neq 0. \quad (13)$$

A következőkben föl fogjuk tételezni, hogy ez áll.

Hogy az $y_{ik}^{(0)}$ teljes meghatározását, valamint az $y_{ik}^{(1)}, y_{ik}^{(2)}, \dots$ mennyiségek kiszámítását a (6), (7), (8) képletek segítségével minél egyszerűbb módon elvégezhezzük, következőképen fogunk eljárni.

Jelölje $u_{ik}^{(0)}$ a (11) egyenleteknek egy tetszésszerű megoldását, akkor

$$(u_{ik}^{(0)}) (u_{ik}^{(0)})^{-1} = (\tilde{\omega}_i \partial_{ik}). \quad (14)$$

Tegyük már most

$$y_k = \sum_{\lambda=1}^n z_{\lambda} u_{\lambda k}^{(0)}, \quad (15)$$

akkor a z_1, \dots, z_n eleget tesz a

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n z_\lambda b_{\lambda k} \quad (B)$$

differentiálrendszernek, hol a (b_{ik}) , (a_{ik}) matrixok közt a következő vonatkozás áll:

$$(a_{ik}) = (u_{ik}^{(0)})^{-1} (b_{ik}) (u_{ik}^{(0)}) + D_x (u_{ik}^{(0)}). \quad (16)$$

E szerint tekintettel a (14)-re, a b_{ik} -k

$$b_{ik} = \mu \left(\partial_{ik} \tilde{\omega}_i + \frac{b_{ik}^{(1)}}{\mu} + \frac{b_{ik}^{(2)}}{\mu^2} + \dots \right) \quad (17)$$

alakban $|\mu| > R$ tartományban convergens sorokkal vannak előállítva, a hol

$$\begin{aligned} (b_{ik}^{(1)}) &= (u_{ik}^{(0)}) (a_{ik}^{(1)}) (u_{ik}^{(0)})^{-1} - \left(\frac{du_{ik}^{(0)}}{dx} \right) (u_{ik}^{(0)})^{-1}, \\ (b_{ik}^{(r)}) &= (u_{ik}^{(0)}) (a_{ik}^{(r)}) (u_{ik}^{(0)})^{-1}. \quad (r=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (18)$$

Tegyük mindjárt

$$z_{ik} = e^{\mu \omega_i} \left(z_{ik}^{(0)} + \frac{z_{ik}^{(1)}}{\mu} + \dots \text{in inf.} \right), \quad (19)$$

akkor a (6)-nak megfelelő egyenlet ez lesz

$$\frac{d\omega_i}{dx} z_{ik}^{(0)} = z_{ik}^{(0)} \tilde{\omega}_k, \quad (i, k=1, 2, \dots, n)$$

a miből $i=k$ -ra

$$\frac{d\omega_i}{dx} = \tilde{\omega}_i, \quad \omega_i = \int \tilde{\omega}_i dx,$$

míg $i \neq k$ -ra

$$z_{ik}^{(0)} = 0; \quad (20)$$

a (7), (8)-nak megfelelő egyenletek pedig így szólnak:

$$\frac{dz_{ik}^{(0)}}{dx} + \tilde{\omega}_i z_{ik}^{(1)} = \sum_{\lambda} (z_{i\lambda}^{(0)} b_{\lambda k}^{(1)} + z_{i\lambda}^{(1)} \partial_{\lambda k} \tilde{\omega}_\lambda), \quad (21)$$

$$\frac{dz_{ik}^{(r)}}{dx} + \tilde{\omega}_i z_{ik}^{(r+1)} = \sum_{\lambda} (z_{i\lambda}^{(0)} b_{\lambda k}^{(r+1)} + \dots + z_{i\lambda}^{(r)} b_{\lambda k}^{(1)} + z_{i\lambda}^{(r+1)} \partial_{\lambda k} \tilde{\omega}_\lambda), \quad (22)$$

($r=1, 2, \dots$)

A (21) most már $i=k$ -ra azt adja, hogy

$$\frac{dz_{ii}^{(0)}}{dx} = z_{ii}^{(0)} b_{ii}^{(1)}, \quad z_{ii}^{(0)} = c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx}, \quad (c_i = \text{const.})$$

úgy hogy tekintettel a (20)-ra

$$z_{ik}^{(0)} = \delta_{ik} c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx}, \quad (20a)$$

míg $i \neq k$ -ra

$$\tilde{\omega}_i z_{ik}^{(1)} = z_{ii}^{(0)} b_{ik}^{(1)} + \tilde{\omega}_k z_{ik}^{(1)},$$

tehát

$$z_{ik}^{(1)} = \frac{c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx} b_{ik}^{(1)}}{\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_k}, \quad (i \neq k) \quad (23)$$

Továbbá lesz a (22)-ből $\nu=1$, $i=k$ -ra

$$\frac{dz_{ii}^{(1)}}{dx} = c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx} \left[b_{ii}^{(2)} + \sum_{\lambda \neq i} \frac{b_{i\lambda}^{(1)} b_{\lambda i}^{(1)}}{\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_\lambda} \right] + z_{ii}^{(1)} b_{ii}^{(1)}, \quad (24)$$

a miből a $z_{ii}^{(1)}$ -ek quadraturák segélyével előállíthatók, s így folytatva látjuk, hogy a (19) sorokoefficiensai a (22) képletek segélyével mind quadraturák által adódnak ki.

Visszatérve az (A) differenciálrendszerhez, kapjuk a

$$y_{ik} = e^{\mu \omega_i} \left(y_{ik}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{ik}^{(1)} + \dots \text{in inf.} \right) \quad (22)$$

sorokoefficiensait tekintettel a (15) egyenletekre ily alakban

$$(y_{ik}^{(\nu)}) = (z_{ik}^{(\nu)})(u_{ik}^{(0)}),$$

tehát különösen a (20a) szerint

$$y_{ik}^{(0)} = c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx} u_{ik}^{(0)}. \quad (26)$$

Ily módon tehát sikerült, feltéve, hogy a (9) egyenlet discriminánsa nem identice zéró, az (A) differenciálrendszernek formálisan eleget tevő soroknak a matrixát meghatározni, a melyek a kívánt (4) alakkal bírnak.

E sorok természetesen általánosan szólva divergenssek.

Nem foglalkozunk azzal a magában véve érdekes és az alkalmazások szempontjából is fontos kérdéssel, vajjon mikor lehetnek a fölállított sorok convergenssek, hanem mindjárt át-
térünk annak a kimutatásához, hogy e sorok bizonyos integrál-
rendszerek asymptoticus előállítására alkalmasak a μ paraméter
nagy értékei mellett.

Az eszmék rögzítésére fölteszszük, hogy az (A) differen-
tialrendszer coefficiensei a_{ik} az x racionális függvényei, és hogy
az (1a) sorabontások coefficiensei $a_{ik}^{(0)}, a_{ik}^{(1)}, \dots$ szintén racioná-
lis függvényei az x -nek, még pedig olyképen, hogy az utóbbi
függvények polusai az a_{ik} polusai közül befoglaltatnak. A (9)
egyenlettel értelmezett $\tilde{\omega}$ akkor az x -nek algebrai függvénye;
a (10)-zel értelmezett ω_i -k pedig ABEL-féle integrálok; az $u_{ik}^{(0)}$ -k
racionális függvényei az $(x, \tilde{\omega}_i)$ -nek, vagy legalább ilyenekként
választhatók.

A (B) differentialrendszert ekkep írjuk:

$$\frac{dz_k}{dx} = \mu \tilde{\omega}_k z_k + \sum_{\lambda=1}^n Q_{\lambda k} z_\lambda, \quad Q_{\lambda k} b_{\lambda k}^{(1)} + \frac{b_{\lambda k}^{(2)}}{\mu} + \dots, \quad (Ba)$$

a hol tehát a $Q_{\lambda k}$ -k az x és μ változók függvényei, a melyekre
nézve áll, hogy

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} Q_{\lambda k} = 0. \quad (27)$$

Reguláris x ponton az oly x értéket értjük, mely nem tartozik
az (A) differentialrendszer singuláris pontjaihoz, sem pedig a (9)
egyenlet elágazó pontjaihoz. Legyen a egy ilyen x pont. Fek-
tessünk a -ból egy egyenes vonalat (x sugár) és vegyünk ezen
az oly b pontot, hogy az x sugárnak a és b közötti pontjai
(b -t bezárólag) szintén reguláris pontok legyenek. A μ para-
méter szintén egy μ sugár mentén, tehát rögzített argumen-
tummal tartson a végtelen felé. Tegyük azután

$$\mu(x-a) = \xi e^{i\theta}, \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (28)$$

úgy hogy ξ valós és pozitív változó,

$$\theta = \text{Arg } \mu + \text{Arg } (x-a)$$

pedig állandó. Az (A) , illetőleg (B) differenciálrendszer integráljai x és μ függvényei, állandó θ mellett tekinthetjük tehát emez integrálokat a ξ és μ függvényeiként. Ha x a sugarán a és b között változik, μ pedig a sugara mentén a végtelen felé tart, akkor a ξ mint pozitív valós mennyiség tart a végtelen felé, és fordítva, ha ξ mint pozitív valós mennyiség a végtelenbe nő, akkor, föltéve, hogy x a kijelölt számközön belül marad, θ pedig állandó, a μ a sugara mentén távozik a végtelenbe. Ha most a (Ba) differenciálrendszerben x helyébe a ξ -t bevezetjük új független változóként, akkor

$$\frac{dz_k}{d\xi} = e^{\theta i} \tilde{\omega}_k z_k + \sum_{\lambda=1}^n z_\lambda \cdot \frac{1}{\mu} e^{\theta i} Q_{\lambda k}, \quad (29)$$

és (27) szerint

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} Q_{\lambda k} \frac{1}{\mu} e^{\theta i} = 0. \quad (30)$$

Legyen a b pont akkép választva, hogy az x sugár a és b közötti intervallumán belül az $\tilde{\omega}_k e^{\theta i}$ mennyiségek valós részei mind egymástól különbözők,¹ és képzeljük a jelölést úgy választva, hogy eme intervallumban

$$\Re(\tilde{\omega}_1 e^{\theta i}) > \Re(\tilde{\omega}_2 e^{\theta i}) > \dots > \Re(\tilde{\omega}_n e^{\theta i}); \quad (31)$$

akkor

$$\Re(\tilde{\omega}_k e^{\theta i} - \tilde{\omega}_1 e^{\theta i}) < 0, \quad (k=2, \dots, n)$$

kijelölhető tehát az oly x és μ -től független ρ mennyiség, mely valós és negatív, és melyre nézve

$$0 > \rho \geq \Re(\tilde{\omega}_k e^{\theta i} - \tilde{\omega}_1 e^{\theta i}), \quad (k=2, \dots, n)$$

A (29)-ből adódik:

$$\begin{aligned} \frac{d \log \frac{z_k}{z_1}}{d\xi} &= e^{\theta i} (\tilde{\omega}_k - \tilde{\omega}_1) + \\ &+ \frac{1}{\mu} e^{\theta i} \left(Q_{kk} - Q_{11} + \sum_{\lambda=k}^n Q_{\lambda k} \frac{z_\lambda}{z_k} - \sum_{\lambda=1}^n Q_{\lambda 1} \frac{z_\lambda}{z_1} \right), \end{aligned}$$

(k=2, ..., n)

¹ Tetszőleges θ -ra nézve ez mindig be fog következni, ha a és b között nem fekszik az $\tilde{\omega}$ algebrai függvény elágazó pontja, azaz, hogy eme intervallumon belül az $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ -ek mindig egymástól különbözők.

úgy hogy a szóban forgó tartományon belül

$$\frac{d \log \left| \frac{z_k}{z_1} \right|}{d\xi} < \rho + 2\delta + 2(n-1)\delta \frac{1}{\varepsilon}, \quad (33)$$

ha a δ és ε számok olyanok, hogy

$$\left| \frac{1}{\mu} e^{\theta i} Q_{\lambda \nu} \right| < \delta, \quad \left| \frac{z_\lambda}{z_k} \right|_{\lambda \neq k} < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \left| \frac{z_\lambda}{z_1} \right|_{\lambda > 1} < \frac{1}{\varepsilon}. \quad (34)$$

A (30) szerint nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \delta = 0. \quad (35)$$

Legyen g egy elegendő kis pozitív mennyiség, és határozzuk meg az ε -t olyképen, hogy

$$\rho + 2\delta + 2(n-1)\delta \frac{1}{\varepsilon} = -g, \quad (36)$$

akkor, ha g elegendő kicsiny, az így kiadódó ε pozitív, és

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Ha egy bizonyos ξ -re áll, hogy

$$\varepsilon < \left| \frac{z_k}{z_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon}, \quad (k=2, \dots, n) \quad (37)$$

akkor a POINCARÉ-féle lemma szerint ¹

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{z_k}{z_1} = 0. \quad (38)$$

($k=2, \dots, n$)

Ilyen z_1, \dots, z_n integrálok tehát mindig léteznek. Ha a (37) feltétel egyik ξ értékre sem teljesül, akkor minden ξ -re nézve vagy:

$$\left| \frac{z_k}{z_1} \right| < \varepsilon,$$

¹ Lásd III. fejezet, p. 648 s köv.

azaz — mivel ε a végtelenbe növekedő ξ -vel a zéró felé tart —

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{z_k}{z_1} = 0,$$

vagy pedig

$$\left| \frac{z_k}{z_1} \right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

azaz

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{z}_k}{z_1} = \infty. \quad (39)$$

Mondhatjuk tehát, hogy a (Ba) differenciálrendszernek mindig létezik az oly z_1, \dots, z_n integrálrendszere, a melyre nézve

$$\lim_{(k=2, \dots, n)} \frac{\tilde{z}_k}{z_1} = 0,$$

a hol a «lim»-jel azt jelenti, hogy «limes, ha μ a számára kijelölt sugár mentén a végtelenbe nő», x pedig a maga sugarának a és b közötti intervallumán belül marad.

A $\frac{z_k}{z_1} = \zeta_k$ ($k=2, \dots, n$) hányadosok a következő differenciálrendszernek tesznek eleget

$$\frac{d\zeta_k}{dx} + \zeta_k \sum_{\lambda=1}^n Q_{\lambda 1} \zeta_\lambda = \zeta_k \mu (\tilde{\omega}_k - \tilde{\omega}_1) + \sum_{\lambda=1}^n (Q_{\lambda k} - \delta_{\lambda k} Q_{11}) \zeta_\lambda + Q_{1k}, \quad (C)$$

az ilyen alakú rendszernek tehát mindig létezik oly megoldási rendszere, mely a mondott módon végtelenbe növekedő μ -re nézve eltűnik, ha x a többször említett intervallumon belül marad, és ha a (27) egyenletek, valamint a (31) egyenlőtlenségek teljesülnek.

A (B) rendszert formálisan kielégítő (19)-féle sorokból $i=1$ mellett kiadódnak a

$$\frac{z_{1k}}{z_{11}} = \frac{\frac{1}{\mu} z_{1k}^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} z_{1k}^{(2)} + \dots}{c_1 e^{\int b_{11}^{(1)} dx} + \frac{1}{\mu} z_{11}^{(1)} + \dots} = \frac{1}{\mu} \zeta_k^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} \zeta_k^{(2)} + \dots \text{ in inf.} \quad (40)$$

($k=2, \dots, n$)

alakú sorok, a melyek a (C) differenciálrendszert forma szerint kielégítik. Ha a (C)-be ζ_2, \dots, ζ_n helyébe a

$$\zeta_k = \frac{1}{\mu} \zeta_k^{(1)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} \zeta_k^{(p)} + \frac{Z_k}{\mu^p} \quad (41)$$

kifejezéseket teszszük,¹ a hol p egy rögzített pozitív egész számot jelent, akkor az x és μ -nek ismeretlen Z_k függvényei számára adódik egy (C)-hez hasonló alakú differenciálrendszer, a melyben csak a $Q_{\lambda k}$ -k helyeibe más függvények léptek, a melyek azonban szintén azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy $\frac{1}{\mu}$ -vel szorozva $\mu = \infty$ -re eltűnnek. E rendszernek van tehát oly integrálrendszere, mely eltűnik, ha μ a sugara mentén a végtelenbe nő, a miből viszont az következik, hogy a (C) rendszernek létezik oly (41) alakú integrálrendszere, a melyre nézve:

$$\lim Z_k = 0.$$

Már most (B) szerint

$$\frac{d \log z_k}{dx} = \mu \tilde{\omega}_k + \sum_{\lambda=1}^n \frac{z_\lambda}{z_k} Q_{\lambda k} = \mu \tilde{\omega}_k + Q_{kk} + \sum_{\lambda=k}^n \frac{\zeta_\lambda}{\zeta_k} Q_{\lambda k},$$

($k=1, 2, \dots, n$; $\zeta_1=1$)

ha ezekbe az egyenletekbe a ζ_2, \dots, ζ_n helyébe a (41) kifejezéseket beleteszszük, akkor tekintettel arra, hogy (40) szerint

$$\zeta_k^{(1)} = \frac{z_{1k}^{(1)}}{c_1 e^{\int b_{11}^{(1)} dx}},$$

($k=2, \dots, n$)

tehát (23) szerint

$$\zeta_k^{(1)} = \frac{b_{1k}^{(1)}}{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_k},$$

($k=2, \dots, n$)

¹ Az a mód, a mely szerint itt a POINCARÉ-féle Lemmát fölhasználjuk, ahhoz csatlakozik, a mely szerint HORN, Acta Math. t. 24, e Lemmát az $x=\infty$ -re szóló asymptoticus előállítás kimutatására használja.

kapjuk, hogy

$$\frac{d \log z_k}{dx} = \mu \left(\tilde{\omega}_1 + \frac{\gamma_k^{(1)}}{\mu} + \dots + \frac{\gamma_k^{(p)}}{\mu^p} + \frac{H_k}{\mu^p} \right),$$

$$\lim_{(k=1, 2, \dots, n)} H_k = 0,$$

úgy hogy a (B) rendszernek ily alakú integrárendszerét kapjuk :

$$z_{1k} = e^{\mu \omega_1} \left(z_{1k}^{(0)} + \frac{z_{1k}^{(1)}}{\mu} + \dots + \frac{z_{1k}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Z_{1k}}{\mu^p} \right),$$

$$\lim_{(k=1, 2, \dots, n)} Z_{1k} = 0,$$
(42)

a mi ismét az (A) rendszerre nézve az

$$y_{1k} = e^{\mu \omega_1} \left(y_{1k}^{(0)} + \frac{y_{1k}^{(1)}}{\mu} + \dots + \frac{y_{1k}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Y_{1k}}{\mu^p} \right),$$

$$\lim_{(k=1, 2, \dots, n)} Y_{1k} = 0$$
(43)

integrárendszer létezését vonja maga után.

Ezen integrárendszer fölhasználásával redukáljuk az (A) differenciárendszer $(n-1)$ ismeretlennel bíró hasonló természetű differenciárendszerre és így teljes inductió alkalmazásával következtetünk az (A) differenciárendszer n integrárendszerének az existenciájára, a melyek így állíthatók elő

$$y_{ik} = e^{\mu \omega_i} \left(y_{ik}^{(0)} + \dots + \frac{y_{ik}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Y_{ik}}{\mu^p} \right),$$

$$\lim_{(i, k=1, 2, \dots, n)} Y_{ik} = 0.$$
(44)

Az ω_i , valamint az $y_{ik}^{(\lambda)}$ ($\lambda=0, 1, 2, \dots, p$) mennyiségekben még bizonyos tetszésszerű integrációs állandók szerepelnek. Ezekre nézve állapodjunk meg a következőkben :

Legyen $x=x_0$ egy tetszőleges az x sugaron a és b között fekvő érték, akkor

$$\omega_i = \int_{x_0}^x \tilde{\omega}_i dx.$$
(45)

Ha tehát az integrálba, mely természetesen az x sugar mentén

veendő, a (28) egyenlet segítségével a ξ -t mint integrációs változót bevezetjük, akkor

$$\mu\omega_i = \int_{\xi_0}^{\xi} \tilde{\omega}_i e^{\theta \sqrt{-1}} d\xi, \quad \xi_0 = \mu(x_0 - a) e^{-\theta \sqrt{-1}}$$

tehát, ha $\xi > \xi_0$, azaz

$$|x - a| > |x_0 - a|, \quad (46)$$

lesz a (31) egyenlőtlenségek szerint:

$$\Re(\mu\omega_1) > \Re(\mu\omega_2) > \dots > \Re(\mu\omega_n). \quad (47)$$

Ha például az x_0 pontot magába az a -ba helyezzük, akkor a (47) egyenlőtlenségek az $(a \dots b)$ intervallum minden pontjára nézve állanak.

Az $y_{ik}^{(\lambda)}$ ($\lambda = 0, 1, \dots, p$) mennyiségekben szereplő integrációs állandókat valami tetszésszerinti, de határozott módon képzeljük megválasztva, például (26) szerint

$$y_{ik}^{(0)} = e^{x_0} \int^x b_{ii}^{(1)} dx \quad u_{ik}^{(0)}, \quad (26a)$$

stb.

Egyébként jegyezzük meg, hogy, ha ez állandók ily határozott módon vannak megválasztva, az (y_{ik}) -k *integrálmatrixot* alkotnak. Ugyanis áll, hogy eme integrálrendszerek determinánsa

$$|y_{ik}| = \Gamma \cdot e^{x_0} \int_{k=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kk} dx, \quad (48)$$

($i, k = 1, 2, \dots, n$)

a hol Γ egy x -től független mennyiség. Tekintettel arra, hogy

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_k = \sum_{k=1}^n a_{kk}^{(0)} \quad (49)$$

következik a (48)-ból:

$$\left| y_{ik}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{ik}^{(1)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} y_{ik} \right| = \Gamma \cdot e^{\sum_k \int_{x_0}^x a_{kk}^{(1)} dx + \frac{1}{\mu} \sum_k \int_{x_0}^x a_{kk}^{(2)} dx + \dots} \quad (50)$$

tehát ha μ -t a többször részletezett módon a végtelenbe növesztjük

$$|y_{ik}^{(0)}| = \lim \Gamma \cdot e^{\frac{x}{\mu}} \int_{x_0}^x a_{kk}^{(1)} dx.$$

De ebből, tekintettel arra, hogy $|y_{ik}^{(0)}|$ nem identice zéró, azt látjuk, hogy $\lim \Gamma \neq 0$, úgy hogy Γ maga ¹ is zérótól különböző (azaz μ -ben nem identice zéró).

Hogy arra nézve tájékozódjunk, vajjon mikép függnek az

$$y_{ik}^{(\lambda)} \quad (\lambda=0, 1, \dots, p)$$

függvények az integrációs állandóktól, okoskodjunk a következőképen. Legyen

$$\bar{y}_{ik} = e^{\mu \omega_i} \left(\bar{y}_{ik}^{(0)} + \dots + \frac{\bar{y}_{ik}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{\bar{Y}_{ik}}{\mu^p} \right), \quad \lim \bar{Y}_{ik} = 0, \quad (51)$$

egy integrálrendszer, a melyben az $\bar{y}_{ik}^{(\lambda)}$ mennyiségekben az integrációs állandók *határozatlan* (de természetesen μ -től független) mennyiségek. Akkor tekintettel arra, hogy (y_{ik}) integrálmatrix, áll, hogy

$$\bar{y}_{ik} = c_1 y_{1k} + c_2 y_{2k} + \dots + c_n y_{nk}, \quad (52)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

a hol c_1, \dots, c_n az x -től független mennyiségek. Ha ezeket az (52) egyenletekből kiszámítva képzeljük, akkor adódik

$$c_\lambda = e^{\mu(\omega_i - \omega_\lambda)} \left(c_\lambda^{(0)} + \frac{c_\lambda^{(1)}}{\mu} + \dots + \frac{c_\lambda^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_\lambda}{\mu^p} \right),$$

($\lambda=1, 2, \dots, n$)

a hol $c_\lambda^{(0)}, \dots, c_\lambda^{(p)}$ a μ -től független mennyiségek, és

$$\lim C_\lambda = 0.$$

¹ Mely mennyiség az (50) szerint

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{\mu} + \dots + \frac{\Gamma_p}{\mu^p} + \frac{E}{\mu^p}$$

alakban írható, hol $\Gamma_0, \dots, \Gamma_p$ a μ -től független, $\lim E=0$.

Írjuk már most, hogy

$$\frac{dc_\lambda}{dx} = 0,$$

akkor $e^{\mu(\omega_i - \omega_\lambda)}$ -val osztva, lesz:

$$\begin{aligned} \frac{dc_\lambda^{(0)}}{dx} + \dots + \frac{dc_\lambda^{(p)}}{dx} \frac{1}{\mu^p} + \frac{dC_\lambda}{dx} \frac{1}{\mu^p} + \\ + \mu(\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_\lambda) \left(c_\lambda^{(0)} + \dots + \frac{c_\lambda^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_\lambda}{\mu^p} \right) = 0, \end{aligned}$$

tehát ha $\lambda \neq i$

$$c_\lambda^{(0)} = 0, \dots, c_\lambda^{(p)} = 0,$$

és

$$\frac{dC_\lambda}{dx} + \mu(\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_\lambda) C_\lambda = 0,$$

$$C_\lambda = \text{const. } e^{\mu(\omega_\lambda - \omega_i)},$$

míg $\lambda = i$ -re nézve

$$\frac{dc_i^{(0)}}{dx} = 0, \dots, \frac{dc_i^{(p)}}{dx} = 0, \quad \frac{dC_i}{dx} = 0,$$

azaz, hogy a $c_i^{(0)}, \dots, c_i^{(p)}$ állandók. Kapjuk tehát, hogy $\lambda \neq i$ -re

$$c_\lambda y_{\lambda k} = e^{\mu(\omega_i - \omega_\lambda)} \frac{C_\lambda}{\mu^p} e^{\mu\omega_\lambda} \left(y_{\lambda k}^{(0)} + \dots + \frac{y_{\lambda k}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Y_{\lambda k}}{\mu^p} \right),$$

úgy hogy

$$c_\lambda y_{\lambda k} = e^{\mu\omega_i} \frac{\Gamma_{\lambda k}}{\mu^p},$$

a hol

$$\Gamma_{\lambda k} = C_\lambda \left(y_{\lambda k}^{(0)} + \dots + \frac{y_{\lambda k}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Y_{\lambda k}}{\mu^p} \right),$$

tehát

$$\lim \Gamma_{\lambda k} = 0.$$

Lesz tehát

$$\begin{aligned} \bar{y}_{ik} = \left(c_i^{(0)} + \frac{c_i^{(1)}}{\mu} + \dots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_i}{\mu^p} \right) y_{ik} + e^{\mu\omega_i} \frac{\Gamma_k}{\mu^p}, \\ \lim \Gamma_k = \lim \sum_{\lambda=i} \Gamma_{\lambda k} = 0. \end{aligned}$$

E szerint lesz végre:

$$\begin{aligned}\bar{y}_{ik}^{(0)} &= y_{ik}^{(0)} c_i^{(0)}, \\ \bar{y}_{ik}^{(1)} &= y_{ik}^{(0)} c_i^{(1)} + y_{ik}^{(1)} c_i^{(0)},\end{aligned}\quad (53)$$

$$\begin{aligned}\bar{y}_{ik}^{(p)} &= y_{ik}^{(0)} c_i^{(p)} + y_{ik}^{(1)} c_i^{(p-1)} + \dots + y_{ik}^{(p)} c_i^{(0)}, \\ \bar{Y}_{ik} &= y_{ik}^{(0)} C_i + \frac{y_{ik}^{(1)}}{\mu^p} (c_i^{(p)} + C_i) + \dots + y_{ik}^{(p)} \left(\frac{c_i^{(1)}}{\mu} + \dots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_i}{\mu^p} \right) + \\ &\quad + Y_{ik} \left(c_i^{(0)} + \dots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_i}{\mu^p} \right) + \Gamma_k.\end{aligned}\quad (54)$$

Jelentse most y_1, \dots, y_n az (A) differenciálrendszernek azt az integrálrendszerét, mely az $x=x_0$ -ban az

$$y_k(x_0) := \gamma_k^{(0)} + \frac{\gamma_k^{(1)}}{\mu} + \frac{\gamma_k^{(2)}}{\mu^2} + \dots \text{ in inf.} \quad (55)$$

kezdőértékekkel bir, a hol a $\gamma_k^{(\lambda)}$ mennyiségek μ -tól független állandók, az (55) sorok pedig $|\mu| > R$ tartományon belül convergensek,¹ akkor léteznek oly c_1, \dots, c_n állandók, hogy

$$y_k = c_1 y_{1k} + \dots + c_n y_{nk}. \quad (56)$$

Ha eme állandók meghatározása céljából az (56)-ban x helyébe x_0 -t teszünk, akkor kapjuk

$$c_i = c_i^{(0)} + \frac{c_i^{(1)}}{\mu} + \dots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_i}{\mu^p},$$

a hol a $c_i^{(0)}, \dots, c_i^{(p)}$ mint μ -tól független mennyiségek az (53) egyenletek értelmében, az

$$\begin{aligned}\gamma_k^{(0)} &= \sum_{i=1}^n y_{ik}^{(0)}(x_0) \cdot c_i^{(0)}, \\ \gamma_k^{(1)} &= \sum_{i=1}^n (y_{ik}^{(0)}(x_0) c_i^{(1)} + y_{ik}^{(1)}(x_0) c_i^{(0)}), \\ &\dots \dots \dots \\ \gamma_k^{(p)} &= \sum_{i=1}^n (y_{ik}^{(0)}(x_0) c_i^{(p)} + \dots + y_{ik}^{(p)}(x_0) c_i^{(0)})\end{aligned}\quad (57)$$

¹ Megjegyzendő, hogy a következő okoskodások akkor is alkalmazhatók, ha az (55) sorok nem convergensek, hanem asymptoticusak, ha μ a sugara mentén a végtelen felé tart.

egyenletekből, még pedig tekintettel arra, hogy

$$|y_{ik}^{(0)}(x_0)| \neq 0 \\ (i, k=1, 2, \dots, n)$$

— *egyértékűleg* meghatározva kiadódznak, a még μ -tól függő C_i -kre nézve pedig áll, hogy

$$\lim C_i = 0.$$

Ha már most

$$\begin{aligned} y_{ik}^{(0)} c_i^{(0)} &= \bar{y}_{ik}^{(0)}, \\ y_{ik}^{(0)} c_i^{(1)} + y_{ik}^{(1)} c_i^{(0)} &= \bar{y}_{ik}^{(1)}, \\ &\vdots \\ y_{ik}^{(0)} c_i^{(p)} + \dots + y_{ik}^{(p)} c_i^{(0)} &= \bar{y}_{ik}^{(p)}, \end{aligned} \quad (58)$$

akkor

$$\begin{aligned} y_k &= e^{\mu\omega_1} \left(\bar{y}_{1k}^{(0)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} \bar{y}_{1k}^{(p)} \right) + \dots + e^{\mu\omega_n} \left(\bar{y}_{nk}^{(0)} + \dots + \frac{1}{\mu^p} \bar{y}_{nk}^{(p)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\mu^p} (e^{\mu\omega_1} \bar{Y}_{1k} + \dots + e^{\mu\omega_n} \bar{Y}_{nk}), \end{aligned} \quad (59)$$

•

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

a hol

$$\lim \bar{Y}_{1k} = \dots = \lim \bar{Y}_{nk} = 0.$$

Az (59) alatti előállítás p -nek minden pozitív egész számú értékére nézve áll; tekintettel a (47) alatti egyenlőtlenségekre, azt mondhatjuk tehát, hogy:

Minden integrárendszer y_1, \dots, y_n , mely $x = x_0$ -ban (55)-féle kezdőértékekkel bír, az x sugárnak ama x pontjaira nézve, a melyek x_0 és b között fekszenek és a μ sugár mentén végtelenbe növekedő μ -re asymptoticusan állítható elő, és pedig általánosan szólva (t. i. ha az (58) egyenletekből kiadódó $y_{ik}^{(v)}$ -k nem mind, azaz minden pozitív egész számú v -re identice zérók)

$$y_k \sim e^{\mu\omega_1} \left(\bar{y}_{1k}^{(0)} + \bar{y}_{1k}^{(1)} \frac{1}{\mu} + \bar{y}_{1k}^{(2)} \frac{1}{\mu^2} + \dots \text{ in inf. } \right)$$

alakban.

Az (55) kezdőértékek specziális választása mellett meg-
eshetik, hogy az (57) és (58) egyenletek segítségével meghatározott $\bar{y}_{ik}^{(v)}$ -k némelyike identice zéró; ha

$$\bar{y}_{ik}^{(v)} = 0,$$

$$(i=1, 2, \dots, \lambda-1, \quad v=0, 1, 2, \dots)$$

de az $\bar{y}_{\lambda k}^{(v)}$ -k között van olyan, mely zérótól különböző, akkor

$$y_k \sim e^{\mu\omega_\lambda} \left(\bar{y}_{\lambda k}^{(0)} + \bar{y}_{\lambda k}^{(1)} \frac{1}{\mu} + \dots \text{ in inf. } \right),$$

a hol esetleg a különböző k értékeknek különböző λ -k is felelhetnek meg.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 április 2.-án tartott üléséből.)

A CERAMI FÖLDRENGÉS.

KÖVESLIGETHY RADÓ lev. tagtól.

A M. Tudományos Akadémiának öt hónappal ezelőtt bemutatott földrengési elméletemet az 1899 szeptember 30-iki cerami földrengésen próbáltam ki. Eredményeim megérdemlik a közzétételt; egyrészt első példája seismikus megfigyeléseknek a probléma összes ismeretlen elemei szerint való kiegyenlítésének, másrészt az elmélet helyessége és a levezetett formulák kényelmes használhatósága mellett tanuskodva egész sorát vetik fel az érdekes új kérdéseknek. És különösen fontosnak tartom, hogy a mintegy húsz év óta felhalmozott megfigyelési anyag csak kellő feldolgozásra vár, hogy e kérdések némelyikére kielégítően pontos feleletet már most is kaphassunk.

A nevezett rengést azért választottam, mert az epicentrumtól jóval 140° -on túl észleltetett és mert 27, a legkülönbözőbb azimutokra oszló seismometrikus állomásról vannak ön-működően feljegyzett adataink. A legtöbb seismogrammon a rengés öt phasisa különböztethető meg és a feljegyzések számánál fogva reményem lehetett, hogy mind az öt szakaszt egymástól függetlenül külön rengés gyanánt tárgyalhatom, a mi physikai kapcsolatuk felismerését megkönnyíthetné. Választásom ellen csupán azon aggodalmam szólt, hogy a rengés eredetéhez 20° -nál közelebb eső észlelő állomásunk nem lévén, az epicentrum helye és ideje, meg a fészkek mélysége talán kevésbé megbízhatóan fogna adódni.

Az első phasist magam számítottam. Közzététele ¹ nem

¹ Determinatio elementorum seismicorum exemplo primæ terræ motus Ceramensis phaseos exhibita. Abrégé du Bulletin de la Société Hongroise de Géographie. XXIII. köt. 25--31. l.

tetszett feleslegesnek, mindenesetre azonban lehetővé teszi, hogy itt csupán az eredmények felsorolására szorítkozzam.

A többi négy phasist sorban JÁNOSY IMRE, FEJES ZSIGMOND, SZÜCS ADOLF, dr. TERKÁN LAJOS urak voltak szivesek kiszámítani. Ez eredményeinkről a következőkben mint első kiegyenlítésről fogok szólni.

Dr. JORDAN KÁROLY értekezésem bemutatása után csakhamar kimutatta a III. phasisra, hogy a hibaegyenlet épen nem tekinthető lineárisnak. a mennyiben a keresett javítások második és magasabb hatványainak elhanyagolása folytán, az eredeti egyenletekbe téve a seismikus ephemeridát, teljesen rontják. Ugyanazt találtuk természetesen a többi phasisra is.

Nem volt nehéz kitalálni, hogy a q -val jelölt állandó teljes ismeretlensége okozta a bajt, a mely azután az észlelt idők előállítását nagyon érzékenyen befolyásoló ν és t_e elemekre is kihat. Módokat kerestem tehát, hogy a hibaegyenlet számára, a mely lényegben a seismikus alapegyenlet TAYLOR-féle sorfejtésének kezdőtagja, már előzetesen oly közelítést találjak, a mely mellett az ismeretlenek első hatványaival beérhessem. Az alább röviden vázolandó módszer tetemesen javított a dolgon, de a kívánt czélt még mindig nem értem el.

Végre sikerült a q elem helyébe oly új K változót behozni, a mely a hibaegyenletet a fészek mélységével egyenrendű mennyiségig. tehát mintegy egy százalékig szigorúan lineárisá tette és ily módon az I., II. és V. phasis azonnal kifogástalannul volt tárgyalható. A III. és IV. phasis azonban még mindig nem elégítette ki a linearitás kriteriumát; a hibaegyenlet alapján számított «hátramaradó hibák» teljesen eltértek azoktól, a melyeket a javított elemekkel újra számolt ephemerida adott.

Minthogy az előbbi három phasis terjedéssébsége másodpercenként 2 kilométernél jóval nagyobb, az utóbbi kettőé ellenben ehhez közel jár vagy nála kisebb, nem lehetett már kétség az iránt, hogy a differentiationál ν -ben elhanyagolt másodrendű tagok az eltérés okai.

A seismikus alapegyenlet alakja megengedte végre, hogy a sebességjavításban másodrendű tagok szigorúan tekintetbe vétessenek, azaz, hogy az elemek javítására szolgáló differen-

tiálegyenletet véges differentiákra is érvényes egyenlettel helyettesítsem. Sőt a hibaegyenletek megoldását sem kellett ismételnünk, csak a már nyert megoldásokat kissé másképen értelmeznünk. Most a linearitás kriteriuma, a hátramaradó hibák négyzetösszegének azonossága, akár a hibaegyenletből számítassák, akár a javított elemekkel az eredeti egyenletből, mind az öt phasisra vonatkozólag teljesen vág és a következő számításoknál elesik egyszersmind az előzetes közelítő megoldás szükségessége.

A második kiegyenlítésben JÁNOSY IMRE számította a II., dr. JORDAN KÁROLY a III., dr. PÉCSI ALBERT a IV. és V., magam pedig az I. és ismételten a III. phasist. Különösen terjedelmesek az I. és III. phasisra vonatkozó számolások, a melyeket a hibaegyenlet különböző alakjaival végeztünk. A másodrendű tagok felvétele után természetesen valamennyi hibaegyenlet — a mint lennie is kell — azonossá vált.

Természetes, hogy az első kiegyenlítés fogyatékosságát felismerve, értekezésem közzétételét halasztottam. Késői megjelenésének ez az oka. Értékét a halasztás tetemesen növelte, már csak azért is, mert most teljesen áttekinthetjük a nem csekély terjedelmű számolás mechanizmusát és betekintést engedhetünk másoknak is.

Sietek megjegyezni, hogy az első kiegyenlítés a felsoroltam sok hiba ellenére nem elvetendően hamis. A javításoknak relativ értékeit és az elemeknek menetét az egyes phasisokban még a q számára is helyesen adja, noha ezen elem a helyesbítés által legjobban változott. Mindenesetre egészen alkalmas útmutatásokat adott az egyes phasisok physikai összetartozóságára vonatkozólag, úgy hogy a két kiegyenlítés tárgyalása együvé foglalható. A számértékek összehasonlítása mutatni fogja — a mire különben az illető helyen hivatkozni is fogok —, hogy következtetéseimet csak lényegtelen pontokban kellett módosítanom.

1. Az első kiegyenlítés eredményei.

Az öt phasis hibaegyenleteinek felállítására közös kiindulól az az eredményt választottam, melyet E. RUDOLPH¹ az epicentrum helye és benne a lökés ideje számára tett közzé.

$$l_0 = 128^\circ 30' \text{ E. Greenw.}; b_0 = -3^\circ 10', \\ t_e = 1899 \text{ szeptember } 30. 17^h 1^m 08 \text{ Greenw. kp. i.}$$

Amazt egyszerűen a *Ceram*-on észlelt két lökésirány metszéspontjából, emezt a legközelebbi seismometrikus állomások időadataiból állandó felszíni terjedés feltevése mellett vezette le.

Önkényesen felvettem továbbá, hogy a fészek mélysége 100 km, tehát $h = 0.0157$ rad. q értékére semmiféle tájékozásom nem volt. A hodograph inflexiópontja oly helyre esik, a honnan még megfigyeléseink nincsenek, s így tudva, hogy a rengés a fél Földön túl volt érezhető, számára $\frac{1}{2}$ -nél kisebb érték volt választandó. Találomra valamennyi phasis számára $q = 0.4$ értéket fogadtam el.

Az egyes phasisokra azután még külön fel kellettennem v értékeit. Úgy állapítottam meg azokat, hogy a hibaegyenleteket nagyjából kielégítsék, ha a többi hibát mind elhanyagoljuk. Az ily módon talált értékek az egyes szakaszokban

$$v_1 = 0.1013; \quad v_2 = 0.05960; \quad v_3 = 0.04712; \quad v_4 = 0.03377;$$

$$v_5 = 0.02738 \frac{\text{rad}}{\text{min}}.$$

Ezen hypothetikus értékekkel seismikus ephemeridát számoltam, a mely az epicentrumtól 10° -os távolságokra megadta a lökés bekövetkezésének idejét és a hibaegyenletek coefficiensait.² Minthogy h és q az összes phasisokra ugyanannak vétett, csak egyetlen egy ephemerida számítására volt szükség;

¹ Beiträge zur Geophysik. VI. köt. 238—266. l.

² Földrengési elemek számolása. Math. és Term.-tud. Ért. XXIII. köt. 44. és 59. l. 41b) és 66) egyenlet.

ebből le volt vezethető a többi phasisé, ha $t-t_e$ időadatait sorban $\frac{v_1}{v_2}, \frac{v_1}{v_3}, \dots$ hányadosokkal megszoroztuk.

Az egyes állomásokra interpolált ephemeridát összehasonlítottam most a seismogrammok leolvasásával, azaz az egyes phasisok észlelt idejével, a melyet teljesen úgy fogadtam el, a mint ezt RUDOLPH adta. Bár észlelési vagy leolvasási hibák kétségtelenül előfordulnak, változtatást nem tettem, mert ilyes első kidolgozásnál a legszigorúbb objektivitás kívánatos.

Az összehasonlítás eredménye észlelés-számolás értelemben az ephemerida Δt időhibája, mely a hibaegyenletek alapján a hypothetikus elemek javítására vezet. Az ismeretlen elemek az epicentrum földrajzi hosszúsága és szélessége, ideje, a fészek mélysége, a terjedés sebessége és a törésmutatótól meg a Földnek befelé való sűrűsödésétől függő q állandó; számuk tehát minden egyes phasisban hat.

A megfigyelő állomások számával megegyező feltételi egyenletek száma az egyes phasisokban 16, 22, 12, 10 és 16. A négyjegyű logaritmusokkal való számolás pontosságának lehető fokozása érdekében homogenekké tétettek és a legkisebb négyzetek módszere szerint megoldattak. Lépésről-lépésre a szokásos ellenőrző egyenletekkel szembeesítve, megoldásuk teljesen megbízhatónak mondható. Hogy azonban a hibaegyenletek helyes megoldása nem egyszersmind a probléma megoldása, már a bevezetésben hangoztattam.

Az alábbi táblázat megadja helykimélés végett mindjárt a második kiegyenlítés legszükségesebb elemeit is. A megfigyelő állomás mellé van írva a RUDOLPH-féle epicentrumtól számított φ gömbi távolság és α azimut, továbbá az öt phasisra egyenkint a lökés megfigyelt ideje és a Δt hiba, melyet a hypothetikus rengés-elemekkel számolt idő a megfigyeléssel szemben hagy. A δt rovat tartalmazza az egyes phasisokra azon hibákat, melyek az egyes állomásokban a kiegyenlítés után még visszamaradnak.

Ezek, az elmélet helyességét feltételezve, már csak megfigyelési hibák, azaz az egyes állomások nem pontos órajavításából származó eltérések, különösen pedig az egyes phasisok kezdetének azonosítása körül elkövetett tévedések.

Előzetes tapasztalatból már tudtam, hogy a fészek mélysége, ha egyáltalán, csak nagyon bizonytalanul adódik és hogy Δq eliminációs egyenlete is apró coefficientseket kap. Ép ezért az eliminációban ezen egyenletet utolsó előttinek, a mélység javítását pedig utolsónak választottam. A közel lineáris kapcsolat hátrányának lehető elkerülésére OPPOLZERTŐL javasolt fogás az elérhető pontosságot nem fokozta. Kitűnt, hogy Δq az összes phasisokban még biztonsággal meghatározható, ellenben Δh mindig $\frac{9}{10}$ alakban jelenik meg. Ennek oka, hogy Δh és Δv coefficientsei közel arányosak. Ugyane megjegyzés tehát a II. ki-egyenlítésre is vonatkozik. Dr. JORDAN, a ki számításainak egy részét számológépen, sokkal több számjeggyel végezte és ezért a determinánsokban a jelentős számjegyek elfogyásától kevesebbet szenvedett, a III. phasis számára Δh -t oly tört alakjában nyeri, melynek számlálója és nevezője 6 nullával kezdődik. Ugyanezen bizonytalanság mutatkozik a csillagászatban is, ha közel parabolikus üstökösnek nagy tengelyét akarnók meghatározni.

Mindenesetre figyelemre méltó mégis, hogy néhány jel arra utal, hogy a fészek mélysége a feltételezett 100 kilométernél kissé sekélyebb.

Számításainkból azt a fontos, noha negatív eredményt következtettem, hogy pusztán időadatokból a fészek mélysége meg nem határozható. Annak a kérdésnek az eldöntése, hogy a földrengés milyen mélységben ered, más vizsgálati módszert követel. Egyelőre csak annyit szeretnék megjegyezni, hogy e módszert már meg is találtam. Bemutatását és elméletét külön értekezésnek tartom fenn.

A magam véleményével szemben dr. JORDAN nem adja fel a reményt, hogy a fészek mélységét már időadatokból is megállapíthatja. Ha ennek lehetőségét a probléma természete egyáltalán ki nem zárja, meg vagyok róla győződve, hogy ügyességének és buzgóságának sikerülni fog a megoldás.¹

Egyelőre azonban a megoldások a határozatlannak meg-

¹ Ezóta sikerült a fészek mélységének meghatározhatóságát szabályozó feltételek analitikai levezetése is.

maradó Δh lineáris függvényei gyanánt jelentkeznek; értékeik az egyes phasisokra:

I. phasis		II. phasis	
$\Delta q = -0.2188 + 0.1155 \Delta h$		$\Delta q = -0.8652 + 0.1209 \Delta h$	
$\Delta t_e = +4^m 385 + 3^m 050 \Delta h$		$\Delta t_e = +3^m 584 + 5^m 607 \Delta h$	
$\Delta l_0 = -4^\circ 233 - 0^\circ 053 \Delta h$		$\Delta l_0 = -2^\circ 764 - 0^\circ 014 \Delta h$	
$\Delta b_0 = +2^\circ 839 + 0^\circ 014 \Delta h$		$\Delta b_0 = +1^\circ 225 - 0^\circ 054 \Delta h$	
$\Delta v = +1.619 - 0.740 \Delta h \frac{km}{sec}$		$\Delta v = -0.9226 - 0.494 \Delta h \frac{km}{sec}$	
III. phasis		IV. phasis	
$\Delta q = -1.2997 + 0.1825 \Delta h$		$\Delta q = -0.5949 + 0.1413 \Delta h$	
$\Delta t_e = +0^m 662 + 10^m 220 \Delta h$		$\Delta t_e = +2^m 206 + 8^m 335 \Delta h$	
$\Delta l_0 = -3^\circ 217 - 0^\circ 285 \Delta h$		$\Delta l_0 = +1^\circ 735 + 0^\circ 270 \Delta h$	
$\Delta b_0 = +1^\circ 281 + 0^\circ 022 \Delta h$		$\Delta b_0 = -2^\circ 978 - 0^\circ 018 \Delta h$	
$\Delta v = -2.425 - 0.523 \Delta h \frac{km}{sec}$		$\Delta v = -0.2486 + 0.1038 \Delta h \frac{km}{sec}$	
V. phasis			
$\Delta q = -0.1750 + 0.0838 \Delta h$			
$\Delta t_e = +6^m 940 + 8^m 375 \Delta h$			
$\Delta l_0 = -5^\circ 146 - 0^\circ 000 \Delta h$			
$\Delta b_0 = +7^\circ 102 - 0^\circ 000 \Delta h$			
$\Delta v = +0.065 - 0.004 \Delta h \frac{km}{sec}$			

A Δh javítás befolyása, t_e elemet kivéve, még akkor is mérsékelt, ha mindjárt $\Delta h = 1$ -gyel a fészket a Föld közepébe helyeznők. Ha azonban physikailag valószínű határokat választunk, azaz a fészket vagy 200 km mélységbe, vagy a Föld felszínére teszszük, akkor Δh lehetséges határai ± 0.0157 . Ezzel a megoldás-rendszer

I. phasis		II. phasis	
$l_0 = 124^\circ 267 \mp 0^\circ 001$		$l_0 = 125^\circ 736 \mp 0^\circ 000$	
$b_0 = -0^\circ 328 \pm 0^\circ 000$		$b_0 = -1^\circ 942 \mp 0^\circ 001$	
$t_e = 17^h 5^m 465 \pm 0^m 048$		$t_e = 17^h 4^m 664 \pm 0^m 088$	
$v = 12.369 \mp 0.012 \frac{km}{sec}$		$v = 5.398 \mp 0.025 \frac{km}{sec}$	
$q = 0.1812 \pm 0.0018$		$q = -0.4652 \pm 0.0019$	
$\varepsilon = \pm 0^m 81$		$\varepsilon = \pm 0^m 83$	

III. phasis

$$\begin{aligned}
 l_0 &= 125^\circ 283 \mp 0^\circ 004 \\
 b_0 &= -1^\circ 886 \pm 0^\circ 000 \\
 t_e &= 17^h 1^m 742 \pm 0^m 160 \\
 v &= 2.576 \mp 0.008 \frac{km}{sec} \\
 q &= -0.8997 \pm 0.0029 \\
 \varepsilon &= \pm 0^m 95
 \end{aligned}$$

IV. phasis

$$\begin{aligned}
 l_0 &= 130^\circ 235 \pm 0^\circ 004 \\
 b_0 &= -6^\circ 145 \mp 0^\circ 000 \\
 t_e &= 17^h 3^m 286 \pm 0^m 131 \\
 v &= 3.335 \mp 0.002 \frac{km}{sec} \\
 q &= -0.1949 \pm 0.0022 \\
 \varepsilon &= \pm 4^m 16
 \end{aligned}$$

V. phasis

$$\begin{aligned}
 l_0 &= 123^\circ 354 \mp 0^\circ 000 \\
 b_0 &= +3^\circ 935 \mp 0^\circ 000 \\
 t_e &= 17^h 8^m 020 \pm 0^m 131 \\
 v &= 2.972 \mp 0.002 \frac{km}{sec} \\
 q &= 0.2250 \pm 0.0013 \\
 \varepsilon &= \pm 3^m 73,
 \end{aligned}$$

melyben ε az egyes állomás középhibája, ha megfigyelésének az egység súlyt tulajdonítjuk.

Látni való, hogy a fészek mélységének bizonytalansága gyakorlatilag semmi behatással sincs a többi elemre. Az epicentrum helyzete legfőlebb 0'25-czel tolódik el és a terjedésssebességben a bizonytalanság másodpercenként maximumban 25 méterre rúg. A \pm jellel kapcsolt szám elhagyásával nyerjük az illető seismikus elem értékét azon feltevés mellett, hogy a mélység pontosan 100 km.

Minthogy a középhibák és a hátramaradó hibák nagyjából a II. kiegyenlítés után is ugyanily rendű mennyiségek lesznek, mint az imént nyert értékek, már most foglalkozhatunk a két utolsó phasis megoldásának szembeötlőbb bizonytalanságával. Ezeknek kezdete az egyes állomások seismogrammjából csak nagyon bizonytalanul azonosítható. RUDOLPH hozzám intézett levelében el is panaszolja, «hogy a cerami földrengés feldolgozása nagyon fáradságos volt, különösen mert igen nehéz volt a MILNE-féle apparátusok seismogrammjából a helyes phasist kivenni. Hogy az utolsó phasis (azonosítása és leolvasása) már nem biztos, maga is érezte». Az optikai úton jelző készülékek fényérzékeny papírja gyakran óránként csak 36 cm-re halad s

így érthető, hogy néhány percze pontos leolvasás, midőn a lengések annyira összefolynak, hogy csak burkolójuk látszik, szinte lehetetlen. Hozzájárul, hogy úgyszólván minden állomás különböző érzékeny seismometerrel észlel, a melynek saját lengése a phasis kezdetét tetemesen eltolhatja. A seismogramm leolvasása tehát csak úgy sikerül, ha minden egyes műszer individualitását teljesen ismerjük. A két utolsó phasis csekélyebb megbízhatósága ezek után teljesen érthető. Hogy azonban megoldásuk reális, bizonyítja majd epicentrumuknak geophysikailag teljesen indokolható fekvése és elemeinek a többi phasiséiba való szoros beilleszkedése.

Ha $\alpha=0.764$ a Roche-féle sűrűségi-törvény állandója, akkor

$$n_1^2 = a \frac{1-q}{a-q}$$

vonatkozásból levezethető q segítségével a földfelszíni törésmutató. Értéke az egyes phasisokban

Phasis	I.	II.	III.	IV.	V.
n_1	1.0360	0.9543	0.9340	0.9754	1.0481.

Noha hyperbolikus sugarak lehetőségéről már az első, e tárgyra vonatkozó értekezésemben szó esett, mégis nagyon meglepett a három belső phasis negatív q értéke vagy az egység-nél kisebb törésmutatója. Hozzátehetem mindjárt, hogy a második kiegyenlítés a két szélső phasist is hyperbolikusoknak tüntette fel.

A tapasztalatnak megfelelően tehát azt kell mondanunk, hogy a rengés a Földdel concentrikus kúpmeteszetekben (nem ellipszisekben) terjed és meg kell engednünk, hogy a

$$q = a \left(1 - \frac{1-\alpha}{n_1^2-\alpha} \right)$$

hyperbola-alakú görbe mindkét ágának van reális n_1 mellett jogosultsága. Továbbra is áll, hogy $q > \frac{1}{2}$ esetén a rengés korlátozott, $q < \frac{1}{2}$ esetén pedig az egész Földön érezhető. De hozzá kell tennem, hogy pozitív q -nak ellipsis, negatív q -nak hyperbola felel meg s hogy ez utóbbi esetben q

$$-\infty < q < \frac{1}{2}$$

tág határokhoz van kötve.

A földrengési elemek számolására levezetett egyenletek általános érvényességűek és így az imaginariusnak megengedésével a hyperbolára is alkalmazhatók. Hogy az idevonatkozó formulák felsorolását mellőzhessük, megjegyzem, hogy az ellipsisre vonatkozó formulák alakilag változatlanul megmaradnak, ha q helyébe $-q$ lép, az imaginarius egység elhagyatik és a megfelelő körfüggvény helyett egyenlő nevezetű hyperbolikus függvény tétetik.

2. A második kiegyenlítés.

A hibaegyenletben elhanyagolt másodrendű tagok, vagy a mi ugyanazt mondja, a seismikus alapegyenlet TAYLOR-sorfejtésének hibás helye, a successiv közelítések módszerében nem ad convergentiát, ha az előbbi szakaszban levezetett, javított elemekből indulunk ki. A Δh , Δl_0 , Δb_0 mennyiségekben a hibaegyenlet teljesen lineárisnak tekinthető; a kényes elemek tehát q , v és l_e . Azok előzetes meghatározására szerkesztettem a seismikus abacust.

Noha alkalmazása a bevezetésben említett javítások megtétele után a jövőben szinte feleslegessé válik, mégis oly világot vet a földrengés terjedésének módjára, hogy bemutatása fölötté hasznosnak tetszik.

a) *A seismikus abacus.*

Ha a fészek mélységét elhanyagoljuk, akkor a seismikus ephemerida kiszámolása fölötté egyszerű. A 686. lapon idézett értekezésemben használt jelzéseket és az egyenletek számozását megtartva, ad (48):

$$k = \frac{q}{1-q},$$

a mivel 47a) szerint

$$\sin \varphi' = k \sin \varphi$$

számolandó. Ezen egyenlet csinosan illusztrálható. Ha letűzünk egy k hosszúságú OC egyenest és ennek C végpontja körül az

egységsugárral kört vonunk, akkor a körön haladó P pont az egyenes másik O végpontjával kapcsolva adja az O -nál fellépő φ szöghez tartozó P -nél leolvasható φ' szöget.

φ' szöggel adódik azonnal 55) vagy 55a) alapján

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2},$$

és ezzel 41b), 43)

$$v(t-T) = \psi = \frac{\phi + (1-2q) \operatorname{tg} \phi}{\sqrt{4q(1-q)}},$$

a mennyiben ez esetben az epicentrum ideje t_e a lökés kiváltásának T idejével összeesik.

$v(t-T)$ tehát φ és q argumentumokkal táblázható. Ilyen táblát számított q -nak $-\infty$ és $+\frac{1}{2}$ között fekvő értékeire dr. PÉCSI ALBERT úr.

Azonnal észreveszszük, hogy az epicentrum szomszédságában, legalább is 20° távolságig a hodograph teljesen független q értéktől. Ez analitikailag is igazolható. Ha ugyanis a hodograph egyenletét φ hatványai szerint $\varphi=0$ környezetben sorba bontjuk,

$$v(t-T) = \varphi - \frac{(1-k)^2}{24} \varphi^3 + \frac{(1-k)^3(1-18k-15k^2)}{1920} \varphi^5 - \dots$$

eredményhez jutunk. Távolságok esetén q lehetséges határai miatt $+1 > k > -1$ határok között mozog. A legkisebb előforduló sebesség körülbelül $1 \frac{km}{sec}$, tehát a második tag elhanyagolása csak 22° távolság mellett fog a seismogrammal szemben legfeljebb 1° , csak 70° mellett 0.5^m különbséget tenni. Teljesen indokolt tehát az az állításom, hogy a közeli rengéseknek geophysikailag semmi érdekességük nincs, s hogy ezek bátran a régi módszerek szerint számolhatók.

Az imént felírt egyenlet a makroseismikus rengések alap-egyenlete; hogy teljessé tegyem, ide iktatom még az emersiós-nak szintén könnyen származtatható egyenletét. Ha ugyanis a fészkek mélysége elhanyagoltatik, akkor egyszerűen

$$c = \frac{\varphi - \varphi'}{2},$$

a mely egyenlet a mikroseismoknál is egynéhány tizedfok pontossággal használható.

q befolyása csak az epicentrumtól nagy távolságra jelentkezik; de a seismikus æquatoron ($\varphi=90^\circ$) túl behatása rohamosan és nagyon is érezhetően megnő.

Legjobban mutatja ezt, ha a hodographot egynéhány speciális esetre megszerkesztjük.

Ha $q=0$, akkor a terjedés húr mentén történik és a mélységet mindig elhanyagolva, áll

$$v(t-T) = 2 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

A két szélső esetben pedig áll $q = \frac{1}{2}$ számára:

$$v(t-T) = \varphi,$$

tehát terjedés a Föld színén a legnagyobb kör mentén és $q=-\infty$ esetén:

$$\begin{aligned} v(t-T) &= \sin \varphi, & \varphi < 90^\circ & \text{és} \\ v(t-T) &= 1 & \varphi > 90^\circ & \end{aligned}$$

számára, vagyis a seismikus æquatorig terjedés a helyen átmenő seismikus parallel sugara, az æquatoron túl a fõldsugar mentén.

A hodograph összesége tehát oly görbesereg, mely $\varphi=90^\circ$ -ig

$$\Psi = \varphi \text{ egyenes és a } \Psi = \sin \varphi,$$

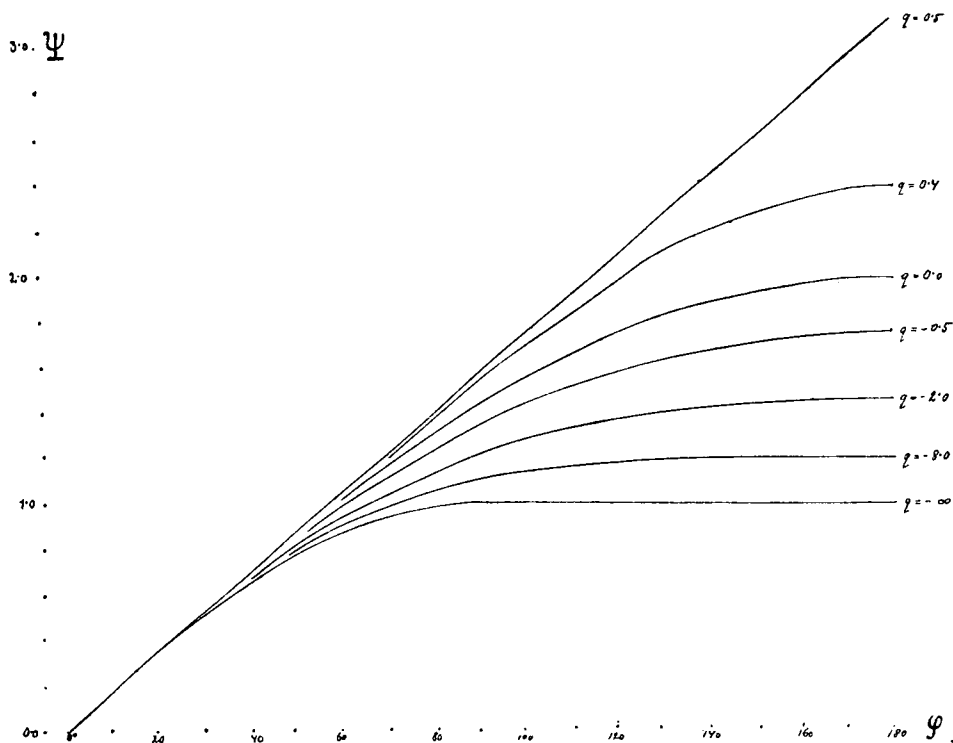
$\varphi=90^\circ$ -tól pedig a $\Psi=\varphi$ és a $\Psi=\sin \varphi$ egyenes közé van foglalva. A míg tehát ív és sinus, mindegyik a terjedésssebesség reciprokok értékével megszorozva, egymáshoz eléggé közel áll, a hodograph q -tól függetlennek tekinthető.

A III. és IV. phasis gyönyörűen illusztrálja azt a nagyon is felöltő ténnyt, hogy $\varphi=90^\circ$ -on túl a megérkezés ideje állandó.

Ha φ -vel mint abscissával $\lg \Psi$ görbét megrajzoljuk különböző q értékek számára, nyerjük a seismikus abacust. Ha most ugyanazon ordinátaegységgel megrajzoljuk áttetsző papíron a $\lg(t-T)$ görbét is, a hol t az idő, melyben megfigyelés szerint a lökés a φ távolságú állomásra érkezett, akkor az utóbbi görbe az ordinátatengely mentén csúsztatva az abacus

valamely q charakteristikájú görbéjével össze fog esni. Ezen q az illető phasishoz tartozó állandó és az ordinátatengelyen leolvasható $\lg \Psi - \lg (t - T) = \lg v$, a terjedésssebesség logaritmusa.

Ezen rendkívül egyszerű eljárás természetesen csak akkor ad helyes értékeket, ha T_1 az epicentrum ideje az egyes phasi-



1. ábra. A seismikus hodograph.

sok számára jól ismeretes. Minthogy azonban valószínűleg minden phasis más időben pattant ki, félős, hogy ez úton az önkénynek kelleténél tágabb tér nyílik.

Az epicentrum helye rendesen annyira közelítőleg ismeretes, hogy a Ψ függvény sorbabetűzésénél Δl_0 , Δb_0 , h második hatványai teljesen elhanyagolhatók. A q , v , T mennyiségeket ellenben már jelentékeny pontossággal kell ismernünk, hogy

hasonló feltevést ezen elemek javítására is tehesünk. Valamennyi állomás számára felírható tehát az

$$vt_i - vT = \varphi_i, \\ i=1, 2, 3, \dots$$

egyenlet, a melyben t_i az i -dik állomáson észlelt időt jelenti, φ_i pedig a seismikus táblából φ és η argumentummal kivethető. $\eta = -\infty$ és $\eta = \frac{1}{2}$ szélső értékeire beleértve η -nak még három más, alkalmasnak tetsző értékeire felírtam a megfelelő φ_i -t. E szélső értékekre és $\eta=0$ számára φ egyszerűen a sinusok, az ívek és a húrok táblázatából kivethető.

Az állomások számával megegyező egyenletek most már minden η számára megoldottak, még pedig, nagy pontosságra nem lévén szükség, a következő módon.

Az egyes η -khoz tartozó egyenletek arithmetikai közepét

$$vt - vT = \bar{\varphi}$$

minden egyes egyenletből levontam. Az eredmény

$$v(t_i - \bar{t}) = \varphi_i - \bar{\varphi}$$

már csak v ismeretlent tartalmazza. A legkisebb négyzetek módszerének közelítő eljárásával számíttatott erre ezen egyenletekből v , majd

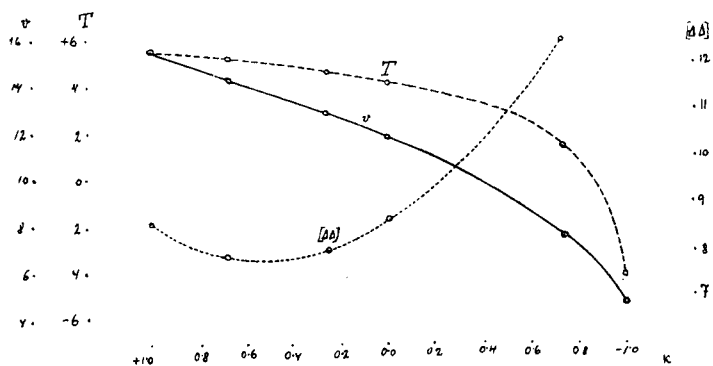
$$T = \bar{t} - \frac{\bar{\varphi}}{v}.$$

E két mennyiséggel számolható most a lökés bekövetkezésének ideje, majd a hátramaradó hiba Δ :

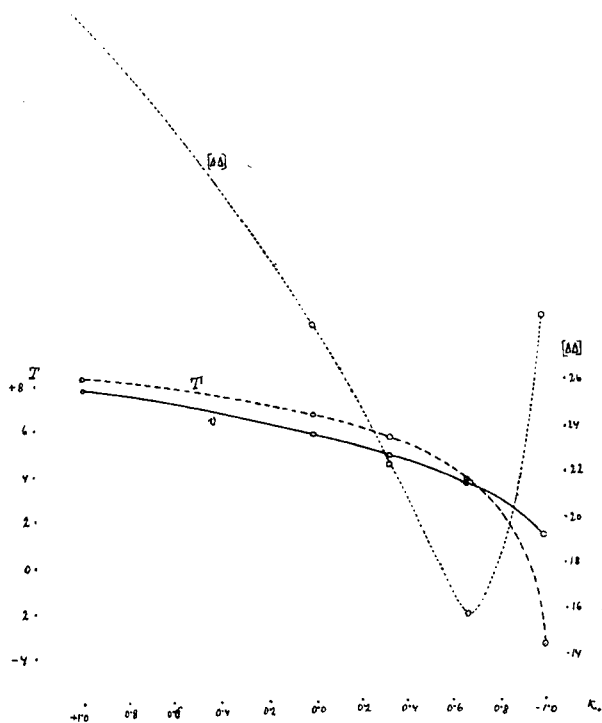
$$\Delta = t_i - T - \frac{\varphi}{v}$$

egyenletből. Azon η és a hozzátartozó v és T értéket tekintetem a legvalószínűnek, a mely a hátramaradó hibák négyzetösszegét $[\Delta\Delta]$ -t minimummá teszi; a minimum graphikus úton vezettetett le.

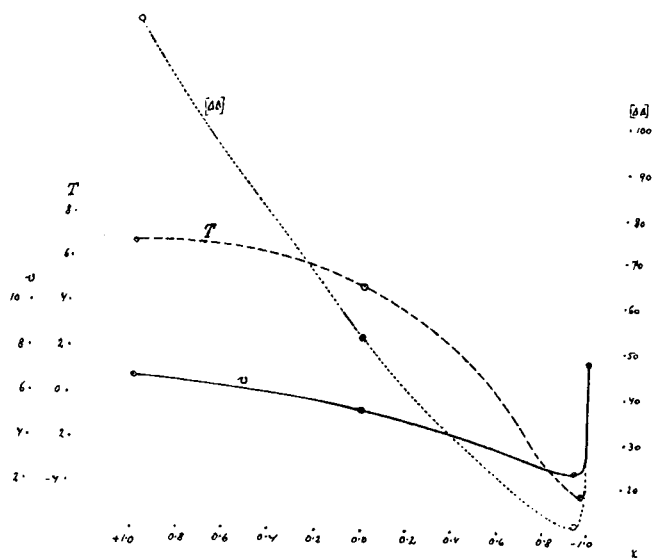
Ezen előzetes számítás eredménye annyira tanulságos, hogy közlését indokoltnak látom. A jövőre is megmaradó nagy előnye, hogy kevés fáradsággal a hátramaradó hibákat tetemes



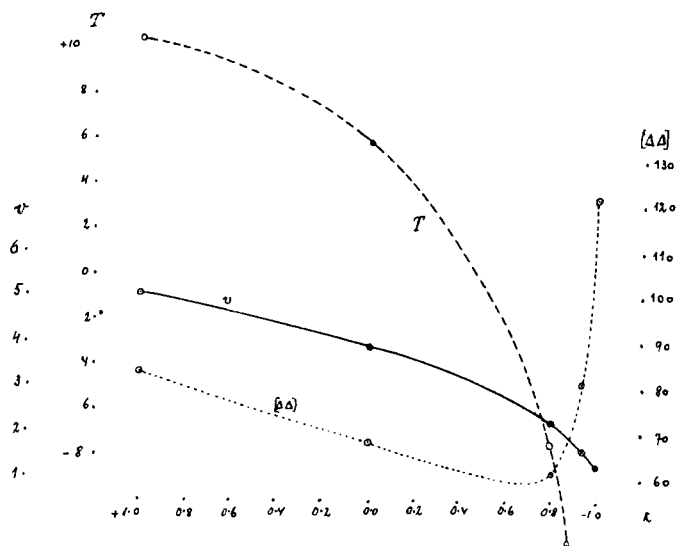
2. ábra. Az I. phasis elemei.



3. ábra. A II. phasis elemei.



4. ábra. A III. phasis elemei.



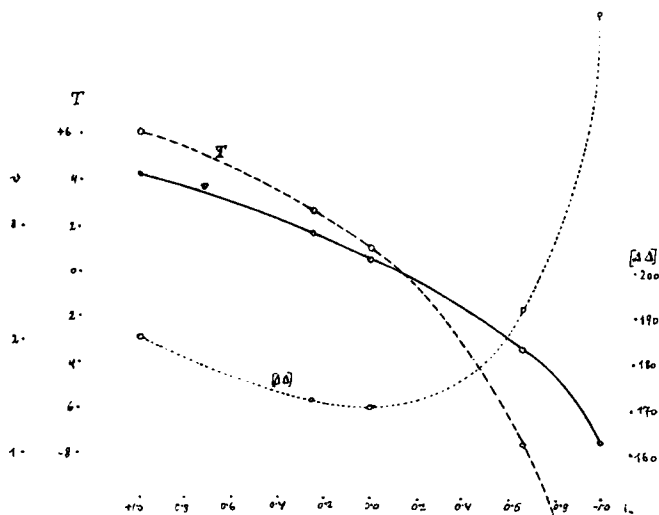
5. ábra. A IV. phasis elemei.

pontossággal megadja, még pedig különböző q értékekre. Ily módon szabatos kritika gyakorolható a megfigyelt adatokon már a számítás elején és a súlyeloszlásról találó képünk van. A közölt ábrák szolgáltatják v , T értékeit és a hátramaradó hibákból alkotott négyzetösszegeket $k = \frac{q}{1-q}$ függvénye gyanánt.

Ha q helyett a

$$k = \frac{q}{1-q}$$

menyiséget hozzuk be, a 701. lapon álló tábla eredménye rajzban is könnyen megadható.



6. ábra. Az V. phasis elemei.

Mindenekelőtt szembeötlő, hogy v és T mily lényegesen változik q -val: míg ez lehetséges értéksorozatát befutja, a sebesség kezdőértékének négyszeresére emelkedik. Fontos továbbá azon megjegyzés is, hogy az öt phasis lényegesen két csoportra oszlik. Az I. és V. phasis minimuma határozatlan, a három belső phasis minimumát a görbe hirtelen törése jellemzi. Ez nyilván azt jelenti, hogy már kis megfigyelési hiba a két szélső phasis q értékét messze eltolja, míg a belső phasis kevésbé érzékeny.

A megfelelő η görbékéből most már levezethető a hibanegyzetek összegét minimummá tévő η és ez az egyes phasisokra:

Phasis	I.	II.	III.	IV.	V.
q	0.306	—2.7	—32.0	—4.0	—0.6
v	0.1263	0.04682	0.02452	0.02121	0.02210
t_e	4 ^m 84	2 ^m 19	—4 ^m 34	—6 ^m 74	—1 ^m 16

A v és t_e érték nem a görbéből van merítve, hanem az új η -val számolt ephemeridából vezetett le. Ha ugyanis a hodograph teljes — tehát a mélységet is tartalmazó — egyenletének jobb oldalát ismét Ψ -vel jelöljük, akkor mint előbb v és vT , most is v és vt_e határozható meg. E meghatározás nem szükséges és a jövőben teljesen el is maradhat; a pontosabb értékek csak az az előnye van, hogy már magában is az ephemerida hibáinak összegét nullává teszi.

A közelítésnek még ezen foka mellett sem lehetett a hibae egyenletet lineárisnak tekinteni.

b) A hibae egyenlet lineárisra tétele.

A megelőző utasítások szerint számolt q , v , t_e kezdőértékek már csak annyiban lehetnek hibásak, a mennyire az epicentrum és a mélységnek nem pontos ismerete rájuk behat. A teljes, mind a hat ismeretlenre felállított hibae egyenlet még nem adott oly megoldást, mely a javítások négyzeteinek elhanyagolását megengedettnek tüntette volna fel.

Mindenekelőtt új K változót kellett behozni, a mely q -t oly módon helyettesíthetné, hogy a transformált hibae egyenlet ΔK -ban lineáris. Ez könnyen lehetséges oly K változó behozása által, mely az abacus görbéit $\varphi = 90^\circ$ számára æquidistant-sökká teszi.

Ha a $\varphi = 90^\circ$ -nak megfelelő ψ -t ψ_1 -gyel jelöljük, lesz

$$\psi_{90} = \frac{2\psi_1 + \sin 2\psi_1}{2 \sin \psi_1 \sqrt{1 + \cos^2 \psi_1}},$$

és ezért

$$K = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 1} \left[\left(\frac{\psi_1}{\sin \psi_1} + 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \psi_1}} - 1 \right],$$

vagy hyperbolikus sugarak esetén

$$K = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 1} \left[\left(\frac{p_1}{\sin p_1} + 1 \right) \sqrt{1 + \cos^2 p_1} - 1 \right],$$

a mi helyett, ha

$$q < -7.2,$$

kényelmesebben a következő sorfejtés használandó:

$$K = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 1} \left[\frac{2p_1}{\sin 2p_1} - \left(1 + \frac{2p_1}{\sin 2p_1} \right) \left(\frac{1}{2} \sin^2 p_1 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 p_1 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^6 p_1 - \dots \right) \right].$$

Mindezen egyenletekben ϕ_1 vagy p_1 a

$$\sin \phi_1 = \sqrt{2q} \quad \text{vagy} \quad \sin p_1 = \sqrt{-2q}$$

egyenletekkel határozandó meg.

A 6(i) hibaegyenletnek

$$= \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}} \left[\frac{1-q(1+\rho^2)}{2q} \operatorname{tg} \phi - \frac{1-2q}{2q} \phi - Q_0 \right] \frac{\Delta q}{1-q}$$

tagja helyébe már most

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{\frac{1-q(1+\rho^2)}{1-2q} \operatorname{tg} \phi - \phi - \frac{2q}{1-2q} Q_0}{\operatorname{tg} \phi_1 - \phi_1} \Delta K$$

tag fog lépni.

Hyperbolikus sugarak esetén a kifejezés

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{p - \frac{1+q(1+\rho^2)}{1+2q} \operatorname{Tang} p_1 - \frac{2q}{1+2q} Q_0}{p_1 - \operatorname{Tang} p_1} \Delta K,$$

ha $-q$ helyett q -t írunk.

Míg q : $-\infty$ -tól $+\frac{1}{2}$ -ig halad, addig K : 0 és 1 között mozog és a ψ függvényt, a mennyiben q -tól függőnek tekintjük, a fészek mélységével egyenrendű mennyiségig lineárisra tette.

Minthogy Ψ és K -ból q egykönnyen nem eliminálható, az átmenetet egyszer s mindenkorra számított tábla közvetíti. A megoldást ezentúl is q -ban fogjuk megadni, minthogy ennek fizikai jelentősége nyilvánvaló.

A hibaegyenletnek még mindig meglevő fogyatkozásai, melyek azonban már csak a kis sebességű III. és IV. phasisban jelentkeztek, nyilván már csak annak rovására voltak írhatók, hogy a

$$v(t - t_e) = \Psi$$

egyenletben Δv , Δt és Δt_e -ben másodrendű tagok el voltak hanyagolva.

Idők folyamán különböző alakú hibaegyenletekkel számoltunk; egyszer, mint eredeti értekezésemben, Δt_e -t, máskor $\Delta(vt_e)$ -t tekintettük ismeretlennek. Majd meg tanácsosnak tetszett a v sebesség helyett a

$$\tau = \frac{1}{v}$$

percekben kifejezett időt behozni, mely a hosszegység (földsugár) befutására szükséges. Másodrendű tagok elhanyagolásával e különféle alakok természetesen nem egyenlő értékűek.

Legyen rövidség kedvéért ζ a K , b_0 , l_0 , h elemek bármelyike és vegyük például a hibaegyenletnek régi (66) alatt adott alakját:

$$(t_c - t_{ce}) \Delta v - v_c \Delta t_e - \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \Delta \zeta - v_c \Delta t = 0,$$

a hol a c index arra utal, hogy az illető elem előzetes számítás eredménye, vagy egyszerű hypothesis. Ha a másodrendű tagokat Δv és Δt -ben nem hanyagoljuk el, az egyenlet szigorúan érvényes differenciálegyenletté válik, a mennyiben $\Delta \zeta$ csakugyan elegendő kicsinynek bizonyult.

A szigorú egyenlet tehát

$$(t_c - t_{ce}) \Delta v + v_c \left(1 + \frac{\Delta v}{v_c}\right) \Delta t - v_c \left(1 + \frac{\Delta v}{v_c}\right) \Delta t_e - \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \Delta \zeta = 0,$$

vagy a hibaegyenlet eredeti alakjával megegyezően

$$(t_e - t_{e0}) \frac{\Delta v}{1 + \frac{\Delta v}{v_c}} - v_c \Delta t_e + v_c \Delta t - \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \frac{\Delta \zeta}{1 + \frac{\Delta v}{v_c}} = 0$$

alakban írható.

Ha most a régi hibaegyenlet már meg van oldva és gyökei Δv^0 , ΔT^0 , $\Delta \zeta^0$, akkor ezekből azonnal adódik a szigorú egyenleté, mert

$$\Delta t_e = \Delta t_e^0, \quad \Delta v = \Delta v^0 \left(1 + \frac{\Delta v}{v_c} \right), \quad \Delta \zeta = \Delta \zeta^0 \left(1 + \frac{\Delta v}{v_c} \right).$$

Ezen egyenletek másodikából még folyik

$$\Delta v = \frac{\Delta v_0}{1 - \frac{\Delta v_0}{v_c}}$$

és így a szigorú elemek a hibaegyenletek új megoldása nélkül is ismeretesek.

Ha a hibaegyenlet eredetileg

$$t_c \Delta v + v_c \Delta t - \Delta(v t_e) - \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \Delta \zeta = 0$$

alakban volt írva, akkor hasonlóan lesz:

$$\Delta v = \frac{\Delta v^0}{1 - \frac{\Delta v_0}{v_c}}, \quad \Delta(v t_e) = \Delta(v t_e)^0 \left(1 + \frac{\Delta v}{v_c} \right), \quad \Delta \zeta = \Delta \zeta^0 \left(1 + \frac{\Delta v}{v_c} \right),$$

és ha

$$\Delta t_e + \tau_c \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \Delta \zeta + v_c \Delta \tau - \Delta t = 0$$

alakból indultunk volna ki, akkor a szigorú egyenlet megoldásai

$$\Delta t_e = \Delta t_e^0, \quad \Delta \tau = \Delta \tau^0, \quad \Delta \zeta = \frac{\Delta \zeta^0}{1 + \frac{\Delta \tau}{\tau_c}}.$$

E javítások megtétele után a hibaegyenletektől hátra-hagyott hibák teljesen vágnak azon ephemerida eltéréseivel, a melyet az ily módon javított elemekkel az eredeti véges egyen-

letből számolhatók. A hibaegyenletektől követelt linearitás teljesen el van érve.

c) A második kiegyenlítés eredményei.

Számításaink ellenőrzése szempontjából kívánatos volna az öt phasis hibaegyenleteinek, normal- és eliminációs egyenleteinek közzététele. Ez a «Beiträge zur Geophysik» egyik legközelebbi füzetében meg is fog történni és ezért e helyen a nagyterjedelmű számanyag közlését mellőzhetem.

A másodrendű tagok miatt javított és egymás közt most már teljesen összehasonlítható megoldások, azon feltevés mellett, hogy a mélység javítása 0, a következők:

I. phasis	II. phasis
$l_0 = 123^\circ 192$	$l_0 = 127^\circ 381$
$b_0 = +0^\circ 536$	$b_0 = -2^\circ 307$
$t_e = 17^h 5^m 376$	$t_e = 17^h 2^m 895$
$v = 12.175 \frac{km}{sec}$	$v = 4.667 \frac{km}{sec}$
$q = -0.0395$	$q = -6.7972$
$\varepsilon = \pm 0^m 81$	$\varepsilon = \pm 0^m 87$
III. phasis	IV. phasis
$l_0 = 132^\circ 667$	$l_0 = 127^\circ 661$
$b_0 = -2^\circ 396$	$b_0 = -9^\circ 237$
$t_e = 16^h 50^m 740$	$t_e = 16^h 36^m 610$
$v = 2.119 \frac{km}{sec}$	$v = 1.551 \frac{km}{sec}$
$K = -0.0294 (q = -\infty)$	$q = -20.2496$
$\varepsilon = \pm 0^m 99$	$\varepsilon = \pm 3^m 46$
V. phasis	
$l_0 = 118^\circ 932$	
$b_0 = +8^\circ 206$	
$t_e = 17^h 11^m 150$	
$v = 2.790 \frac{km}{sec}$	
$q = -0.1972$	
$\varepsilon = \pm 3^m 72$	

A bizonytalanság, melyet a $\Delta h = 0$ feltevés behoz, ugyanaz, mint az első kiegyenlítés alkalmával, azaz gyakorlatilag tel-

jességgel elenyésző. A számítás biztonsága az *ephemerida* középhibájának tanúsága szerint a két kiegyenlítésben közel ugyanaz, noha a q , v , t_e elemek egymástól tetemesen különböznek. Egy újabb, és úgy gondolom igen nyomós bizonyíték, hogy föld-rengési elemek megbízható levezetésére csupa időmegfigyelés nem elegendő.

Az előzetes elemek számításánál talált eredménynyel egyezően itt is látjuk, hogy a phasisok külső és belső csoportra oszlanak. A külső csoportot, az I. és V. phasist, kis q és q változásai iránt csekély érzékenység, a belső csoportot, a II., III. és IV. phasist ellenben (numerikusan) nagy q és ennek változásai iránt nagyobb érzékenység jellemzi.

A második feldolgozásban az öt phasis mindegyikének hyperbolikus pálya jut. Az épen mondottak alapján azonban épen nem tartom lehetetlennek, hogy a megfigyelési hibák befolyásának csökkentése a kis negatív q -t a két szélső phasisban pozitívvá fogja átbillentetni.

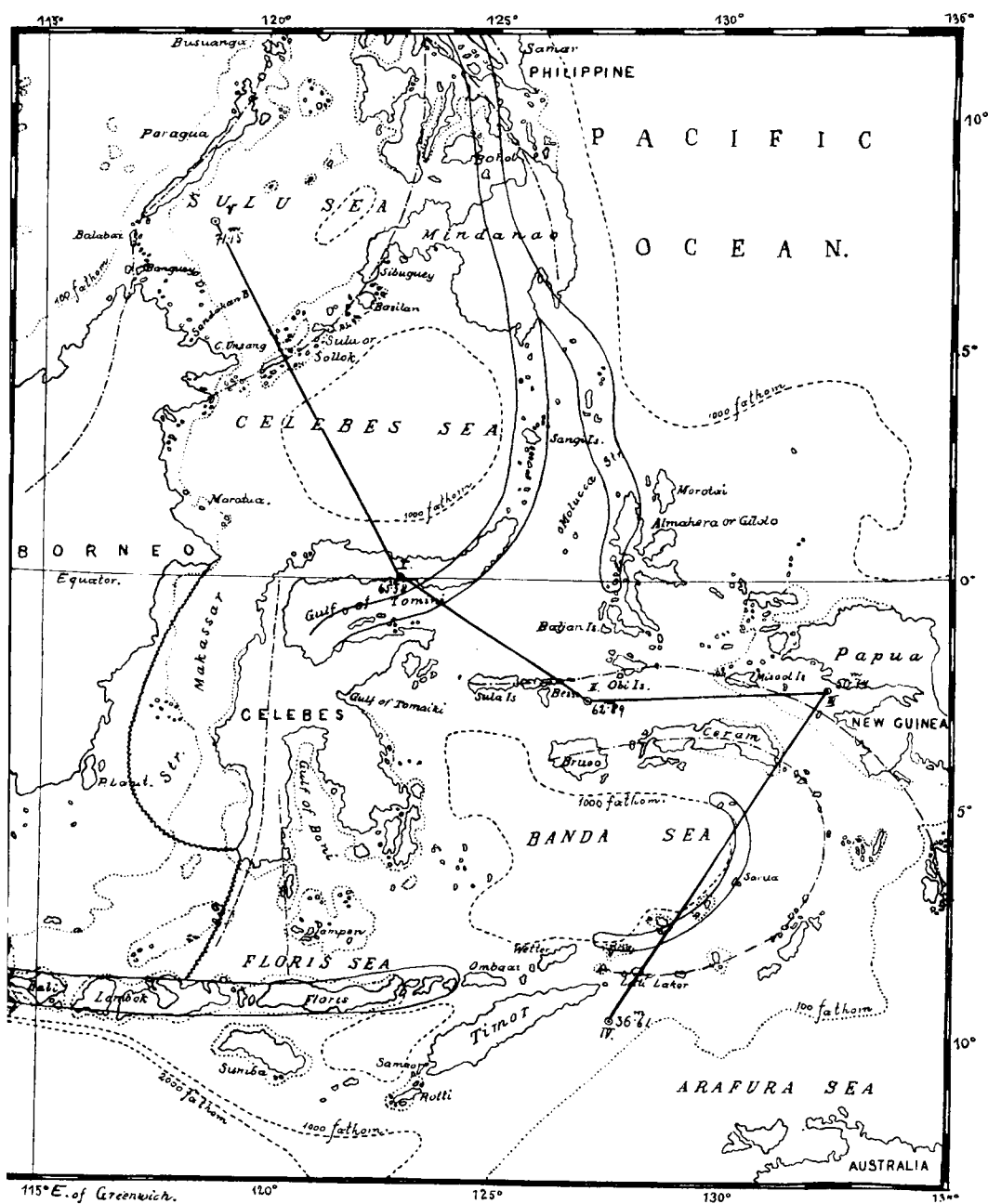
Az előzetes, eredményében a 701. lapon feltüntetett számítás nem tekintve, az egyes phasisokról most már 18 teljes feldolgozásunk van. Fölötte becses anyag, mely a megfigyeléseknek a legkisebb négyzetek módszere értelmében kifogástalan súlymeghatározására vezet. A súlyok kiszabása után mind az öt phasis még egyszer, végleg feldolgozandó.

3. A seismikus elemek tárgyalása.

Ha a' rengés pontalakú fészekből egy lökésben kipattan, várható, hogy az egymástól függetlenül számolt öt phasis az epicentrum és annak ideje számára közel azonos megoldást, a tényleges értéket körülzáró értékpolygont fog adni.

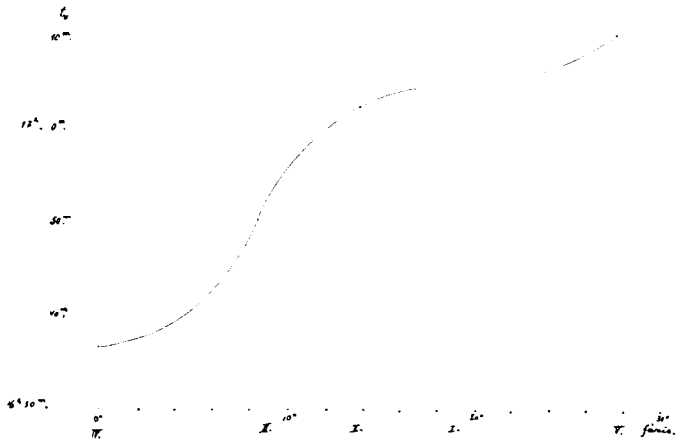
A mi eredményünk mindkét kiegyenlítésben lényegesen más és talán legjobban áttekinthető, ha B. Koro «On the geologic structure of the malayan archipelago»¹ című értekezését kíséző térképébe rajzoljuk.

¹ The Journal of the College of Science. Imperial university of Tokyo. Vol. XI. Part. II. 1899.



7. ábra. A cerami földrendgés epicentrumainak időbeli és térbeli elhelyezése.

Az epicentrumok elrendezése vonalszerű, a kipattanási idők sem csoportosulnak valamely középérték körül, hanem szigorú egymásutánt követnek. Az epicentrumok fekvése geologiai és tektonikailag teljesen indokolt, ami a két utolsó, numerikusan bizonytalannak tartandó phasist erősíti. Az első kidolgozásnál a centrumok vonala tetszetősebb, de az idők egymásutánja nehezen érthető és a Szula-szigeteket elválasztó Szapalalu szorosnak alig érthető gátló szerep jut; a második kiegyenlítésnél a kipattanás egy az időben és térben folytonos folyamat.



8. ábra. Az öt phasis kipattanási folyamata.

Az alábbi kis táblázat adja az egymásra következő epicentrumok távolságát és azt a «sebességet», a melylyel a lökés kipattanása az egyik centrumból a másikba terjedt.

Epicentrum	IV.	III.	II.	I.	V.
Távolság	8°439	5°286	5°060	8°754	
Sebesség $\frac{km}{sec}$	1.109	0.807	3.782	2.812	

Bármiként vélekedjünk e számokról, annyi bizonyos, hogy teljesen olyan rendűek, mint a lökések terjedés-sebességei. Úgy gondolom, hogy már a rengés fokozatos kipattanása a relais-rengésekre és a mi még fontosabb, a már eléggé jól

tanulmányozható utólökésekre, szóval hysteresis-jelenségre emlékeztet.

El kell tehát fogadnunk, hogy legalább ezen egy esetben, mert más rengésekről még semmit sem tudunk, az öt phasis öt egymásután kiváltott lökésből származott. És mindenestre nem véletlenség, hogy az oly különböző időkben kipattant és eléggé különböző sebességgel haladó lökések egymást számítás szerint egy állomáson sem keresztezik.

A földfelszíni törésmutatók sorozata a következő:

Phasis	I.	II.	III.	IV.	V.
n_1	0.9942	0.8876	0.8740	0.8790	0.9756,

hyperbolikus sugaraknak megfelelőleg valamennyi az egységnél kisebb, holott az első kiegyenlítés a két szélső, az előzetes számítás pedig legalább az első phasist még elliptikusnak tűntette fel. A kérdés a súlyokkal való végleges kiegyenlítés befejezése előtt alaposan nem dönthető el és ezért elliptikus sugarak lehetőségét nem akarom egészen elutasítani.

Tanulságos lesz az egyes sugarak elemeit például a legtávolabbra, Cordobáig (Argentina) terjedő lökésre vonatkozólag megállapítani.

Ha az η redukált emersioszög helyett (8. egyenlet)

$$\sin^2 \zeta = 4q(1-q) \cos^2 e, \quad \text{vagy} \quad \sin^2 \zeta = 4q(1+q) \cos^2 e$$

egyenletekkel a kilépő sugár zenittávolságát vezetjük be, akkor az elliptikus és hyperbolikus sugár fél nagy és fél kis tengelye

$$a = \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{\zeta}{2} \quad \text{vagy} \quad a = \frac{i}{\sqrt{q}} \cos \frac{\zeta}{2}$$

és

$$b = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{\zeta}{2} \quad \text{vagy} \quad b = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{\zeta}{2}$$

által van adva. Ez egyenletekben mindenütt

$$q = -q,$$

és a hyperbolikus és elliptikus sugár tengelyrendszere egymáshoz 90° -kal meg van forgatva; b vagy b tehát czélszerűen mint a lökés sugar legkisebb geocentrikus távolsága jellemezhető.

Ha ennek szöge a rengéstengelylyel γ , akkor a kúpszeletek (9) egyenletéből $u=0$, $\rho=\rho_0$ és $u=\varphi$, $\rho=1$ esetre kapunk:

$$\cos \zeta \sin 2\gamma = \frac{1}{\sin 2\varphi} \left[\frac{\sin^2 \zeta}{2q} \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2} \cos 2\varphi \right) - (1 - \cos 2\varphi) \right],$$

$$\cos \zeta \cos 2\gamma = \frac{\sin^2 \zeta}{2q\rho_0^2} - 1,$$

és egészen hasonló egyenleteket a hyperbolikus sugárra is. Ha a kifejezést $1-\rho_0=h$ hatványai szerint kibontjuk és az első hatványnál megállunk, lesz

$$\gamma = \frac{\varphi}{2} - \frac{h}{2q} \frac{\sin^2 \zeta}{\sin^2 \zeta - 1} \cot \varphi,$$

a mi igen nagy közelítéssel a húrfelező iránya. Az emersioszög legegyszerűbben a φ' segédszöggel

$$\operatorname{tg} e = q \cot \varphi' - (1-q) \cot \varphi$$

alakjában adódik, vagy néhány tizedfoknyi hibát nem tekintve

$$e = \frac{\varphi - \varphi'}{2}$$

egyenletből.

Az alábbi tábla adja Cordoba epicentrális távolságát mind az öt phasisban, továbbá a Cordobába hatolt sugárnak e emersioszögét és legkisebb geocentrikus b távolság t és ennek positioszögét a rengéstengelyhez.

Tábla: A cordobai sugár alakja.

Phasis	φ	e	b	γ
I.	148°34	74°86	0.2658	74°
II.	144.50	87.46	0.1182	72
III.	143.37	87.70	0.0000	72
IV.	137.79	88.80	0.0895	69
V.	156.60	80.24	0.1849	78

A IV. phasis sugara tehát 570 km-re közelítette meg a Föld középpontját, holott Cordoba húrja ez esetben 2290 km-re

maradt el tőle. A III. phasis, a mennyiben csakugyan $q = -\infty$ tehető, meg éppen a Föld középpontján ment volna át.

Ez az első eset, hogy földrengési sugarak útját némi biztonsággal ki lehetett jelölni.

A fenti táblázat néhány érdekes gondolatot sugal. Minél közelebb áll a sugár q jellemzője az $\frac{1}{2}$ értékhez, annál nagyobb útát tesz a földkéreg belsejében. Az elliptikus sugarak tehát főképen a földkéregnek, a hyperbolikus sugarak, melyek a kérget már kis távolságban is meredeken metszik, inkább a Föld belsejének tanulmányozására használhatók.

Ha tehát a megfigyelő állomásokat két csoportra osztjuk, olyanokra, melyeket az epicentrumtól túlnyomóan tenger, és olyanokra, melyeket tőle inkább szárazföld választ el, akkor a submarin kéregnek lényegesen elütő physikai magaviselete miatt az egy lökéshez tartozó q és v értékek is különbözők lesznek. Minthogy a ROCHE-féle állandó az egész Földnek magaviseletéből van levezetve, ez mindkét esetre ugyanannak vehető. Ekkor q -ból megállapítható a submarin és subcontinentális anyag sűrűségviszonya, v -ből annak rugalmassági modulusviszonya.

Az első phasisra vonatkozólag megkísérletem ezen számítást, a melyet más kezdőértékekből kiindulva MARCZELL ÁGOST tanárjelölt is végzett. Mindketten ugyanazon eredményre jutottunk, hogy ugyanis nagy mélységben a tenger alatt a földanyag sűrűsége és elasticitása kisebb. Ez megegyezik amaz általánosan elfogadott nézettel, hogy közvetlenül a tenger alatt a szárazföldre felé, nagy mélységben a szárazulatok alatt a tenger felé tartó áramlás van. Valószínű, hogy a végleges kiegyenlítés erre vonatkozólag is közlésre már érdemes adatokat szolgáltat.

Nagyon fontos volna tudnunk, hogy az egyes phasisokhoz tartozó sugarak longitudinális vagy transversális rezgésűek-e? Dr. JORDAN KÁROLY a seismológiának ezen sokat vitatott és még csak hozzávetőleg sem tisztázott kérdésére már az első kiegyenlítés alkalmával analogián alapuló igen tetszetős választ iparkodott adni. A törésmutató szerint ítélve a két szélső phasis az első kiegyenlítésben úgy viselkedik, mint a fény, azaz a «sűrűbb» közegben a beesési merőlegeshez hajlik, ellenben a három belső phasis a hang törését utánozta. E szerint tehát

analogiából merített valószínűséggel mondhatni, hogy a hyperbolikus sugarak longitudinális, az elliptikusok ellenben transversális rezgéshez tartoznak.

Ha ez okoskodást helyesnek fogadhatnók el, azonnal meg volna állapítható a Föld harántos contractiocoëfficiense μ , sőt a Föld szilárd kérgének vastagsága is. Jelölvén ugyanis v_l és v_t -vel a longitudinális és transversális rezgés terjedésssebességét, áll az ismeretes vonatkozás:

$$\left(\frac{v_l}{v_t}\right)^2 = \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}.$$

Az első kiegyenlítés szerint csak a II. és V. phasis adhat összetartozó sebességértékeket, a melyekből

$$\mu = 0.2825$$

következnék. Ha a második kiegyenlítésben az ötödik phasis η értékét még annyira bizonytalannak tartjuk, hogy végleges kiegyenlítés alkalmával a pozitív értéke még átsaphat, akkor megint csak a II. és V. phasis tartozhatik össze. Az eredmény

$$\mu = 0.2218$$

elég közel fekszik különféle anyagoknak megfigyelt állandójához és némileg talán támogatná dr. JORDAN feltevését.

E feltevésből folyik továbbá, hogy a földkéreg vastagsága legalább is $1-b$, ha b a legtávolabb hatolt elliptikus sugár kis tengelye; és viszont, a hyperbolikus sugarak túlnyomó számából azt a következtetést kellene levonnunk, hogy a Föld anyaga túlnyomóan folyós vagy belsejében gáznemű, minthogy transversális rezgésű sugár csak szilárd anyagon haladhat át.

Gyakrabban felvettem magamban azt a kérdést, hogy miképen lehetséges, hogy egy $140-150^\circ$ útát megtett sugár az epicentrum antipodus pontjához közelebb miért nem fér? Az 1894 október 27-iki nyugot-argentiniái rengés is csak 58 , az 1877 május 10-iki iquiquei rengés csak 67° -kal maradt el az antipodustól.

Azt hiszem, az emersioszög vizsgálata könnyen megadja a választ.

Ha χ a mélység elhanyagolásával a centrum antipoduspontjától való távolság, tehát

$$\varphi = 180^\circ - \chi,$$

akkor

$$\sin \varphi' = k \sin \varphi \quad \text{és} \quad e = \frac{\varphi - \varphi'}{2}$$

egyenletekből következik:

$$e = 90^\circ - \frac{1+k}{2}\chi - \frac{k}{12}(1-k^2)\chi^3 + \dots$$

Nagyobb negatív η jellemzővel bíró sugarak számára k nagyon közel -1 és így a sugár a seismikus æquatoron túl csakhamar igen meredeken lép ki. A legtöbb állomáson vertikális komponenst mérő műszer nincs, a csekély horizontális összetevőt pedig már nem érzi. Ama korábbi nézetem, hogy mi vertikális inga nélkül nagyon is ellehetünk, valószínűleg nem helyes.

Térjünk most át a sebességekre.

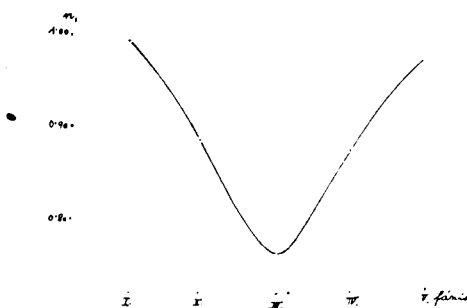
A törésmutatókkal való összehasonlításból első pillanatra látni, hogy oly rendű különbségekkel van dolgunk, a melyek az optikai dispersióhoz hasonló magyarázatot teljesen kizárják. Úgyszintén kirekeszthető annak a lehetősége is, hogy az amplitudo nagyságától befolyásolt terjedést észlelnők, a mi már abból is következik, hogy a göttingeni seismogrammból leolvasott periodusokból ezen rengésre is, mint sok másra, 50–140 km hosszú hullámokat kapunk.

Ha általában nem is tagadható reflectált hullámoknak előfordulása, bajos elhinni, hogy a mi öt phasisunk között ilyen akadjon. Egyszerű megfontolás mutatja, hogy a 46) egyenletben a négyzetgyököt negatív jellel véve a reflektált sugarakhoz jutunk, melyek az antifocusból, azaz a rengési tengelyen a fészekkel symmetrikusan fekvő pontból sugároznak ki. A megfigyelési idők elrendezése lényeges változást szenvedne. Ily változás nyoma felfedezhető talán a IV. phasison, de inkább hihető, hogy a dorpati leolvasás túlságos késői.

Elgondolható még, hogy a seismogrammnak szakaszokra való oszlása csak látszólagos és valamelyes interferentia-jelen-

ség folyománya. De ezzel sem egyeztethető az amplitudók és a rezgési periodusok ugrásszerű változása és a terjedéssébségnek a hely fekvésétől való függetlensége.

Bármennyire idegenszerű is több lényegesen különböző terjedéssébség együttes fellépte, kénytelen vagyok ezeket saját vizsgálataink alapján is egyelőre reálisaknak tartani. Meglehet, hogy a seismogrammoknak most már megkülönböztetni szokott nyolcz phasisa közül egyik vagy másik ilyen másodlagos okra lesz visszavezethető, de a mi számításainkban fellépettek — úgy tetszik — ily módon nem magyarázhatók. Réteges gömb hangjelenségei talán némi nyomra vezethetnének.



9. ábra. Az öt phasis törésmutatója.

A talált sebességek némelyikét már egyebünnen ismerjük.

Az első phasis sebessége a legnagyobb sebesség, melylyel rugalmas deformatio a Föld középrugalmassága mellett terjedhet.

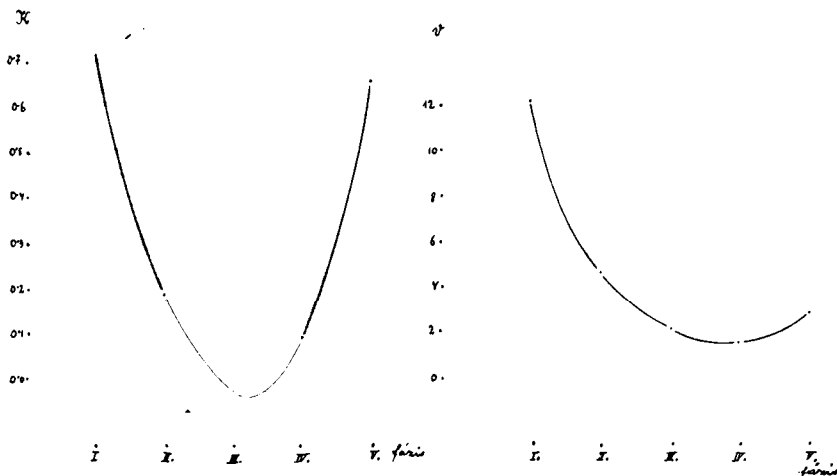
REBEUR-PASCHWITZ a horizontális ingán Strassburgban több éven át tett megfigyeléseiből három különböző módon teljesen egyezően levezeti a Holdnak a Föld szilárd kérgében támasztott dagályát; magasságát 22.3 cm-nek találja. Ha ezt első durva közelítésben úgy fogjuk fel, mint egy a Hold irányában fekvő, a Föld testéből alkotott oszlop megnyúlását, akkor ebből $\sqrt{\frac{E}{s}}$ értéke $14.37 \frac{km}{sec}$. A pontosság itt elérhető fokával ez nyilván az I. phasis sebessége.

A charlestoni rengésnek legjobb, néhány másodperczre pontos időadataiból egyenes sugarak feltételezése mellett $v = 5.197 \frac{km}{sec}$

következett, a mi valószínűleg a II. phasis felszíni, látszó sebessége.

Longitudinális rezgésnek terjedéss sebessége a Föld színén az elmélet szerint $3.108 \frac{km}{sec}$.

A seismikus sebességet eddig mindig a mélység elhanyagolásával mint az epicentralis gömbi távolság és az idő hányadosát számították. OMORI¹ legújabbán az egyes phasisok sebes-



11. ábra. Az öt phasis seismikus indexe.

10. ábra. A terjedéss sebesség az öt phasisban.

ségei számára sok, különösen Japán és Európa között észlelt rengésből a következő sorozatot vezeti le:

$$u_1=13.6; u_2=7.2; u_3=4.6; u_4=3.3; u_5=2.8; u_6=2.4;$$

$$u_7=2.1 \frac{km}{sec};$$

a mely elég közel

$$u_i = \frac{13.10}{i}$$

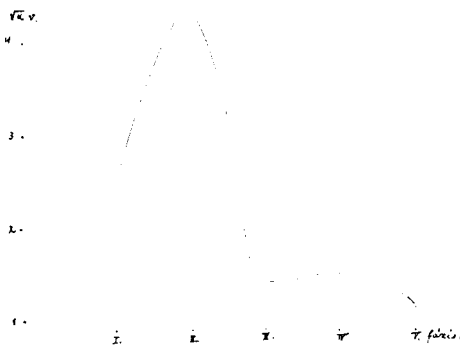
szabálylyal kifejezhető harmonikus sort alkot. Ezen látszó felszíni sebességek természetesen nem állandók, hanem azon pontban, melyben az emersioszög e

¹ Tokyo Sugaka-Butsu-rigakkwai Kigi-Gaiyo. Vol. II. Nr. 15.

$$\frac{v}{u} = \cos e$$

egyenletet elégítik ki. A dolog természetében van, hogy a mi v sebességeink ezeknél kisebbek.

A sebességek pontos ismerete a Föld elasticitási modulusának ismeretére is vezet. Végleges értékekről persze még nem lehet szó és ezért elég legyen megemlítenem, hogy technikai egységekben a Föld felszíni sűrűségével számítva az I. phasisból $E=42000$ adódnék.



12. ábra. A seismikus potential értéke az öt phasisban.

A seismikus sebességekből és a hangnak terjedéséből a levegőben adódik végre az egyes phasisoknak a levegőre vonatkozó törésmutatója, a mely a rengés egyes szakaszaiban $\frac{1}{36.6}$ és $\frac{1}{4.7}$ között változik. Az emersio határszöge, azaz a földfelszínnel párhuzamos sugarak kilépésszöge ennél fogva $77^{\circ}6$ és $88^{\circ}4$ közt van, a kilépő sugárnyaláb tehát legfőlebb 11° nyílású. Az akustikai árnyék jelensége így könnyen érthető.

q -nak megvan kétségtelenül a maga physikai jelentése; függ a felszíni törésmutatótól és a Földnek befelé való sűrűsödésétől és ezen a réven kétségtelenül a geothermikus gradiens-től. Helyes érzékre vall, hogy Japánban ennek megállapítása szorosan a seismologia körébe látszik tartozni. Szinte kétségtelen, hogy v -vel együtt a tengerfenék alatt lényegesen más értékű lesz.

A földrengéseknek tölem adott elmélete tisztán geometriai, tehát az egyes phasisok physikai kapcsolatáról mitsem mondhat. Éppen ezért függetlenül számítottuk egymástól az egyes phasisokat, pedig közfekvő a gondolat, hogy az egyes összetartozó q és v értékek valamelyes vonatkozásban állanak.

Ilyen vonatkozást physikai úton találnom eddig nem sikerült és a rendelkezésre lévő tapasztalati anyag is csekély. A geometriai úton már ismeretes hullámfelületnek physikai alapon is való levezetése valószínűleg célhoz fog vezetni. Rudzskinak e téren való vizsgálatai becses kiindulót adhatnak.

Ha a phasisok rendszámát mint abscissát, a hozzá tartozó seismikus elemet mint ordinátát felrakjuk, minden esetben szép szabályos görbét nyerünk, mely határozottan oki összefüggésre vall. Ilyen a sebességek, a törésmutató és a lökés terjedését előidéző $\sqrt{\frac{q}{1-q}}$ v potential görbéje. A physikai kapcsolat felderítése valószínűleg a rezgési periodus és amplitudo számbavételét is meg fogja követelni.

Utószó.

Teljes tudatában vagyok annak, hogy az itt közzétett adatok a rájuk fordított nagy munka ellenére még korántsem végtegesek. Ehhez legalább is szükséges, hogy a megfigyelések, most már megbízhatóságuk számbavételével, újra számoltassanak. De még ez sem fogja megadni a teljes megnyugvást. Éppen nem lehetetlen, hogy — a mire már a kipattanás ideje és különösen a q görbe symmetriája a középső phasis körül is utal — néhány phasis, a melyeket mi önállóan dolgoztunk fel, másoknak reflexiója. Ekkor a levezetett q és v bizonyára egész helytelen. Az erre vonatkozó vizsgálat folyamatban van, de eredménye még teljességgel ismeretlen. Minden új lépésünknel egész sereg új kérdés is merül fel. De az eddigi vizsgálataink eredménye is már annyira érdekes és tanulságos, hogy éppen nem tartom végzetesnek, ha további tanulmányaink alapján már a közel jövőben is egyik-másik eredményemen módosítanom fog kelleni

AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT OSTWALD-FÉLE ELVRŐL ÉS A MECHANIKAI HŐELMÉLET MÁSODIK FŐTÉTELÉRŐL.

RÉTHY MÓR r. tagtól.

1. §.

FEJÉR LIPÓT szép dolgozata az OSTWALD-féle elvről* a következő vizsgálatokra indít:

1. Egy szabadon mozgó egységtömegű anyagi pont koordinátái legyenek x, y, z és rövidebb jelölésben q_i ($i=1, 2, 3$); eleven ereje legyen T , potenciális energiája legyen $-U$ és összes energiája E , úgy hogy

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 \equiv \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (1)$$

$$E \equiv T - U. \quad (2)$$

«*A*» probléma. A $t=0$ időben adott helyzetű és sebességű anyagi pont írjon le t_1 időtartamban P pályát; összehasonlítva a P pályát egy másik pályával, melyet egy másik ugyanabból a kezdő helyzetből ugyanabban a $t=0$ időben ugyanavval a sebességgel kiinduló pont leír, legyen a t időbeli helyzetkülönbség δs -el jelölve; a δs egyenese a t_1 időtartam alatt leír egy S felületet. Kérdezem, létezik-e egy olyan P pálya és olyan hozzátartozó S felület, hogy a $T - T_0$, $U_0 - U$, és $E - E_0$ energiaforgalmak együttesen vegyenek fel stationär értékeket, és kérdezem, milyen akkor a P és az S ?

Minthogy a kezdőhelyzet és kezdősebesség mindenik pályában egyugyanaz, minthogy azonkívül a T , U és E között a (2) alatti lineár egyenlet áll fenn, tehát a kérdés analitikai fogalmazása abban áll, hogy van-e a

$$\delta t=0, \quad \delta T=0, \quad \delta U=0 \quad (3)$$

* Math. Term. Értesítő, 1905.

egyenletrendszernek megoldása, és ha igen, hogy akkor milyenek a P és az S ?

A feladatot előzetesen geometriai úton oldom meg.

Az L vonalnak a $\delta U=0$ azaz

$$\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z = 0$$

egyenlet következtében merőlegesen kell állania a $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ erőre, és a P pályának olyannak kell lennie, hogy $\delta T=0$ legyen, a mi bizonyára teljesítve lesz, ha az eleven erő, tehát a sebesség is, melylyel az anyagi pont az L egyenesekhez érkezik, variálatlan idő mellett lehetőleg kicsiny folyton-folyvást; ámde akkor az ugyanazon L -ek közötti pályaelemek lehetőleg rövidek lévén, mindenkor merőlegesen állnak L -re, vagyis

$$x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z = 0. \quad (3'')$$

Minthogy pedig

$$\delta T \equiv \frac{d}{dt} (x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) - (x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) = 0, \quad (3''')$$

tehát a $(3'')$ -ből folyólag áll, hogy

$$x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z = 0. \quad (3''')$$

Az S felületet leíró L egyenes ezeknél fogva mindenkor merőleges az erőre, a sebességre és a gyorsulásra; és a P pálya olyan, hogy az erő mindenkor benne fekszik a pálya simuló síkjában.

2. Ugyanahhoz az eredményhez jövünk analitikai úton, a nélkül, hogy a T minimumát követeljük, a következőképen:

Jelöltessék a δs eltolás és a v sebesség illetőleg p gyorsulás közötti szög φ illetőleg ψ -vel, úgy hogy

$$\sum_{i=1}^3 q_i' \delta q_i = v \cos \varphi \delta s, \quad \sum_{i=1}^3 q_i'' \delta q_i = p \cos \psi \delta s. \quad (4')$$

Irassék a $(3''')$ egyenlet ez alakban

$$\frac{d}{dt} (v \cos \varphi \delta s) - p \cos \psi \delta s = 0,$$

vagy a mi ugyanaz, ez alakban,

$$v \frac{d}{ds} (v \cos \varphi \delta s) - p \cos \psi \delta s = 0, \quad (4'')$$

hol s azt az ívhosszt jelöli, melyet a pont $t=0$ -tól t -ig leír. Ugyanis az L egyenesek összeségét, melyeken az egészen tetszős szerinti hosszúságú δs eltolások fekszenek, változatlanoknak és így a φ és ψ szögeket az egyetlen s változó függvényei gyanánt kell tekintenem, mely függvényt meghatározni legközelebbi feladatomban.

Tüstént belátható, hogy $v \cos \psi$ és $p \cos \psi$ szükségképen $=0$; ugyanis a $(4'')$ egyenlet az ellenkező esetben a δs eltolást mint az s függvényét meghatározná, holott a δs -nek a feladat értelmében az s önkényszerű függvényének kell maradnia.

E szerint a $(4')$ egyenletekből folyólag

$$\sum_{i=1}^3 q_i'' \delta q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 q_i' \delta q_i = 0,$$

mely egyenletek azonosak a $(3'')$ és $(3''')$ alattiakkal.

Ez az « A » probléma tehát a virtuális sebességek korlátozása dolgában egyetlen szabad anyagi pont esetén egyenértékű az OSTWALD-féle probléma azon formulázásával, melyet a Math. és Phys. Lapok XIII. kötetének 116. lapján leírtam.

3. « B » probléma. Ez abban különbözik az « A » problémától, hogy az S torzfelületre vonatkozólag azt a követelést szabom még elő, hogy a leíró L egyeneseknek t időbeli iránya ne legyen a pályabeli sebesség, gyorsulás és erő által egyértékűleg meghatározva; a keresett mozgásban pedig érvényes legyen az eleven erőről szóló tétel, mely szerint

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial z} z'.$$

Minthogy a $(3')$, $(3'')$, $(3''')$ egyenleteknek állaniuk kell, mi-helyt csak olyan S felület létezik, a mely az « A » probléma követeléseit kielégíti, minthogy továbbá ez egyenletek csak abban az esetben nem határozzák meg az « L » vonalak irányát megszabó $\delta x : \delta y : \delta z$ viszonyokat, ha együtthatóik között (λ és μ -vel idő-függvényeket jelölve) a

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \lambda x' = \mu x'', \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \lambda y' = \mu y'', \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \lambda z' = \mu z''\end{aligned}\quad (5)$$

egyenletek érvényesek, tehát a mozgó pont P pályája szükségképpen egyenes, még pedig az erő irányával parallel egyenes. A « B » problémának tehát csakis akkor van megoldása, ha az adott erő iránya az egész t_1 időtartamban állandó és ha amellet az adott kezdősebesség vagy parallel a kezdetbeli erővel, vagy pedig zérus értékű. Végül az eleven erő tételéből $\mu=1$ adódik.

4. Az OSTWALD-féle probléma az i. h. 170—175. lapokon tárgyalt kérdésekben FEJÉR fogalmazásában lényegében véve így szól:

Az M anyagi pont, a melynek helyzete és sebessége $t=0$ időpontban adva van, a

$$T - T_0 = U - U_0 \quad (6)$$

elevenerő-egyenlet előírása szerint mozogjon; a t_1 időtartamban leirt pályáját P -nek nevezem. Hasonlítsuk össze a mozgását egy másik ugyanabból a kezdőhelyzetből ugyanavval a kezdősebességgel és ugyanabban az időben kiinduló M ponttal, a mely szintén a (6) elevenerő-egyenlettel előirt menetrend szerint mozog. Az U potential t_1 időbeli értéke legyen az M mozgása esetén

$$U(x_1, y_1, z_1),$$

az M mozgása esetén

$$U(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1).$$

Kérdés, milyennek kell az M pont mozgásának lennie, ha azt követelem, hogy bármekkora t_1 esetén álljon az

$$U(x_1, y_1, z_1) > U(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$$

egyenlőtlenség, és hogy egyúttal a mozgás t -kor független legyen a t_1 -től?

Gondoljuk bármelyik közbenső t időpontban az M pont valódi P pályáját összehasonlítva az M pont P pályájával; ebben a t időpontban, ha úgy tetszik, megszüntethetem a további össze-

hasonlítást, miáltal a t a t_1 helyébe lép; a miből következik, hogy a probléma utolsó követelése maga után vonja, hogy az

$$U(x, y, z) > U(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

egyenlőtlenség igaz legyen $t=0$ -tól $t=t_1$ -ig.

Ez a speciális OSTWALD-féle probléma tehát azt követeli mindenesetre, hogy a

$$\delta t = 0, \delta(T - U) = 0, \delta U = 0 \quad (*) \quad (7')$$

azaz

$$\delta t = 0, \delta T = 0, \delta U = 0$$

egyenletek az egész mozgás tartamában álljanak azzal a kikötéssel, hogy a térben szabadon mozgó pont esetén a $\delta x, \delta y, \delta z$ helykülönbségek (egészen úgy mint a «B» problémában) irányukra nézve sehol se legyenek egyértékűleg határozottak. Az M pont leírta görbéknek érintkezniök kell ugyanis kiinduláskor, máskülönben azonban bármilyen alakuk lehetnek, hiszen a (6) alatti elevenerő-egyenlet a variált pályán bárhol is csak a sebességet szabja meg.

* Hogy $\delta t = 0$ mellett $\delta(T - U) = 0$, az a (6) alatti a maximumra nézve előre kiszabott mellékföltételből következik; hogy pedig evvel a kiszabással $\delta U = 0$ tartozik lenni, az épúgy következik itt, mint a variációszámítás ismeretes szélső érték problémái esetén. Ugyanis a (7') így írható:

$$U(x, y, z) + \delta U(x, y, z) + \frac{1}{2} \delta^2 U(x, y, z) + \dots < U(x, y, z),$$

azaz

$$\delta U(x, y, z) + \frac{1}{2} \delta^2 U(x, y, z) + \dots < 0 \quad (+),$$

mely egyenlőtlenségnek állania kell, mihelyt csak

$$\delta(T - U) = 0, (\delta t = 0).$$

Ámde az utóbbi egyenlet kifejtve azt mondja, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) - (x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) - \\ - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right) = 0, \end{aligned}$$

mely egyenlet értelmében valamely $\delta x, \delta y, \delta z$ értékrendszerrel egyidőben az épen ellenkező értékű $-\delta x, -\delta y, -\delta z$ értékrendszer is meg van engedve. Ez okból a (+) alatti egyenlőtlenségből, melynek csak első tagja elsőrendű $\delta x, \delta y, \delta z$ szerint, az következik, hogy az első tagja szükségképen $= 0$ a szóban levő megengedett $\delta x, \delta y, \delta z$ értéktartományban.

Ez okból e speciális OSTWALD-féle probléma megoldása ugyanaz mint a «B» problémáé.

A síkbeli mozgás esetén, melyre FEJÉR dolgozata szorítkozik, a megoldás az «A» problémánál követett módszerrel igen egyszerűen adódik. Ugyanazok a következtetések ugyanis valamennyien meg vannak engedve a síkra szorítkozó mozgás esetén is, úgy hogy a koordinátákat az előírt síkban x, y -nal jelölvé, a (3'), (3''), (3''') egyenletek helyén most a következők teljesítendők:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y &= 0, \\ x' \delta x + y' \delta y &= 0, \\ x'' \delta x + y'' \delta y &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Ezekből az (5) rendszer első két kettős egyenlete adódik, a melyekből az előírt eleveenerő-egyenlet révén FEJÉR i. h. álló tétele következik.

Megjegyzem, hogy a (8) egyenletrendszer fennállása az OSTWALD-féle elvnek abból az előbb idézett fogalmazásából, melyet magam adtam, síkra szorítkozó pontmozgás esetén közvetlen foly, és hogy ép ilyen a tapasztalattal általánosan meg nem egyező egyenletrendszerek folynak belőle, mihelyt csak a pontrendszer szabadságfoka $= 2$. Ép ez a körülmény indított volt engemet az OSTWALD-féle elvnek további módosítására alaprendszer adjungálása révén.*

5. «C» probléma. Vegyük fel egy anyagi pontrendszer független koordinátái q_i és sebességei q'_i ($i=1, 2, \dots, r$) a $t=0$ időbeli értékeikből kiindulva a t_1 időtartamban azokat az érték-sorokat, a melyek egyrészt a valódi, másrészt a csak lehetséges pályáknak felelnek meg; a valódi és a csak lehetséges q_i értékek közötti különbség a közbenső t időben legyen δq_i . E koordinátakülönbségek közül kettőt, δq_1 és δq_2 -t kiragadva, kérdezem, lehetséges-e olyan rendszerpálya és olyan hozzátartozó (a t időbeli koordináták, sebességek és gyorsulások által egyértékűleg meghatározott) $\delta q_1: \delta q_2: \delta q_i$ ($i=3, 4, \dots, r$) értékrendszer, a me-

* V. ö. idézett helyen 118—119. lapon. Ez utóbbi oldal 5. sorában «nincs» előtt beiktatandó «általánosan».

lyek mellett s $T - T_0$, $U_0 - U$ és $E - E_0$ energiaforgalmak bármekkora ∂q_i -k ($i=3, 4, \dots, r$) esetén együtt vesznek fel stationär értékeket?

Itt is annak a megvizsgálásán mulik, hogy a (3) alatti simultán egyenletek teljesíthetők-e, és hogy a rendszerpálya és a hozzátartozó $\partial q_1 : \partial q_2 : \partial q_i$ viszonyrendszer mikép számítható ki?

A megoldás arithmetikai úton így adódik: A szokásos

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = p_i$$

jelöléssel élve

$$\delta T \equiv \frac{d}{dt} \sum p_i \delta q_i - \sum \left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \quad (9)$$

A $\delta T=0$ helyén felirom a kérdéstételünk szempontjából vele egyenértékű

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + p_i \delta q_i) - \\ & \left(\frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) \delta q_1 - \left(\frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) \delta q_2 - \left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (10) \\ & \quad \quad \quad (i=3, 4, \dots, r) \end{aligned}$$

egyenletrendszert.

Ha már létezik a követelményeknek megfelelő rendszerpálya és $\partial q_1 : \partial q_2 : \partial q_i$ értékrendszer, akkor a

$$\begin{aligned} H_i & \equiv p_1 \frac{\partial q_1}{\partial q_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial q_i} + p_i, \\ K_i & \equiv \left(\frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) \frac{\partial q_1}{\partial q_i} + \left(\frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) \frac{\partial q_2}{\partial q_i} + \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \end{aligned}$$

értékek valamennyien egyértékűleg meg vannak határozva a t időbeli koordináták, sebességek és gyorsulások által, és akkor a (10) egyenletrendszer, tehát röviden írva a

$$\frac{d}{dt} (H_i \delta q_i) - K_i \delta q_i = 0, \quad (i=3, 4, \dots, r)$$

egyenletrendszer *akármilyen* lefolyású δq_i értéksorok esetén igaz. De ez csak úgy lehetséges, ha a

$$H_i = K_i = 0, \quad (i=3, 4, \dots, r)$$

vagyis ha a

$$\sum_{i=1}^r p_i \delta q_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^r \left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (11')$$

symbolikus egyenletek teljesíthetők, a midőn a δq_i -k közül bármelyik hármat kivéve, a többi helyébe eleve zérus értéket tesztek.

Minthogy azonkívül $\delta U = 0$, azaz

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (11'')$$

egyenletet is kell teljesítenem, tehát a $\delta q_1 : \delta q_2 : \delta q_i$ viszonyok meghatározására ez a vonalos egyenletrendszer áll rendelkezésemre :

$$p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + p_i \delta q_i = 0,$$

$$\left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(\frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) \delta q_2 + \left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (12)$$

(i=3, 4, ..., r)

Ezekből a rendszerpálya számára

$$\frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \quad \frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \quad \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$\frac{p_1}{\frac{\partial U}{\partial q_1}} \quad \frac{p_2}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} \quad \frac{p_i}{\frac{\partial U}{\partial q_i}} = 0 \quad (13)$$

i=3, 4, ..., r

egyenletrendszer adódik; úgy hogy két koordináta, pl. q_1 és q_2 lefolyása akármilyen lehet, és csak ha ezek meg vannak adva vagy választva, csak akkor vannak így meg az anyagi rendszer mozgásegyenletei.

Végezetül kiemelem, hogy e «C» probléma a virtuális sebességeket a (11') egyenletekkel korlátozván, e tekintetben teljesen egyenértékű az OSTWALD-féle elvnek fentidézett helyen leírtam módosításával.

6. «*D*» probléma. Ez abban különbözzék a «*C*» problémától, hogy a $\delta q_1 : \delta q_2 : \delta q_i$ ($i=3, 4, \dots, r$) viszonyokra vonatkozó azt a megszorítást, hogy egyértékűleg meghatározottak legyenek, elejtem, és hogy ellenben a valódi mozgásra nézve az elevenerő tételének érvényességét előírom.

Minthogy a (11') és (11'') egyenleteknek állaniuk kell, mi-helyt a probléma követelményeit teljesítő csak egy $\delta q_1 : \delta q_2 : \delta q_i$ ($i=3, 4, \dots, r$) rendszer is létezik, tehát e «*D*» probléma ese-tén még két további korlátozás lép fel: *először* is a (11'), (11'') egyenleteknek nem szabad a nevezett viszonyok egyikét sem egy-értékűleg meghatározniuk, és *másodszor* a mozgásban állani kell az elevenerőről szóló tételnek.

E szerint a (11'), (11'') és (11''') egyenleteknek csak időtől függő multiplicatorban szabad egymástól különbözniök, más szó-val az anyagi rendszer mozgásegyenleteinek (λ és μ multiplicato-rokat jelölve) ilyen alakúnak kell lenniök:

$$\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} = \lambda p_i = \mu \left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right). \quad (14)$$

($i=1, 2, \dots, r$)

Továbbá az elevenerőről szóló tételből folyólag $\mu=1$.

Miként az előbbi egyszerű esetben, könnyű megmutatni, hogy holonom kényszeregyenleteknek alávetett anyagi rendszer esetén általánosan is ez a megoldása a speciálisabb OSTWALD-féle problémának.

7. Csak rá kell tekinteni a (13) egyenletrendszerre, tüstént látjuk, hogy ha a q_i koordinátákból kettő, pl. q_1 és q_2 a LAGRANGE-i egyenletek szerint mozog, akkor valamennyi q_i is ugyanazt a tör-vényt követi. Miután az 5.-beli egyenletek alakja változatlanul megmarad, ha bármennyire nagyobbítjuk is a q_i -k számát, ez észrevétel önként rávezet ama alaprendszer bevezetésének mód-szerére, melylyel az OSTWALD-féle elvnek szerintem való általáno-sabb fogalmazása a LAGRANGE-i mozgásegyenletekre vezet. Nem ter-jeszkedek ki tovább se erre, se az elv további általánosítására akár-milyen erőkre és összeköttetésekre vonatkozólag; e tekintetben előbbi dolgozataimra utalva, a következő §-ban arra a haszonra kívánok figyelmessé tenni, mely a «*C*» problémából és annak ál-

talánosításából adódik, ha a megoldásban a q_1 és q_2 függvényeket, legalább eleve, semmiféle megszorításnak se vetjük alá.

2. §.

8. «*E*» probléma. Legyen adva az időtől is függő kényszereknek alávetett anyagi pontrendszer, melynek szabadságfoka > 2 . Az m_i anyagi pontra az x_i kartéziusi koordinata irányában ható erő legyen X_i . Követelem, hogy az anyagi rendszer valódi mozgása olyan legyen, hogy a $\partial q_{i_1}, \partial q_{i_2}, \partial q_{i_3}$ független variációk bármelyik tripluma számára létezzék olyan a valódi mozgástól meghatározott $\partial q_{i_1} : \partial q_{i_2} : \partial q_{i_3}$ viszony, melynél fogva az anyagi rendszer elevenerejének variációja minden időpontban a bármikép változó ∂q_{i_1} -től függetlenül elenyészik, ha e három ∂q kivételével a többi $= 0$. Kérdés, mik a rendszer mozgásegyenletei, ha ezenkívül azt is követelem, hogy a szabad erők virtuális munkája ne legyen pozitív?

Az első követelés ugyanazokat az egyenleteket vonja maga után, mint a neki megfelelő a «*C*» problémában, t. i. a (11') alattiak szerinti e következőket:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3n} m_i x_i'' \partial x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^{3n} m_i x_i' \partial x_i &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Ha a t időben fennálló összeköttetések a rendszerben az

$$F_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, r_1) \quad (16)$$

vonatkozásokkal vannak kifejezve, úgy hogy

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \partial x_i = 0, \quad (j=1, 2, \dots, r_1)$$

akkor ezekből, a (15) alattiakból és a probléma utolsó követeléséből, miszerint

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \partial x_i \leq 0, \quad (17)$$

az anyagi pontrendszer mozgása számára

$$X_i = (1 + \lambda) m_i x_i'' + \mu m_i x_i' + \sum_{j=1}^{3n} l_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad (18)$$

($i=1, 2, \dots, 3n$)

differenceziálegyenletrendszer adódik, hol az $(1 + \lambda)$, μ , l_1, \dots, l_{3n} LAGRANGE-féle szorzókat jelentenek. Miután pedig e szorzók száma nagyobb a (16)-ban foglalt egyenletekénél, tehát a megoldás addig, a míg új adatok nem járulnak a problémához, határozatlan.

Ezentúl úgy akarom a dolgot elképzelni, hogy az anyagi pontrendszer egy közegben mozog, a mely mozgásában következőleg vesz részt: a közeg egy λm_i változó nagyságú tömegrésze akkora sebességgel mozog, mint az általa körülvelt m_i anyagi pont, míg a közeg többi része nyugalomban maradván, az m_i -re surlódási erőt gyakorol az m_i -nek v_i sebességével ellenkező irányban; a surlódási erő nagysága $\mu m_i v_i$, hol μ nem negatív. A λ és μ adott időfüggvények legyenek.

Igy képzelve el a dolgot, λT az együttmozgó tömeg elevenereje, míg

$$-\sum \mu m_i x_i' x_i' dt = -2\mu T dt$$

a surlódási erőnek dt időelemben kifejtett munkáját jelenti.

Az anyagi pontok közötti összeköttetések kétfélék lehetnek: az időtől függetlenek és az időtől függők. Az elsőnemű összeköttetések esetén

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' = 0;$$

a második nemű összeköttetések esetén ellenben

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' = - \frac{\partial F_j}{\partial t}.$$

Felteszem, hogy a második nemű összeköttetések attól erednek, hogy a pontrendszer adott törvény szerint mozgó külső tömegekkel van összekapcsolva, úgy hogy

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial \xi_{jk}} \xi_{jk}',$$

hol a ξ_{j_1} , ξ_{j_2} , ξ_{j_3} ama külső anyagi pont koordinátáit jelentik, amelyhez tartozó tömeg az F_j -nek időtől explicite való függését okozza. Ekkor $-\lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial \xi_{jk}}$ a külső ξ_{jk} koordinátára az összekapcsolás révén gyakorolt erőt, és

$$-\lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial \xi_{jk}} \xi'_{jk} dt$$

a dt idő alatt az erő kifejtette külső munkát jelenti. Azért

$$-\sum_{j=1}^v \lambda_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x'_i dt$$

a dt idő alatt a belső pontrendszerbe kívülről bevezetett munka nagyságát adja meg.

Ha végül feltesszük, hogy az X_i erőknek az időtől explicite független potenciáljuk U van, akkor a

$$d((1+\lambda)T - U) + \sum_{j=1}^v \lambda_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x'_i dt = dQ$$

összeg, vagyis a közeggel kiegészített anyagi rendszer energiája gyarapodásának és a kívülről bevezetett munkának a különbsége, miként a (18) egyenletrendszerből könnyen található,

$$= Td\lambda - 2\mu Tdt.$$

Az anyagi pontrendszer mozgása e szerint a hőelmélet második főtételehez analog törvényt követ, és érdekes, hogy surlódásmentes rendszer esetén $dQ = Td\lambda$, tehát egész körfolyamra

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

adódik, míg surlódás létezése esetén egész körfolyamra

$$\int \frac{dQ}{T} = -2 \int \mu dt < 0$$

vonatkozás érvényes. Az $\int \frac{dQ}{T}$ fogyása körfolyamatok ismétlésekor, e felfogás szerint, a közegnek a test anyagával való surlódásából ered.

Egész körfolyamra természetesen épűgy érvényes az is, hogy

$$\int \frac{dQ}{T_f(\lambda)} \leq 0,$$

hacsak $f(\lambda)$ a λ -nak valós pozitív függvényét jelenti.

9. Legyen az anyagi rendszer m_i tömegpontjának mozgása két részből álló, úgy hogy az m_i koordinátái $x_i + \xi_i$ alakban írva, az x_i -ket a belső, a ξ_i -ket a külső mozgás koordinátáinak nevezhetem. Az x_i -kre nézve az « E » problema követelményei teljesítenek, ellenben a ξ_i -kre nézve álljanak a LAGRANGE-féle mozgási egyenletek

$$\Xi_i = m_i \xi_i'' + \sum_{j=1}^{v_a} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \xi_i},$$

hol a Ξ_i erőknek potenciáljuk legyen, és hol az f_j függvényekkel kifejezett kényszerfőltételekről hasonló fölteséseket tesztek, mint fent az F -ekről. Ez az összetett mozgás szintén követi azt a törvényt, mely a hőelmélet második főtételenek teljes analogonja.

Tudvalevő, vannak másnemű anyagi rendszerek is, melyek mozgása a reversibilis folyamatu hőmozgással a hőelmélet második főtétele dolgában megegyez. Legyen megengedve, a 8-ban eirthez hasonló eljárással egy anyagi rendszert szerkesztennem, melynek mozgása a hőmozgásokkal egy másik tekintetben is analog.

« F » probléma. Legyen egy anyagi pontrendszer adva, a mely, részben, az időtől is függő összeköttetéseknek is alá van vetve. Mindenik m_i tömegpont mozgását kettősztvá gondolom, úgy hogy az m_i koordinátái $x_i + \xi_i$ alakúak, és nevezem az x_i -ket a külső, a ξ_i -ket a belső mozgás koordinátáinak. Az egész mozgás eleven ereje legyen egyenlő a külső és a belső mozgás elevenerőinek összegével, vagyis álljon e kényszeregyenlet:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i x_i' \xi_i' = 0. \quad (19)$$

A δx_i és $\delta \xi_i$ variációkra nézve kikötöm, hogy a következő homogén egyenleteket teljesítsék:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i x_i' \delta \xi_i = 0, \quad (19')$$

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \xi'_i \delta x_i = 0, \quad (19'')$$

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \xi'_i \delta \xi_i = 0, \quad (20')$$

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \xi'_i \delta \xi_i = 0, \quad (20'')$$

mely egyenletek közül az első kettő azt fejezi ki, hogy az összes elevenerő nemcsak a valódi, hanem a variált mozgásban is egyenlő a külső és belső mozgás elevenerőinek összegével, míg a két utolsó értelmében a belső mozgás elevenereje a valódi mozgásban akkora, mint a variáltban.

A δx_i és $\delta \xi_i$ azonkívül még a

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{ji} \delta x_i \leq 0; \quad (21')$$

($j=1, 2, \dots, r_1$)

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{ki} \delta \xi_i \leq 0; \quad (21'')$$

($k=1, 2, \dots, r_2$)

vonatkozásokat is teljesítsék, melyek azt mondják ki, hogy az anyagi pontok között t időben bizonyos kapcsolatok állnak fenn, vagy hogy a pontok bizonyos felületen nem hatolnak át.

Az m_i külső mozgására X_i , az m_i belső mozgására Ξ_i erők hassanak. Megvizsgálandó a rendszerpálya, melyben a

$$\sum_{i=1}^{3n} [X_i \delta x_i + \Xi_i \delta \xi_i - m_i x''_i \delta x_i] \geq 0 \quad (21)$$

vonatkozás teljesül.*

Mínthogy a t időpontban fennálló összeköttetése száma $\nu_1 + \nu_2$, és mínthogy a δx_i és $\delta \xi_i$ még azonfelül a (19'), (19''), (20'), (20'') egyenletekkel is korlátozva vannak, tehát az n -nek mindenekelőtt olyan nagynak kell lennie, hogy $6n - \nu_1 - \nu_2 - 4 \geq 1$ legyen. Ha ily nagy az n , akkor a mozgásegyenletek ezek:

* A bal oldalhoz még $\sum m_i \xi'_i \delta \xi_i$ hozzácsatolható a következmények változtatása nélkül. Ennélfogva a (21) által kifejezett követelés a szóban levő anyagi rendszerre nézve a D'ALEMBERT-FOURIER-féle elvet mondja ki.

$$m_i x_i'' + \mu_1 m_i' \xi_i' + \mu_2 m_i \xi_i'' - X_i + \sum_{j=1}^{\nu_1} l_j a_{ji} = 0, \quad (22')$$

$$(1 + \lambda) m_i \xi_i'' + \mu_1 m_i x_i' + \mu_2 m_i x_i'' + \mu \xi_i' - \Xi_i + \sum_{k=1}^{\nu_2} \lambda_k a_{ki} = 0, \quad (22'')$$

($i=1, 2, \dots, n$)

hol $(1 + \lambda)$, μ , μ_1 , μ_2 , l_1, \dots, l_{ν_1} , $\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu_2}$ LAGRANGE-i szorzók, melyek meghatározására csak $\nu_1 + \nu_2 + 1$ egyenlet áll rendelkezésre, minélfogva közülük háromnak értékváltozására nézve még szabad választás van megengedve.

Az anyagi rendszer energiabeli gyarapodását a következő szemlélet alapján akarom megvizsgálni:

1. A belső mozgásban résztvesz az m_i tömegeket környező közeg egy része, míg a többi része nyugszik; e részek nagysága változik, a mennyiben nyugvó részek később mozgásba jöhetnek és fordítva.

2. A közegnek az a része, mely az m_i tömeggel együtt mozog, az m_i -nek φ_i «belső» sebességével mozog.

3. A közeg nyugvó része az m_i belső mozgására surlódási erőt gyakorol a φ_i belső sebességgel ellenkező irányban, mely surlódási erő nagysága $\mu m_i \varphi_i$, hol μ nem negatív.

Jelölve T -vel a pontrendszer külső, T -vel a pontrendszer belső elevenerejét, a pontrendszerrel közölt dQ energia számára, ugyanazon az úton mint az « E » problema esetén, a következő kifejezést nyerjük:

$$dQ = d \left[T + (1 + \lambda) \mathsf{T} - \sum_{i=1}^{3n} X_i dx_i - \sum_{i=1}^{3n} \Xi_i d\xi_i + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{3n} \sum_{i=1}^{3n} l_j a_{ji} dx_i + \sum_{k=1}^{\nu_2} \sum_{i=1}^{3n} \lambda_k a_{ki} d\xi_i \right].$$

A jobboldali három első tag összege ugyanis az összes mozgó tömegek összes energiájának növekedését adja meg, míg az utolsó két tag a rendszerből kivezetett munkával egyenlő.

Ha más részről a $(22')$ egyenleteket x_i' -vel, a $(22'')$ egyenleteket ξ_i' -vel megszorozván, valamennyit összeadjuk, akkor a μ_1 és a μ_2 -vel megszorozott tagok a (19) folytán elmaradnak, úgy hogy a dQ számára most ezen egyenlet adódik:

$$dQ = \mathsf{T} d\lambda - 2\mu \mathsf{T} dt. \quad (23'')$$

A dQ energia eloszva a belső mozgás elevenerejével e szerint surlódástalan mozgás esetén = egy függvény teljes differenciáljával, surlódásos mozgás esetén ellenben = a teljes differenciál egy pozitív mennyiség híján.

Ha a $\frac{dQ}{dt}$ értéklefolyása adva van és ha ismeretes a μ (t. i. a surlódási erő) törvénye, akkor e (23'') egyenlettel meg van határozva a λ érték lefolyása; ha azután a (21') és (22'') differenciálegyenletek és az adott $\nu_1 + \nu_2 + 1$ számú kényszeregyenlet segítségével az $l_1, l_2, \dots, l_{\nu_1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu_2}$ szorzókat elimináljuk, akkor nyerünk egy egyenletet a $\lambda, \mu, \mu_1, \mu_2$ szorzók között, a mely ezek szerint még két ismeretlen függvényt, μ_1 és μ_2 -t tartalmaz.

A (22') és (22'') differenciálegyenletek a $\nu_1 + \nu_2 + 1$ számú kényszeregyenlettel együtt végtelen sok mozgásformát tartalmaznak tehát, a melyek a hőelmélet második főtételéhez analog törvényt követnek. E formák között a legegyszerűbbek a $\mu_2 = 0$, azután a $\mu_2 = \sqrt{\lambda}$ értékekkel jellemzettek; az utóbbira vonatkozó igen egyszerű számításokat mellőzöm.

Megjegyzem még, hogy az itt leirt mechanikai modell a (23'') egyenlettel kimondott tétel érvényességének megváltoztatása nélkül általánosabbítható.

10. Az abszolút hőmérsék ϑ és az entropia S analog mennyiségek a λ és T mechanikai mennyiségekhez, és a vonatkozást közöttük legegyszerűbben az ideális gázok szemléletével nyerhetni. Az ideális gáz belső energiája ugyanis

$$= m C_v \vartheta,$$

ha m a tömegét és C_v az állandó térfogat melletti fajmelegét jelöli dinamikai mértékben; minthogy pedig a gázmolekulák közötti vonzás elhanyagolható, azért az előző 9-beli felfogást véve alapul a mozgás e belső energiája

$$= (1 + \lambda) T,$$

minél fogva

$$m C_v \vartheta = (1 + \lambda) T. \quad (24')$$

Más részről a (23'') egyenlet tekintetbe vételével

$$dQ = m \vartheta dS = T d\lambda - 2\mu T dt,$$

tehát tekintve, hogy ideális gázoknál a surlódás $= 0$, áll hogy

$$m\vartheta dS = T d\lambda. \quad (24'')$$

A (24') és (24'') egyenletekből pedig következik, hogy

$$dS = C_v \frac{d\lambda}{1+\lambda},$$

tehát C -vel integral állandót jelölvé

$$1+\lambda = C e^{\frac{S}{C_v}}. \quad (25')$$

Igy hát a (24') egyenletből folyólag

$$\vartheta = \frac{C}{mC_v} T e^{\frac{S}{C_v}}. \quad (25'')$$

Az abszolút hőmérsék e szerint a molekulák elevenerején kívül még az entropiától is függne.*

11. Az eddigi eredményeket a (18) egyenletrendszernek a 8-ban részletezett specziális értelmezése révén nyertük. Ugyanannak az egyenletrendszernek egy másik specziális értelmezésére vezet a

$$\mu = \frac{d\lambda}{dt}$$

felvétel, melyet elfogadva, a (18) rendszer így írható:

$$X_i = \frac{d}{dt} ((1+\lambda) m_i x'_i) + \sum_{j=1}^v l_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad (18'')$$

$(i=1, 2, \dots, 3n).$

Feltéve itt is, hogy az X_i erőknek az időtől független potenciáljuk van, az következik e (18'') alatti egyenletrendszerből, hogy

$$d((1+\lambda) T - U) + \sum_{j=1}^v l_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x'_i dt = -T d\lambda, \quad (26')$$

* Utólagosan észrevettem, hogy maga a (23'') egyenlet is lényegesen általánosítható; az általánosítást alapozó mozgásformák között van egy olyan is, a melynek esetén az abszolút hőmérsék a molekulák eleven erejével arányos és az entropiától független. Ez észrevétel indított a 11—14. pontnak megírására.

hol T a rendszer eleven ereje. Ha a közeget együttmozogva képzeljük itt is, mint a 8-ban, azzal a különbséggel, hogy most a surlódás ki van zárva, akkor az ezen egyenlet szerint a közeggel kiegészített anyagi pontrendszerbe vezetett energia

$$dQ = - Td\lambda. \quad (26'')$$

Ezek szerint a közeg együttmozgása az anyagi pontrendszerrel az egyik esetben más eredményre vezet, mint a másikban: tényleg az első esetben a rendszerbe vezetett pozitív energia a mozgó anyag gyarapodásával, a másodikban annak fogyásával járt. A két eset közötti különbséget a következő tágabb értelemben vett mechanikai modell magyarázza meg: kössünk össze mereven egyszer két egyenlő nagyságú és irányú sebességgel mozgó, külső hatásnak alá nem vetett tömeget M és $Md\lambda$ -t, máskor a v sebességgel mozgó M tömeget a nyugvó $Md\lambda$ tömeggel; az első esetben az $M + Md\lambda$ tömeg eleven ereje $\frac{Mv^2}{2} d\lambda$ -val nagyobb, mint volt előbb az M tömegé, a másodikban pedig (felsőbbrendű kicsinyektől eltekintve) $\frac{Mv^2}{2} d\lambda$ -val kisebb. Az első esetben tehát a tömeg gyarapodása az eleven erő növekedésével, a másodikban annak fogyásával jár. Ha fordítva az $Md\lambda$ tömeget megszabadítva az M -mel való merev összekapcsolástól változatlan sebességgel elvezetjük, akkor a hátramaradt M tömeg eleven ereje természetesen kisebb lesz, mint előbb az $M + Md\lambda$ tömegé volt. Lehetetlen azonban az $Md\lambda$ (pozitív) tömeget úgy elvezetni, hogy a hátramaradt M tömeg eleven ereje nagyobbá legyen, mint a mekkora előbb az $M + Md\lambda$ tömegé volt. Másképp áll a dolog, ha negatív tömeget is megengedünk azzal az értelmezéssel, hogy a mozgásmennyiségek megmaradásának az elve igaz maradjon függetlenül a tömeg előjelétől; ez általánosítással minden nehézség el van hárítva. Ekkor a mechanikai modell természetesen nem közönséges értelelem szerinti.

Ha így az $m_i d\lambda$ tömegek t_0 -tól t_1 időig folyton-folyvást hozzávezettetnek a pontrendszer tulajdonképeni tömegeihez, a melyekre az X_i erők stb. is hatnak, akkor mechanikai modellünkre igaz lesz a (18) egyenletrendszer, és igazak lesznek a hozzávezetett energiára vonatkozó eredményeink; és a szerint,

a mint az $m_i d\lambda$ tömeg az m_i -ével egyenlő sebességet avagy 0 sebességet hoz magával a $d\varphi$ számára, a (23'') kifejezés avagy a (26'') alatti lesz igaz.

12. A 8. és a 11.-ben leírt specziálesetek egyesítésével irom

$$X_i = \lambda_1 m_i x_i'' + \frac{d}{dt} ((1 + \lambda_2) m_i x_i') + r m_i x_i' + \sum_{j=1}^r l_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}; \quad (18'')$$

($i=1, 2, \dots, 3n$)

az előbbi λ , μ és a mostani λ_1 , λ_2 , r között (hol $r \geq 0$ tételeztetik föl) e vonatkozások állnak fenn:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \lambda, \\ r + \frac{d\lambda_2}{dt} &= \mu. \end{aligned} \quad (18''')$$

Épűgy képzelve a közeg együttmozgását az anyagi pont-rendszerrel, mint a hogy az imént leírtuk, és ugyanazokat a feltevéseket fogadva el az erőkre és kapcsolatokra nézve, mint 8.-ban, az következik a (18'') alapján, hogy a közeggel kiegészített rendszerrel az időelemben közölt energia

$$dQ = Td(\lambda_1 - \lambda_2) - 2rTdt, \quad (26''')$$

hol a dQ épűgy mint fent a következő kifejezéssel van adva

$$dQ = d((1 + (\lambda_1 + \lambda_2)) T - U) + \sum_{j=1}^r l_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} x_i' dt. \quad (26^{iv})$$

Ha surlódás nincs, akkor e

$$dQ = Td(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (26^v)$$

13. A 8. és 10.-beli értelmezések helyébe a következő is tehető: $A - \lambda_1 m_i x_i''$ és $-\lambda_2 m_i x_i''$ tagok a (18'') egyenletrendszerben úgy foghatók fel, mint a közegtől származó erők; világos, hogy állandó λ_1 , λ_2 esetén ezekhez az erőkhez tartozó potenciális energia

$$= (\lambda_1 + \lambda_2) T;$$

ugyane kifejezést fogadva el az erők potenciális energiája számára változó λ_1 és λ_2 esetén is, nem fogok ellenmondásokba

keveredni. De ekkor az anyagi rendszernél az időelemben közölt energia számára ugyanazt a kifejezést kapom mint előbb.

Az anyaggal együttmozgó közeg feltevése bizonyosan szemléletesebb; a helyett az a felfogás, hogy a közeg a benne mozgó anyagra efféle erőket gyakorol, általánosabb természetű; elannyira, hogy a midőn pl. a hőmozgást egyenletrendszerünkkel akarjuk leírni, úgy gondoljuk a dolgot, hogy ama $-\lambda_1 m_i \dot{x}_i''$, ... tagok erőktől származnak, melyeket a közeg a benne mozgó ponderábilis anyagra gyakorol, és legfeljebb csak azt mondhatjuk, hogy az erők olyanok, mintha bizonyos inponderábilis tömegek vezetődnének be a ponderábilis anyagi rendszerbe.

14. Ha már most a 12.-beli általánosabb egyenletrendszert veszem alapul a hőmozgással való összehasonlításnál, akkor a (24') helyett

$$m C_v \vartheta = (1 + \lambda_1 + \lambda_2) T \quad (27')$$

egyenlet fog szolgálni az abszolút hőmérséknek dinamikai mennyiségekkel való értelmezéséül, ha C_v -n egy a szóban levő testre nézve sajátlagos állandót értek. Épúgy a (24'') helyébe a (26'') révén ez lép:

$$m \vartheta dS = T d(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (27'')$$

A (27') és (27'') egyenletek egyesítésével pedig

$$(1 + \lambda_1 + \lambda_2) dS = C_v d(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (27''')$$

összefüggést nyerem λ_1 , λ_2 és S között, és tegyük hozzá, hogy ez közöttük az egyetlen szükségképeni összefüggés. Ennélfogva egészen tetszésem szerint vehetek fel közöttük még egy összefüggést, mely természetesen már teljesen hypothetikus lesz.

Legyen a felvétel ez:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = f(S), \quad (28')$$

hol $f(S)$ az S -nek egyértékű véges differenciálható függvényét jelenti, akkor a (27''')-ból következik, hogy

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 = C_v f'(S), \quad (28'')$$

hol $f'(S)$ az $f(S)$ deriváltját jelenti S szerint, mely a (27') folytán $= \frac{m \vartheta}{T}$ és így mindenestre positiv mennyiség. Az $f(S)$ ily-

nemű megválasztásával válnak csak az alapul vett (18'') egyenletrendszer jobboldali első két tagjai határozottá. Továbbá ekkor az S valós parameternek minden folytonos sora, a mely azzal az értékkel végződik, a melylyel kezdődik, zárt körfolyamot állapít meg. A legegyszerűbb $f(S)$ -ekre vezető feltételek ezek:

$\alpha)$ felvétel:

$$\lambda_2 = 0.$$

Ekkor a (25') alatti eredmény adódik; tehát

$$\beta) \text{ felvétel: } f(S) = Ce^{\frac{S}{C_v}} - 1. \quad (29')$$

$$\lambda_1 = 0.$$

Ekkor

$$\gamma) \text{ felvétel: } f(S) = -Ce^{-\frac{S}{C_v}} + 1. \quad (29'')$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Ekkor

$$f(S) = \frac{S - S_0}{C_v}, \quad (29''')$$

hol S_0 állandó bármekkora lehet. Irjuk még oda, hogy

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{S - S_0}{2C_v}. \quad (30')$$

Továbbá a (27')-ből folyólag ekkor még

$$mC_v\theta = T; \quad (30'')$$

szóval a $\gamma)$ felvétel esetén Clausius ismeretes tétele¹ lényegesen változatlanul adódik.

$\delta)$ felvétel:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A \cos \frac{S - S_0}{c},$$

hol c és A állandók közül az utóbbi abszolút értéke < 1 . E felvételt csak azért említem, mert az előbbi igen egyszerű felvétel ennek határesetére $\lim. A = 0$ révén.

¹ Pogg. Ann. Bd. 100. S. 370. 1857.

ϵ) felvétel:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A_1 e^{\frac{S}{c}} + A_2 e^{-\frac{S}{c}},$$

hol A_1 , A_2 és c állandók, azért említésre méltó, mert ez állandók kellő választásával elérhető, hogy $\lambda_1 + \lambda_2$, mint maga λ_2 is, pozitív legyen az S mindenik valós értékénél. Így hát ezzel a felvétellel minden megfordítható körfolyam elejétől végig előállítható a 11.-ban leírt módon (szűkebb értelemben vett) mechanikai modell segítségével.

Ha azonban nem fektetünk rá súlyt, hogy a mechanikai modell pozitív tömegekre szorítkozzék, akkor a γ) felvétel vezet a hőközlés legegyszerűbb ilyenmű modelljére, melyet azért írok itt le részletesebben, mert úgy vélem, hogy az elektrodynamikai tünetények leírásánál használatos modellhez való hasonlóságánál fogva érdekes.

Abból a feltevésből indulok ki, hogy a testek mozgásban levő molekulák halmazatai; mindegyik molekula atomok alkotta súlyos magból és inponderábilis burokból áll, melynek anyaga a magvat is áthatja és kétféle ellentett előjelű, nagyságra egyenlő különvált tömegekre oszlik; ez inponderábilis tömegrészek abszolút értékeinek az összege úgy aránylik a mag tömegéhez, mint a test entropiája a C_p -vel jelölt fajlagos melegéhez. A molekulák közötti teret kétféle mozgásállapotú inponderábilis anyag tölti meg, melyeket nevezünk elektronoknak: az I. fajta elektronok mozgásban vannak, és pedig az A molekula határán levő az ott uralkodó sebességben; a II. fajta elektronok sebessége $= 0$; mind a két fajta elektron polározott állapotban lévén, két egyenlő nagy tömegű $+$ és $-$ ionra oszlik.

A test mindenik A molekulájába melegfelvétel esetén az I. és II. fajta ionokból egyenlő abszolút értékű tömegek áramlanak be, és pedig az I. fajtából való $+$ ionok az A burkának pozitív, a II. fajtából pedig $-$ ionok a burok negatív tömegű részein. Értetődik, hogy meleg elvezetés esetén az I. fajtából való $-$ ionok áramlanak az A burkának negatív, és II. fajtából való $+$ ionok a pozitív tömegű részeibe.

Végezetül megjegyzem, hogy e modell a hővezetés ábrázolására is alkalmas ilyenképen. Ha az A test molekuláinak a

sebessége végtelen kicsinyenyl kisebb, mint a B testéinek a sebessége, akkor az A molekuláknál az imént leírt minta szerinti melegfelvétel, a B molekuláknál pedig melegelvezetés történik olykép, hogy a két ellenkező irányokban egyenlő mennyiségű ionok áramlanak. E körülménynél és a sebességkülönbség végtelen kicsiny voltánál fogva az A molekulák energiája annyival nő, a mennyivel a B molekuláké fogy.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1905 október 23.-án tartott üléséből.)

ASYMPTOTICUS ELŐÁLLÍTÁSOK A LINEÁR DIFFERENTIÁLRENDSZEREK ELMÉLETÉBEN.

SCHLESINGER LAJOS 1. tagtól.

(Második közlemény.)¹

VI.

Alkalmazás arra az esetre, a mikor a differentiálrendszer canonicus alakú és a determináló fundamentalegyenletek gyökei függetlenek a parametertől.

Legyen most az (A) differentiálrendszer *canonicus alakú*, azaz

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda \frac{g_{\lambda k}(x)}{\varphi(x)}, \quad (A)$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

a hol

$$\varphi(x) = (x-a_1) \dots (x-a_\sigma), \quad (1)$$

a $g_{\lambda k}(x)$ -ek pedig az x -nek legfőlebb $\sigma-1$ -edfokú egész racionális függvényei. Az a_1, \dots, a_σ pontok legyenek a μ -tól függetlenek, ellenben legyen

$$g_{ik}(x) = \mu \left(g_{ik}^{(0)} + \frac{1}{\mu} g_{ik}^{(1)} + \dots \text{in inf.} \right); \quad (2)$$

e sorok legyenek $|\mu| > R$ tartományon belül convergenssek, a hol R az x és az a_1, \dots, a_σ -któl független, a $g_{ik}^{(n)}$ -kről pedig fölteszszük, hogy az x -nek egész racionális függvényei.

¹ Az ezen Értesítő XXIV. kötetének 619. s következő lapjain közölt czikk befejezése.

Tekintsük a következő algebrai egyenletet:¹

$$\left| \frac{g_{ik}(x)}{\varphi(x)} - \delta_{ik} Q \right| = 0, \quad (3)$$

($i, k=1, 2, \dots, n$)

mely az Q -t mint az x -nek algebrai függvényét értelmezi. Az a_1, \dots, a_σ pontok e függvénynek elsőrendű polusai; ha

$$\text{Res}_{a_\nu} \frac{g_{ik}(x)}{\varphi(x)} = A_{ik}^{(\nu)}, \quad (4)$$

($\nu=1, 2, \dots, \sigma$)

akkor

$$|A_{ik}^{(\nu)} - \delta_{ik} \text{Res}_{a_\nu} Q| = 0. \quad (5)$$

Ha tehát a (3) egyenlet gyökeit Q_1, \dots, Q_n -nel jelöljük, akkor a

$$\text{Res}_{a_\nu} Q_i = \gamma_i^{(\nu)} \quad (6)$$

($i=1, 2, \dots, n; \nu=1, 2, \dots, \sigma$)

mennyiségek nem egyebek, mint az (A) rendszernek $x=a_\nu$ -hoz tartozó determináló fundamentalegyenletének gyökei, és hasonlóképpen lesznek $x=\infty$ -re nézve a

$$-\text{Res}_\infty Q_i = \gamma_i^{(\sigma+1)} \quad (7)$$

mennyiségek az $x=\infty$ -hez tartozó determináló fundamentalegyenlet gyökei. A következőkben fölteszszük, hogy az összes

$$\gamma_i^{(\nu)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

mennyiségek különbségei sem nem zérók, sem pedig egész számok, úgy hogy az a_ν ($\nu=1, 2, \dots, \sigma+1, a_{\sigma+1}=\infty$) singularis pontokhoz tartozó $\gamma_{ik}^{(\nu)}$ integrálmatrixok e pontok környezetében a

$$\gamma_{ik}^{(\nu)} = (x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \varphi_{ik}^{(\nu)}(x) \quad (8)$$

¹ Ez az egyenlet, mely a lineár differenciárendszer elméletében igen fontos szerepet visz, tudomásom szerint először VOLTERRANÁL fordul elő (Memorie della Soc. Italiana delle Scienze 1899), ki azt azonban egészen másféle kérdéseknél használja, mint a milyennek mi itt foglalkozni akarunk.

alakban állíthatók elő, a hol $\varphi_{ik}^{(\nu)}$ az $x=a_\nu$ környezetében holomorph és

$$\left| \varphi_{ik}^{(\nu)} \right|_{x=a_\nu} \neq 0. \\ (i, k=1, 2, \dots, n)$$

Természetes, hogy $\nu=\sigma+1$ -re nézve az $x=a_\nu$ helyébe $\frac{1}{x}$ -et kell tenni. E föltételből következik, hogy a (3) egyenlet discriminánsa nem identice zéró, és hogy az $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$ pontok nem tartoznak az \mathcal{Q} algebrai függvény elágazó pontjaihoz.

Képzeljük a (3)-ban a g_{ik} -k helyébe a (2) alatti sorbontásokat téve, akkor összhangban az előző fejezet jelöléseivel az

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu} \mathcal{Q} = \omega \quad (9)$$

menyiség a

$$\left| \frac{g_{ik}^{(0)}(x)}{\varphi(x)} - \partial_{ik} \tilde{\omega} \right| = 0 \\ (i, k=1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

charakteristikus egyenlettel van meghatározva. Ha ezen egyenlet discriminánsa nem identice zéró, azaz, ha $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ gyökei határozatlan x -re egymástól különbözök, akkor $\mu=\infty$ környezetében

$$\mathcal{Q}_i = \mu \left(\tilde{\omega}_i + \frac{1}{\mu} \mathcal{Q}_i^{(1)} + \dots \text{ in inf. } \right). \\ (i=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

A következőkben föl fogjuk tenni, hogy ez áll, továbbá még azt is, hogy az a_ν ($\nu=1, 2, \dots, \sigma+1$) singuláris pontokhoz tartozó determináló fundamentalegyenletek gyökei, tehát az $r_i^{(\nu)}-k$, a μ paramétertől függenek.

Akkor tehát (6) és (7) szerint

$$\text{Res}_{a_\nu} \mathcal{Q}_i = \text{Res}_{a_\nu} \mathcal{Q}_i^{(1)}, \\ (\nu=1, 2, \dots, \sigma+1)$$

ellenben

$$\text{Res}_{a_\nu} \tilde{\omega}_i = 0, \\ \text{Res}_{a_\nu} \mathcal{Q}_i^{(\lambda)} = 0. \\ (\lambda=2, 3, \dots) \quad (12)$$

A (12) egyenletekből következtetni akarunk az ω_i -k jellegére; hasonló eredmények állanak azután az $\Omega_i^{(2)}, \Omega_i^{(3)}, \dots$ mennyiségekre is.

Az $\tilde{\omega}$ algebrai függvény csakis az a_1, \dots, a_σ pontokban birhat polussal, és pedig nyilvánvaló, hogy $\tilde{\omega}$ eme pontokban legfőlebb elsőrendűen válhatik végtelenné. A (12) egyenletekből azonban azt látjuk, hogy elsőrendű végtelenné válás ki van zárva; az a_1, \dots, a_σ pontok és épen így az $x = \infty$ pont is ennél fogva az (10) algebrai egyenlet illetőleg az $\tilde{\omega}$ függvény elágazó pontjai, a melyekben az $\tilde{\omega}_i$ -k alacsonyabb mint elsőrendűen válnak végtelenné. E szerint az

$$\omega_i = \int \tilde{\omega}_i dx$$

mennyiségek egyetlen véges vagy végtelen nagy x értékben sem válnak végtelenné, azaz *elsőfajú integrálok* jellegével bírnak.¹

¹ Talán nem fölösleges egy egyszerű példán kimutatni, hogy az ω_i -k tényleg lehetnek elsőfajú integrálok, azaz nem talán identice egyenlők zéróval.

Legyen $n=2, \sigma=3$, tehát

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3), \quad g_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik}x + \gamma_{ik}x^2, \\ g_{ik} = \mu \left(g_{ik}^{(0)} + \frac{1}{\mu} g_{ik}^{(1)} + \dots \right), \quad g_{ik}^{(v)} = \alpha_{ik}^{(v)} + \beta_{ik}^{(v)}x + \gamma_{ik}^{(v)}x^2;$$

tegyünk

$$\Omega\varphi(x) = \overline{\Omega},$$

akkor

$$\overline{\Omega}^2 - (g_{11} + g_{22}) \overline{\Omega} + g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} = 0, \quad (a)$$

$$\text{Res}_{a_v} \Omega = \lim_{x=a_v} (x-a_v) \Omega = \lim_{x=a_v} (x-a_v) \frac{\overline{\Omega}}{\varphi(x)} = \frac{\overline{\Omega}(a_v)}{\varphi'(a_v)}, \\ (v=1, 2, 3)$$

$$\text{Res}_\infty \Omega = \lim_{x=\infty} x\Omega = \lim_{x=\infty} \frac{x\overline{\Omega}}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} = \lim_{x=\infty} \frac{\overline{\Omega}}{x^2} = \text{véges}.$$

Kell, hogy $\overline{\Omega}(a_v)$ és $\lim_{x=\infty} \frac{\overline{\Omega}}{x^2}$ a μ -tól független legyen. Az (a) egyenletben $g_{11} + g_{22}$ az x -nek másodfokú függvénye, melyben az x^2 coefficiense μ -tól független és mely $x=a_1, a_2, a_3$ mellett is a μ -tól független értékekkel bír; e szerint $g_{11} + g_{22}$ egészen független a μ -tól. Ugyanezen egyenletben az abszolút tag $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ az x -ben negyedfokú, legyen:

Ebből viszont most az következik, hogy az a_ν -k ($\nu = 1, 2, \dots, \sigma+1$) a (10) egyenletnek, illetőleg az $\tilde{\omega}$ -nak *egyedüli* elágazó pontjai.

A (10) egyenletben az $\tilde{\omega}^{n-1}$ coefficientse

$$\sum_{i=1}^n \frac{g_{ii}^{(0)}(x)}{\varphi(x)}; \quad (13)$$

mivel eme racionális függvénynek $x=a_1, \dots, a_\sigma, \infty$ -hez tartozó residuumai eltűnnek, a számláló pedig alacsonyabbfokú mint a nevező, következik, hogy e függvény identice zéró, azaz, hogy

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i = 0, \quad (14)$$

a mi egy ismeretes tétellel¹ egyezik.

Alkossuk meg most a

$$\sum_{\lambda=1}^n u_{i\lambda} \left(\frac{g_{\lambda k}}{\varphi(x)} - \partial_{\lambda k} \Omega_i \right) = 0 \quad (15)$$

egyenleteket, a melyekből az $u_{i\lambda}$ -k viszonyai mint az x -nek algebrai függvényei meghatározhatók. Ha x az $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$ értékektől különböző értéket jelent, akkor μ -vel osztva lesz:

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \mu^2 \left(G_0 + \frac{1}{\mu} G_1 + \frac{1}{\mu^2} G_2 + \dots \text{in inf.} \right),$$

akkor

$$G_0 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(\alpha_0 x + \beta_0),$$

$$G_1 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(\alpha_1 x + \beta_1),$$

$$G_2 = \text{tetszőleges},$$

$$G_\lambda = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(\alpha_\lambda x + \beta_\lambda).$$

$$(\lambda=3, 4, \dots)$$

Mivel $g_{11}^{(0)} + g_{22}^{(0)} = 0$, lesz

$$\tilde{\omega} = \pm \sqrt{\frac{-(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(\alpha_0 x + \beta_0)}{\varphi(x)^2}},$$

de a föltevések szerint $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tilde{\omega} = 0$, tehát $\alpha_0 = 0$, és így tényleg

$$\tilde{\omega} = \frac{\text{const.}}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}.$$

¹ V. ö. pld. APPELL és GOURSAT: Théorie des fonctions algébriques (1895), p. 301.

$$\sum_{\lambda=1}^n u_{i\lambda} \left(\frac{g_{\lambda k}^{(0)} + \frac{1}{\mu} g_{\lambda k}^{(1)} + \dots}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda k} \left(\tilde{\omega}_i + \frac{1}{\mu} \varrho_i^{(1)} + \dots \right) \right) = 0,$$

tehát:

$$u_{i\lambda} = u_{i\lambda}^{(0)} + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)} + \dots \text{ in inf.} \quad (16)$$

a hol — megegyezőleg az előbbi fejezetben használt jelölésekkel —

$$\sum_{\lambda} u_{i\lambda}^{(0)} \left(\frac{g_{\lambda k}^{(0)}}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda k} \tilde{\omega}_i \right) = 0. \quad (17)$$

Vizsgáljuk most az $u_{i\lambda}$ -kat valamely $x=a_v$ pontban. Ha a (15) egyenleteket $(x-a_v)$ -vel megszorozzuk, lesz tekintettel a (4) és a (6)-ra

$$\sum_{\lambda} u_{i\lambda}(a_v) (A_{\lambda k}^{(v)} - \delta_{\lambda k} r_i^{(v)}) = 0. \quad (17)$$

Legyen már most

$$A_{ik}^{(v)} = \mu \left(a_{ik}^{(v)} + \frac{1}{\mu} \beta_{ik}^{(v)} + \frac{1}{\mu^2} r_{ik}^{(v)} + \dots \right), \quad (18)$$

úgy hogy

$$a_{ik}^{(v)} = \lim_{x \rightarrow a_v} (x-a_v) \frac{g_{ik}^{(0)}}{\varphi(x)} = \text{Res}_{a_v} \frac{g_{ik}^{(0)}}{\varphi(x)}, \quad (19)$$

akkor tekintettel arra, hogy az $r_i^{(v)}$ -k függetlenek a μ paramétértől:

$$\sum_{\lambda} u_{i\lambda}(a_v) \left[a_{\lambda k}^{(v)} + \frac{\beta_{\lambda k}^{(v)} - \delta_{\lambda k} r_i^{(v)}}{\mu} + \frac{r_{\lambda k}^{(v)}}{\mu^2} + \dots \right] = 0,$$

és így

$$u_{i\lambda}(a_v) = u_{i\lambda}^{(0)}(a_v) + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)}(a_v) + \dots, \quad (20)$$

a hol összhangban a (17) egyenletekkel és a (12)-vel

$$\sum_{\lambda} u_{i\lambda}^{(v)}(a_v) a_{\lambda k}^{(v)} = 0. \quad (21)$$

Ha az $\tilde{\omega}$ -t értelmező (10) egyenletet ekkép írjuk:

$$\left[\frac{g_{ik}^{(0)}(x)}{\varphi(x)} (x-a_v) - \delta_{ik} \tilde{\omega} \cdot (x-a_v) \right] = 0,$$

akkor $x=a_v$ -t téve, tekintettel a (12) és (19)-re adódik, hogy az (α'_{ik}) matrixhoz tartozó fundamentalegyenlet összes gyökei identice zérók, azaz, hogy e matrix fősubdeterminánsaiból alkotott összegek mind eltűnnek. Különösen lesz tehát

$$| \alpha'_{\lambda k}^{(v)} | = 0, \\ (\lambda, k=1, 2, \dots, n)$$

úgy hogy a

$$\sum_{\lambda} v_{\lambda}^{(v)} \alpha'_{\lambda k}^{(v)} = 0 \quad (22)$$

egyenletekből a $v_1^{(v)}, \dots, v_n^{(v)}$ mennyiségek viszonyai meghatározhatók. A (21)-re való tekintettel tehát írhatjuk, hogy

$$u_{i\lambda}^{(0)}(a_v) = v_{\lambda}^{(v)}, \quad (23)$$

azaz, hogy az $u_{i\lambda}^{(0)}$ függvények értékei $x=a_v$ -ban az i indextől függetlenek, a mi azzal áll összhangban, hogy $x=a_v$ a (10) egyenletnek, illetőleg az $\tilde{\omega}$ -nak elágazó pontja. A (20) szerint lesz tehát

$$u_{i\lambda}(a_v) = v_{\lambda}^{(v)} + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)}(a_v) + \dots \quad (24)$$

Jegyezzük meg, hogy egy megelőző dolgozatomban¹ szerint a (8) egyenletekkel értelmezett $\varphi_{ik}^{(v)}(x)$ függvények értékei $x=a_v$ -ben a

$$\sum_{\lambda} \varphi_{i\lambda}^{(v)}(a_v) (A_{\lambda k}^{(v)} - \delta_{\lambda k} x_i^{(v)}) = 0$$

egyenleteknek tartoznak eleget tenni; e szerint és a (17) szerint adódik tehát:

$$\varphi_{i\lambda}^{(v)}(a_v) = u_{i\lambda}(a_v) = v_{\lambda}^{(v)} + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)}(a_v) + \dots \quad (25)$$

Természetes, hogy ezek az egyenletek, valamint a (16), (20), (23), (24) alattiak úgy értendők, hogy az egyenletek két oldalán álló mennyiségek csak egy a λ -tól független factorban különbözhetnek egymástól.

Ezek után áttérhetünk az integráloknak asymptoticus előállításának vizsgálatára a most főnforgó esetben.

¹ A lineár differenciálrendszerek elméletéhez (IV. közlemény), VIII. fejezet, (3) egyenletek.

A megelőző fejezetben valamely pontot *regularis*nak mondtunk, ha sem a differenciálrendszer singularis pontja, sem pedig az $\tilde{\omega}$ függvény elágazó pontja nem volt. Minthogy a jelen esetben az $\tilde{\omega}$ -nak egyedüli elágazó pontjai az a_1, \dots, a_n, ∞ pontok, a regularis pont most egyszerűen azzal van jellemezve, hogy a differenciálrendszernek nem singularis pontja. Ha tehát valamely x_0 reguláris pontból x -sugarat fektetünk, a μ -nek pedig rögzített argumentumot adunk, akkor minden integrálrendszer y_1, \dots, y_n , mely az x_0 -ban oly kezdő értékekkel bír, melyek

$$\gamma_k = \gamma_k^{(0)} + \frac{1}{\mu} \gamma_k^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} \gamma_k^{(2)} + \dots \quad (25a)$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

alakban előállíthatók (akár $|\mu| > R$ tartományban, akár csak asymptoticusan, ha μ a sugara mentén a végtelenbe távozik), *általánosan szólva*

$$y_k \sim e^{\mu \omega_1} \left(\bar{y}_{1k}^{(0)} + \frac{1}{\mu} \bar{y}_{1k}^{(1)} + \dots \text{ in inf. } \right) \quad (26)$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

alakban lesz asymptoticusan előállítva, az x sugárnak mindazon pontjaira nézve, melyek x_0 és a legközelebbi ezen sugáron fekvő singularis pont között fekszenek. A (26)-ban ω_1 azt az ω -t jelenti, a melyre nézve áll, hogy

$$\Re(\tilde{\omega}_1 e^{\theta i}) > \Re(\tilde{\omega}_2 e^{\theta i}) > \dots > \Re(\tilde{\omega}_n e^{\theta i}), \quad (27)$$

$\theta = \arg \mu + \arg(x - x_0).$

De tekintettel a (14) egyenletre, mely szerint

$$\Re(\tilde{\omega}_1 e^{\theta i}) + \dots + \Re(\tilde{\omega}_n e^{\theta i}) = 0,$$

következik, hogy

$$\Re(\tilde{\omega}_1 e^{\theta i}) > 0,$$

tehát, ha

$$\omega_i = \int_{x_0}^x \tilde{\omega}_i dx, \quad (28)$$

hogy $\Re(\mu \omega_1)$ pozitív minden az x sugáron x_0 és a legközelebbi singularis pont között fekvő x értékre nézve. Az x sugár változtatása, úgyszintén a μ argumentumának a változtatása azt

idézheti elő, hogy az (27) egyenlőtlenségben már nem az $\tilde{\omega}_1$, hanem valamely más $\tilde{\omega}_i$ foglalja el az *első* helyet; akkor ugyanez az $\tilde{\omega}_i$, illetőleg a neki megfelelő ω_i , $\bar{y}_{ik}^{(0)}$, $\bar{y}_{ik}^{(1)}$, ... mennyiségek fognak a (26) asymptoticus előállításban az ω_1 , $\bar{y}_{1k}^{(0)}$, $\bar{y}_{1k}^{(1)}$, ... mennyiségeknek a helyére lépni és lesz a tekintetbe jövő x értékekre nézve $\Re(\mu\omega_i)$ pozitív. Mondhatjuk tehát, hogy:

Az x_0 ponthoz tartozó MITTAG-LEFFLER-féle csillag (étoile)¹ minden pontjában az y_k integrálrendszer elemei végtelenné válnak általánosan szólva, ha a μ paraméter tetszésszerűen irányban a végtelen felé távozik. Csak az oly speciális integrálrendszerek, melyek nem az «első», hanem valamely «későbbi» $\tilde{\omega}$ -hoz tartozó sorokkal lesznek asymptoticusan előállítva, közeledhetnek nem a végtelen, hanem a zéró felé. A μ argumentumának speciális értékei mellett — a melyek mellett t. i. valamely $\mu\omega_i$ valós része eltűnik — megeshetik, hogy egyes integrálok végtelenbe növekedő μ mellett teljesen határozatlanná válnak.

Tekintsük most azt az esetet a mikor valamely x_0 pontból kiindulva *tört vonal* mentén megyünk; elég lesz oly vonallal foglalkozni, a melynek csak egy csúcspontja (Knickpunkt) van. Induljon tehát x_0 -ból egy sugár x_1 felé, azután x_1 -ből egy más sugár x_2 felé; a μ paraméter argumentuma egyszersmindenkorra rögzített értékkel birjon. Amaz y_1, \dots, y_n integrálrendszer, melynek kezdő értékei az x_0 -ban a (25a) alatti sorokkal asymptoticusan² vannak előállítva, az x_0 -ból kiinduló sugár minden pontjában, tehát x_1 -ben is asymptoticus előállítással bír, úgy hogy:

$$y_k(x_1) \sim e^{\mu\omega_1(x_1)} \left(y_{1k}^{(0)}(x_1) + \frac{1}{\mu} y_{1k}^{(1)}(x_1) + \dots \text{in inf.} \right), \quad (29)$$

a hol ω_1 általánosan szólva olyan, hogy $\Re(\mu\omega_1)$ az x_0 -ból kiinduló (első) sugár mentén az $\Re(\mu\omega_i)$ -k közül a legnagyobb, ω_i pedig, úgy mint eddig, a (28) egyenlettel van értelmezve.

¹ Lásd MITTAG-LEFFLER: Acta Mathem. t. XXIII.

² Ha e sorok $\mu=\infty$ bizonyos környezetében convergenssek, akkor ezt mint az asymptoticus előállítás speciális esetét foghatjuk föl.

Legyen most az x_1 -ből kiinduló (második) sugár mentén $\Re(\mu\omega'_i)$ a legnagyobb az $\Re(\mu\omega'_i)$ -k közül, a hol

$$\omega'_i = \int_{x_1}^x \tilde{\omega}_i dx,$$

az integrációt a második sugár mentén végezve, akkor e sugárnak minden pontjában, tehát x_2 -ben is, áll — általánosan szólva — a következő asymptoticus előállítás:

$$y_k(x) \sim e^{\mu[\omega'_i(x) + \omega_1(x_1)]} \left(\tilde{y}_{2k}^{(2)}(x) + \frac{1}{\mu} \tilde{y}_{2k}^{(1)}(x) + \dots \text{ in inf. } \right).$$

Mondhatjuk tehát, hogy ha valamely x pont az x_0 -val tört vonal által összekapcsolható, akkor amaz integrálrendszer, mely x_0 -ban (25a) alakban előállítható kezdő értékekkel bír, az x -ben asymptoticusan állítható elő

$$y_k(x) \sim e^{\mu[\omega_i(x) + p]} \left(y_{ik}^{(0)}(x) + \frac{1}{\mu} y_{ik}^{(1)}(x) + \dots \text{ in inf. } \right) \quad (30)$$

alakban, a hol p egy állandó és általánosan szólva

$$\Re \mu(\omega_i(x) + p) > 0,$$

az $\omega_i(x)$, $y_{ik}^{(0)}$, $y_{ik}^{(1)}$, ... értékei pedig úgy határozandók meg, hogy a tört vonal minden csúcspontjában újból eszközöljük asymptoticus előállítását amaz integrálrendszernek az ezen csúcspontban *kezdődő* sugár mentén, a mely integrálrendszer kezdő értékei ebben a pontban az ott *végződő* sugár mentén érvényben levő asymptoticus sorokkal vannak előállítva. A (30) alatti képlet baloldalán szereplő értékek természetesen azok, a melyeket az y_1, \dots, y_n függvények x -ben fölvesznek, ha őket a tört vonal mentén analitikailag folytatva képzeljük. Ily módon tehát azt látjuk, hogy, ha valamely integrálrendszer értékei *egy* reguláris x_0 pontban

$$e^{\mu\gamma} \left(\gamma_k^{(0)} + \frac{1}{\mu} \gamma_k^{(1)} + \dots \text{ in inf. } \right) \quad (31)$$

alakú sorokkal állíthatók elő asymptoticusan, akkor emez integrálrendszer minden ágrendszere minden más reguláris x pont-

ban is ugyanily alakú asymptoticus előállítással bír, a melyet az előbb körvonalozott módon nyerünk, ha az útat, a melynek mentén x_0 -tól x -hez folytattuk az illető integrálrendszert, egy vele æquivalens törtvonalú úttal helyettesítjük. Mivel egy függvény csak egy módon állítható elő asymptoticus sorral, következik, hogy az x -ben előálló asymptoticus sor az illető törtvonal választásától független, ha e törtvonal csak a folytatás útjával æquivalens.

Legyen most az x_0 -ból kiinduló törtvonal *zárt vonal*, azaz polygon, melynek egyik csúcsa az x_0 pont. Tegyük föl, hogy a polygonon belül csak egy singuláris pont — mondjuk a_ν — fekszik. A *belül* szót úgy értelmezzük, hogy vele a síknak az a része jelöltessek, a mely balfelé marad, ha a polygon kerületét határozott irányban befutjuk. A ν lehet akkor az $1, 2, \dots, \sigma+1$ számok valamelyike. Ha már most (η_{ik}) az

$$(\eta_{ik}) = (T) \int_{x_0}^x (a_{ik} dx + \delta_{ik})$$

integrálmatrixot jelenti, akkor eme matrix elemeinek az értékei, melyek x_0 -ban előállanak, ha ez elemeket a polygon mentén folytatjuk, nem egyebek, mint az a_ν megkerülésének megfelelő $(A_{ik}^{(\nu)})$ fundamentalsubstitutióinak coefficientensei. Mivel az (η_{ik}) matrix kezdőértékei $x=x_0$ -ban, nevezetesen (δ_{ik}) egységnyi matrix elemei a μ -tól függetlenek, tehát (25a) alakban előállíthatók, következik, hogy az $A_{ik}^{(\nu)}$ -k asymptoticus sorokkal állíthatók elő és pedig

$$A_{ik}^{(\nu)} \sim e^{\mu p_i} \left(a_{ik}^{(\nu)} + \frac{1}{\mu} b_{ik}^{(\nu)} + \dots \text{in inf.} \right) \quad (32)$$

alakban, a hol *általánosan szólva*

$$\Re(\mu p_i) > 0,$$

az $a_{ik}^{(\nu)}$ -k pedig bizonyos $y_{ik}^{(0)}$ függvények értékei $x=x_0$ -ban, a hol i az i -től független. Ebből először azt látjuk, hogy *általánosan szólva az összes $A_{ik}^{(\nu)}$ végtelenné válnak, ha a μ paraméter tetszésszerűen argumentummal tart a végtelen felé.* Másodszor pedig következésképen okoskodhatunk tovább. Jelöljük az $(A_{ik}^{(\nu)})$ -hoz tartozó fundamentalegyenlet gyökeit

$$e^{2\pi\sqrt{-1}r_i^{(v)}} = \rho_i^{(v)}.$$

vel, akkor ezek a föltevésünk szerint függetlenek a μ -tól és egymástól különbözők. Az

$$\sum_{\lambda=1}^n v_{i\lambda}^{(v)} (A_{\lambda k}^{(v)} - \partial_{\lambda k} \rho_i^{(v)}) = 0 \quad (33)$$

homogén lineáris egyenletrendszer $v_{i\lambda}^{(v)}$ -kre nézve megoldhatók, mivel

$$A_{\lambda k}^{(v)} - \partial_{\lambda k} \rho_i^{(v)} \neq 0 \quad (34)$$

és a $v_{i\lambda}^{(v)}$ -k viszonyait

$$v_{i1}^{(v)} : v_{i2}^{(v)} : \dots : v_{in}^{(v)} \quad (35)$$

egyértelműleg határozzák meg. E viszonyok tehát, tekintettel a (32) alatti képletekre, asymptoticusan előállíthatók,

$$a_0 + \frac{1}{\mu} a_1 + \dots \quad (36)$$

alakú sorokkal. Mivel ezek a viszonyok azonban¹ nem egyebek a (8) egyenletekkel értelmezett $\varphi_{i\lambda}^{(v)}$ függvények x_0 -hoz tartozó értékeinek viszonyainál, azaz

$$v_{i1}^{(v)} : v_{i2}^{(v)} : \dots : v_{in}^{(v)} = \varphi_{i1}^{(v)}(x_0) : \dots : \varphi_{in}^{(v)}(x_0),$$

következik, hogy ez utóbbi viszonyokat vagy — a mi ugyanaz — az

$$\gamma_{i1}^{(v)} : \gamma_{i2}^{(v)} : \dots : \gamma_{ik}^{(v)} \quad (37)$$

függvények viszonyait az x_0 -ban (36) alakú sorokkal asymptoticusan tudjuk előállítani. Képzeljük már most az x_0 pontot az a_r -vel egy teljesen a polygonunkon belül elhaladó sugárral — vagy ha az nem volna lehetséges, egy a polygonon belül foglalt törtvonallal — összekapcsolva, akkor az a_r -ben végződő sugár mentén, egészen az a_r pont tetszésszerű közeléig, asymptoticusan tudjuk előállítani a (37) alatti viszonyokat, minthogy azoknak x_0 -hoz tartozó kezdőértékei (36) alakú asymptoticus előállítással bírnak. De tekintettel arra, hogy e viszonyok értékei

¹ Lásd Értesítő, XXIV, p. 135.

az α_r -ben magában a (25) alatti egyenletek szerint az $\frac{1}{\mu}$ pozitív egész hatványai szerint haladó convergens sorokkal vannak előállítva, mondhatjuk, hogy az α_r -ben végződő sugár mentén érvényes asymptoticus előállítása a (37) alatti viszonyoknak e singuláris pontban magában is fönnáll.¹

Írjuk föl az $(A_{ik}^{(v)})$ substitutió fundamentalegyenletét

$$|A_{ik}^{(v)} - \partial_{ik}\rho| = 0,$$

akkor ennek minden $\rho_i^{(v)}$ gyökére nézve lesz a (32) szerint

$$|a_{ik}^{(v)} - \partial_{ik} \lim_{\mu} e^{-\mu p_{\lambda}} \cdot \rho_i^{(v)}| = 0.$$

Tekintettel arra, hogy a $\rho_i^{(v)}$ -k a μ paramétertől nem függenek, az $a_{ik}^{(v)}$ -k pedig véges mennyiségek, következik, hogy csak a következő esetek lehetségesek:

1. $\lim_{\mu} e^{-\mu p_{\lambda}} = 0$ minden $\lambda = 1, 2, \dots, n$ -re. Ebben az esetben lesz $\lim_{\mu} e^{\mu p_{\lambda}} = \infty$, tehát $\lim_{\mu} A_{ik}^{(v)} = \infty$, és az $(a_{ik}^{(v)})$ matrix karakteristikus egyenletének összes gyökei eltűnnek; ez az eset az általános, a mikor t. i. az összes $A_{ik}^{(v)}$ -k asymptoticus előállításai ahhoz az ω_1 -hez tartoznak, a melyre nézve $\Re(\mu\omega_1)$ a legnagyobb, az $a_{ik}^{(v)}$ -k pedig bizonyos $y_{ik}^{(0)}$ függvények értékei $x=x_0$ -ban.

2. $\lim_{\mu} e^{-\mu p_{\lambda}} = 0$ legalább egy λ -ra nézve, míg a többire nézve e limes vagy véges, vagy teljesen határozatlan. Ebben az esetben az $A_{ik}^{(v)}$ -ik között vannak olyanok, a melyeknek limese végtelen.

3. $\lim_{\mu} e^{-\mu p_{\lambda}} = 1$, azaz $p_{\lambda} = 0$ minden λ -ra. Ha ez valamely határozott ν -re nézve bekövetkezik, akkor a megfelelő $A_{ik}^{(v)}$ -k véges limesekkel birhatnak, és a $\rho_i^{(v)}$ -k az

¹ V. ö. erre nézve BÔCHER: Encyklopädie der math. Wiss. II. A. 7a, p. 447, hol enlíttve van, hogy az ú. n. oscillatio-theoremák egy singuláris pontban is érvényben maradnak, ha e pont nem határozatlansági hely és ha a hozzátartozó kitevők a paramétertől függetlenek.

$$|\alpha_{ik}^{(v)} - \delta_{ik}\rho| = 0$$

egyenlet gyökei. Akkor kell, hogy az $\alpha_{ik}^{(v)}$ determinánsnak zérótól különböző értéke legyen, ez azonban csak úgy lehetséges, hogy az $A_{ik}^{(v)}$ -k asymptoticus előállításai minden i -re más ω_λ -hoz tartoznak; mert ha csak két i -re nézve például $i=1$ és $i=2$ -re az $A_{1k}^{(v)}$ -k és az $A_{2k}^{(v)}$ -k asymptoticus előállításai ugyanahhoz a ω_λ -hoz tartoznának, akkor volna

$$\alpha_{1k}^{(v)} = y_{\lambda k}^{(0)}(x_0), \quad \alpha_{2k}^{(v)} = y_{\lambda k}^{(0)}(x_0),$$

úgy hogy az $\alpha_{1k}^{(v)}$, $\alpha_{2k}^{(v)}$ -k csak egy a k -tól független tényezőben különbözhetnek, az $|\alpha_{ik}^{(v)}|$ determináns tehát szükségképen eltűnnék. A szóban forgó esetben tehát az $(\alpha_{ik}^{(v)})$ matrix az $(y_{ik}^{(0)}(x_0))$ matrixszal egyezik. Ha ez nem minden $v=1, 2, \dots, \sigma+1$ -re nézve áll, akkor az $A_{ik}^{(v)}$ -k közül még mindig lesznek olyanok, a melyeknek lime se végtelenné válik. Marad tehát mint végső eset:

4. hogy a 3. alatti eset $v=1, 2, \dots, \sigma+1$ -re bekövetkezik.

Akkor mindenekelőtt az ω_λ elsőfajú integráloknak összes periodicitási modulusai eltűnnek, minthogy a μ_λ -val jelölt megnyitások minden $v=1, 2, \dots, \sigma+1$ -re nézve a föltevés szerint eltűnnek. Ebből azonban következik, hogy az $\tilde{\omega}_\lambda$ -k mind identice egyenlők zéróval. Ez ellenkezik a föltevésünkkel, mely szerint a (10) egyenlet gyökeit egymástól különbözőeknek tételeztük föl. Mégis czélszerű lesz erről az esetről még egy-nehány megjegyzést tenni.

Ha általánosan a (10) egyenlet n gyöke összeesik, akkor az n -szeres gyök $\tilde{\omega}$ az x -nek rationalis függvénye és ennél fogva identice egyenlő zéróval. Ebben az esetben az \mathcal{Q} -nak sorbontása a $\mu=\infty$ környezetében általánosan szólva a $\mu^{-\frac{1}{n}}$ positiv egész hatványai szerint halad és a differenciálrendszernek forma szerint eleget tevő sorok ily alakkal bírnak

$$e^{g_i(\mu^{\frac{1}{n}})} \left(y_{ik}^{(0)} + \frac{1}{\mu^{\frac{1}{n}}} y_{ik}^{(1)} + \frac{1}{\mu^{\frac{2}{n}}} y_{ik}^{(2)} + \dots \text{ in inf. } \right),$$

a hol $g_i(\mu^n)$ a $\mu^{\frac{1}{n}}$ legfőbb n -edfokú egész racionális függvényét jelenti. Ha ezek a sorok az

$$y_{ik}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{ik}^{(1)} + \dots \text{ in inf.}$$

alakra redukálódnak, akkor egyszerű discussio azt mutatja, hogy a differentálrendszer coefficientseiből a μ -vel végtelenné váló tagok kiesnek, úgy hogy $\mu = \infty$, az integráloknak egyáltalában nem lesz határozatlansági helye. Ez az eset tehát mellőzendő és így mondhatjuk, hogy ha a differentálrendszerben akár csak *egy* coefficient van, mely μ -vel végtelenné válik, de úgy, hogy a determináló fundamentalegyenletek gyökei a μ -tól függetlenek, akkor az $A_{ik}^{(v)}$ -k közül is lesz legalább egy, mely végtelenné válik, ha a μ tetszésszerű argumentummal a végtelenbe nő. Ezzel az ezen Értesítő XXIV. kötetének 136. lapján vont következtetés újból teljes igazolást nyert.

A KLEISTOGAMIA ÚJ ESETE.¹

TUZSON JÁNOS-tól.

A kleistogamiát kétségtelenül a növénybiológia legérdeke-
sebb jelenségei közé sorozhatjuk, a mely már közel két évszáza-
don át képezi megfigyelések és vizsgálatok tárgyát. DILLENUS
óta (1732) a közlemények hosszú sorozata jelent meg, a melyek-
ben hovatovább újabb és újabb adatok lőnek ismertetve, úgy,
hogy ma már a közönségesebb eseteket, mint pl. a *Viola*-fajok,
Impatiens noli tangere, *Oxalis acetosella*, *Lamium amplexi-
caule*, *Specularia perfoliata*, *Cardamine chenopodifolia* stb. klei-
stogamiáján kívül, a növények nagy számáról ismertetve van a
virágzás és a termés e különös módja. A kleistogamia sem bizo-
nyos növénycsoportokhoz, sem pedig bizonyos geográfiai fekvéshez,
vagy egyes, a növényre ható külső körülményekhez nem fűződik,
hanem szeszélyesen mutatkozik a rendszer legkülönbözőbb család-
jaiban, a trópusokban és a növények északi elterjedése határán
egyaránt, s majd a víz alá merülő, majd a tulságosan száraz
helyen nőtt növényen, majd árnyékos, majd napos helyen, jó
és rossz talajon stb. tenyésző példányokon fordul elő.

E körülmény következtében a jelenség okát a legkülön-
bözőbb módon magyarázzák. LINNÉ és más régibb szerzők az
alacsony hőmérséket, GRÄBNER egyes *Viola*-fajokon a hőmérsék
emelkedését, KERNER és VÖCHTING a fény hiányát, DARWIN ezzel
szemben, egyebek mellett, a tulságos fényt is, EGGERS a nagy
szárazságot, ERRERA és GEVAERT a fokozott nedvességet, TORREY
és GRAY a rossz talajt mutatják ki egyes esetekre, mint olyant,

¹ A III. osztálynak 1906 október 22.-én tartott ülésén előterjesztette
KLEIN GYULA rendes tag.

mely a kleistogamiát okozza. GÖBEL pedig azt bizonyítja, hogy az ok közvetve igen különféle lehet, közvetlenül azonban — a vegetatív szervek fejlődésével correlatióban — a kedvezőtlen táplálkozási viszonyok okozzák a kleistogam virág létrejöttét. Ezeken a fiziológiai természetű magyarázatokon kívül, a teleológiai magyarázatok során, a czélszerűségi szempontokból való alkalmazkodás is már sok oldalról figyelembe vétetett, a mi LAMARCK-nak ama tételével volna kapcsolatba hozható, hogy «a szükség inger.»

DARWIN a létért való küzdelemben létrejött alkalmazkodást lát a kleistogam virágban is; KIRCHNER és F. LUDWIG a beporzást végző rovarok hiányát, KNUTH egyebek mellett a magvak védelmét, H. MÜLLER a rendes, chasmogam virágokból létrejövő magvak hiányát, BURCK a hangyák elleni védelmet stb. hozza fel egyes esetekre, mint olyan körülményeket, a melyekre az alkalmazkodás irányult. E teleológiai magyarázatok nagyrészt egészen pszichológiai irányba terelődtek. Így BURCK a *Myrmecodia tuberosa* kleistogamiájáról többek közt azt a feltevését írta le (p. 133.), hogy e növény eredetileg rendesen nyíló virággal bírt, de miután törzse hangya-lakássá alakult, és «miután a hangyák a virágok gyakori látogatása közben több rosszat, mint jót mivelnek», átalakult kleistogam virágu növénynyé. Vagy pedig KNUTH (p. 67) a kleistogam módon virágzó *Oxalis acetosella* növényfajt] mint olyant tünteti fel, a mely nyáron azért virít így, mert ilyenkor, sok virág nyilván, nagy a beporzást végző rovarok utáni konkurrenzia, és a növény ez elől akar kitérni. Hogy e teleológiai magyarázatok nagyrészt hibás alapon történtek s történnek és ál-okoskodások, azt bővebben, úgy hiszem, nem kell fejtegetnem; GÖBEL már szintén eléggé világosan kiemelte azt a hibát, hogy az egyes szerzők az okokat és a czélszerűségi szempontokat egymással összekeverik. E körülmény folytán terelődnek a biológiai kérdések, igen sok esetben, az okok exakt kutatása teréről a teleológiai magyarázatok és pszichológiai okoskodások kétes értékű mezejére.

Végül egyes szerzők, mint MOHL és SOLMS LAUBACH, oda nyilatkoztak, hogy a jelenség megfelelő magyarázatát a rendelkezésre álló megfigyelési adatokból megállapítani nem lehet.

Az említett kauzális és teleologiai magyarázatokhoz alkalmazkodik, az egyes szerzők dolgozatában, a kleistogam virág alkotásának morfológiai értelmezése is. DARWIN a kleistogam virágot már kezdettől fogva módosult és a czélszerűség szempontjai szerint átalakult képződménynek tekinti, a mely magyarázásból — habár DARWIN ezt határozottan nem mondja ki — következik az is, hogy a kleistogam virág a növény belső saját-ságaiból kifolyólag létrejött és morfológiailag is teljesen befejezett képződmény.

GÖBEL ezzel szemben — bizonyos tekintetben az ASA GRAY véleményével egyértelműben — a kleistogam virágot fejlődésében visszamaradt képződménynek tekinti, a mely, morfológiailag véve, nem érhet el célját, csakis fiziologíailag. Daczára ugyanis a morfológiai visszamaradásnak, a szexuális folyamatra érett ivarszerveket tartalmaz. Ez pedig a GÖBEL előbb említett magyarázatával kapcsolatban azt a fogalmat zárja magába, hogy a kleistogam virág létrejötté épen oly belső okok láncolatával kapcsolatos, mint a rendes, chasmogam virágé, csak hogy a kedvezőtlen táplálkozás, tehát külső okok reguláló hatása alatt morfológiai kifejlődésének egy eléggé kezdetleges fokán visszamarad. Ebben az értelemben fejt ki GÖBEL ama nézetét, hogy «A kleistogam virágon a morfológiai kifejlődés periodusa meg van rövidülve, ennek daczára azonban a fiziologiai érettség beköszönt.»

A különböző vélemények mellett és ellen szóló bizonyítékok részletes tárgyalása, GÖBEL beható dolgozata után, itt fölösleges volna. Ott az összes adatok részletes hivatkozások kíséretében vannak ismertetve s az ő megfigyeléseinek gazdag sorozatával kapcsolatosan méltatva. Ezekről azonban az általam ismertetendő esetre és adatokra vonatkozólag ki kell emelnem, hogy az összes, eddig megfigyelt esetei a kleistogamiának, a jelenség megnyilvánulásának nagyszabásu és következetes volta tekintetében, messze mögötte maradnak a továbbiakban leírandó esetnek.

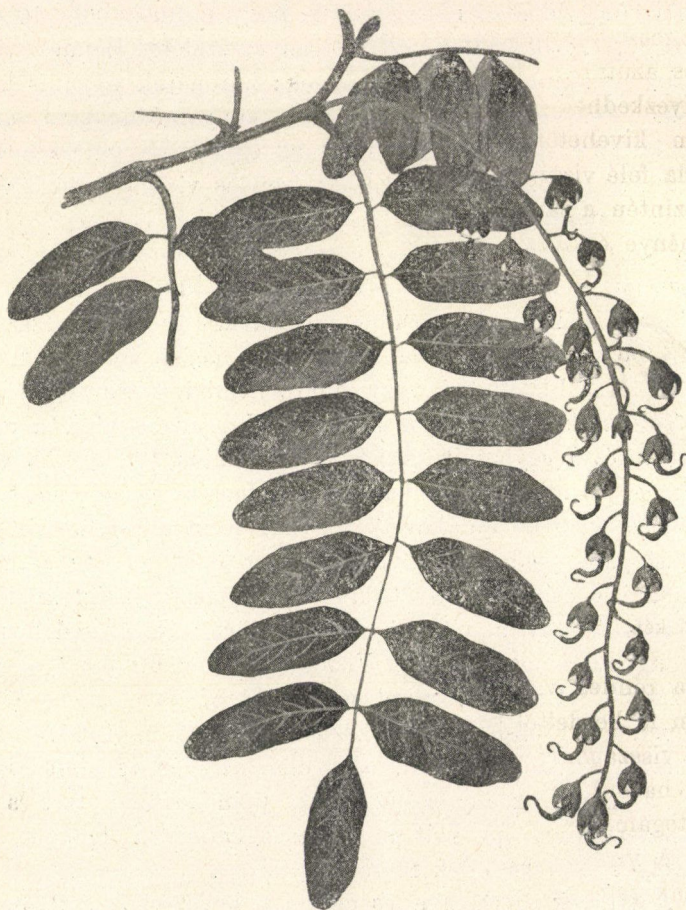
Esztergom mellett, a Pilis-Marót-ra vezető úton, a vámsorompótól a város felé eső útrészletet szegélyező akácza sorban, két idős fa áll, a mely az 1902 óta tett megfigyelések sze-

rint¹ következetesen tisztán kleistogam módon virágzik és terem. Az ugyanazon fasorban levő, chasmogam virágu *Robinia pseudacacia* példányok egészen rendes viszonyokat mutatnak úgy virágzásukban, mint termésükben. A kleistogam példányok a többivel egyidősek, s úgy látszik, hogy mintegy 30-40 évvel ezelőtt egyszerre voltak ültetve az út szélére. Rendes virágu társaiktól alakjukban is különböznek: koronájuk ugyanis többé-kevésbé vízszintesen terjeszkedő, kissé kanyargó ágazatu, miáltal a fák termete egészen más, mint az egyenesen felfelé növény és éles szögek alatt elágazó ágazatu, rendes virágu szomszédaiké. A törzs vastagságában nem lehet a többiekhez viszonyítva biztos különbséget megállapítani — mert emezek törzse is különböző vastagságu —, az ágakon azonban megállapíthattam, hogy a kleistogam példányok lassabb növéseik. Ennek következtében fájuk több edényt tartalmaz, mint amazoké, és ágaik igen törékenyek. Más histológiai vagy mikrochemiai különbséget azonban fájukon kimutatni nem sikerült. Virágzásuk ideje a rendes virágu fákóval egybeesik, s körülbelül május 10—20-ika között folyik le. Minthogy azonban a kleistogam virág megtermékenyülése gyorsabban következik be, mint a rendes virágoké, a kleistogam példányok hamarabb viritanak el, és termésük is hamarabb érik. A teljesen kifejlett virágzat alakját az 1. kép tünteti fel, mely a virágok külső morfológiai rendellenességeit nagyjából magyarázza. Viritásuk nem minden évben következik be. 1902-ben mind a két fa viritott, nemkülönben 1904-ben és 1906-ban is, a közbeeső 1903. és 1905. években azonban a viritás kimaradt. 1906-ban, az idén, termések is fejlődtek a fákon, az előbbi két viritás után azonban termés nem következett, vagy ha volt is, oly csekély mérvű lehetett, hogy a hüvelyek észrevétlenek maradtak.

A virágok szerkezete és alakja a következő: a 2., 3. és 4. képen nagyítva ábrázolt virágocskák 5 mm. hosszúak és 3 mm. szélesek. Ezeken a virágtagok teljesen a csészébe zárva, a mely

¹ E fákra VADÁSZFI JENŐ közalapítványi erdőtanácsos úr hívta fel a figyelmemet, virágzatok megküldése által. Vizsgálataimban ezután is szíves volt kezemre járni, a miért neki őszinte köszönetet mondok.

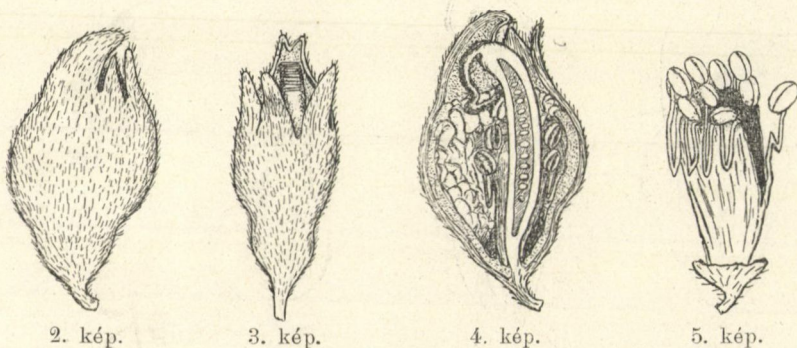
a rendes virágok csészéjével alapjában egyező alkotásu. Jól megkülönböztethető rajta a kétfogu felső és a háromfogu alsó ajak. A csésze-fogak eleinte szorosan záródnak (a 3. kép csipesszel



1. kép.

szétnyitott csésze-fogakat mutat, azért, hogy a termő helyzete is kivehető legyen). Az ily virágocska belsejében (4. kép) a termő már teljesen ki van fejlődve, sőt duzzadtabb, mint a teljesen kifejlődött rendes virágban. Nemkülönben egészen ki

vannak benne fejlődve a magrügyek is. Ezek száma rendszeren 17—21. Ugyanezt a számot találtam a rendes virágok magrügyeire vonatkozólag is. A porzók száma a rendes, t. i. 10 (5. kép), a melyek közül 9 összenőtt és egy — a vitorlának megfelelő rész felé eső — szabad. Az antherák különböző magasságban állanak, *négy üregűek*. A porzószalak könyökszerűen le- és azután felgömbültek, a mi a zárt viráglevelek között való elhelyezkedetés természetes következménye. A bibeszál, a 4. képen kivehetőleg, a csónaknak megfelelő résztől hátra, a vitorla felé visszagömbül, miáltal a bibe az antherák fölé szorul. Ez szintén a zárt virágban való elhelyezkedés morfológiai következménye és minden virágban egyforma módon történik. Ennek



oka a rendes virág szerkezetében rejlik, a mennyiben a bibe ebben is kezdettől fogva a vitorla felé van gömbülve. Így tehát ez a visszagömbülés a rendes virágban is megvan, és ebben, a mint hasonló esetekre ezt már GÖBEL is kimutatta, nem szabad a kleistogam virág különleges alkalmazkodási mozzanatát látnunk.

A virágokban a szíromlevelek a felismerhetetlenségig össze vannak zsugorodva és ránczosodva. Mindamellett a virág zymorph alkotása megmaradt: a csónaklevelek összenövési helyén ránczos barázda vehető ki (7. kép), jobbról és balról a két evező egy-egy felismerhető külön ránczos testet képez, a vitorla pedig felülről övezi a porzókat és bibét, szintén összezsugorodva és ránczosodva. A viráglevelek különben egymással szorosan összefüggenek, széleik összerétegvék, úgy, hogy azokat néha alig

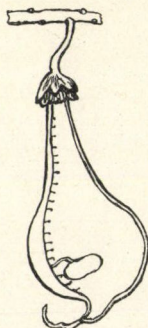
sikerül egymástól tisztán elválasztani. Leginkább a vitorla különíthető el. A fejlettségének tetőpontján levő virág, melyet a 6. és 7. kép tüntet fel, a termőt nem számítva, 6 mm. hosszú, 5 mm. széles. A visszagömbült bibéjű termővel, illetőleg esetleg már terméskével együtt pedig 10—11 mm. hosszú. Az ilyen virágon a csészelevelek fogai szétnyiltak, sőt a bemetszések alján behasadtak. A szíromlevelek pedig ránczos, porczos koszorú alakjában emelkednek a csészelevelek fölé. A bibe ekkor is vissza van görbülve, sőt gyakran még be is van fordulva a portokok mellé.



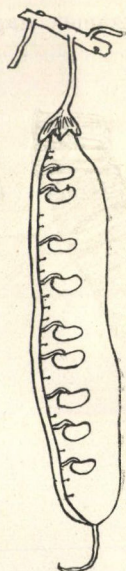
6. kép.



7. kép.



8. kép.

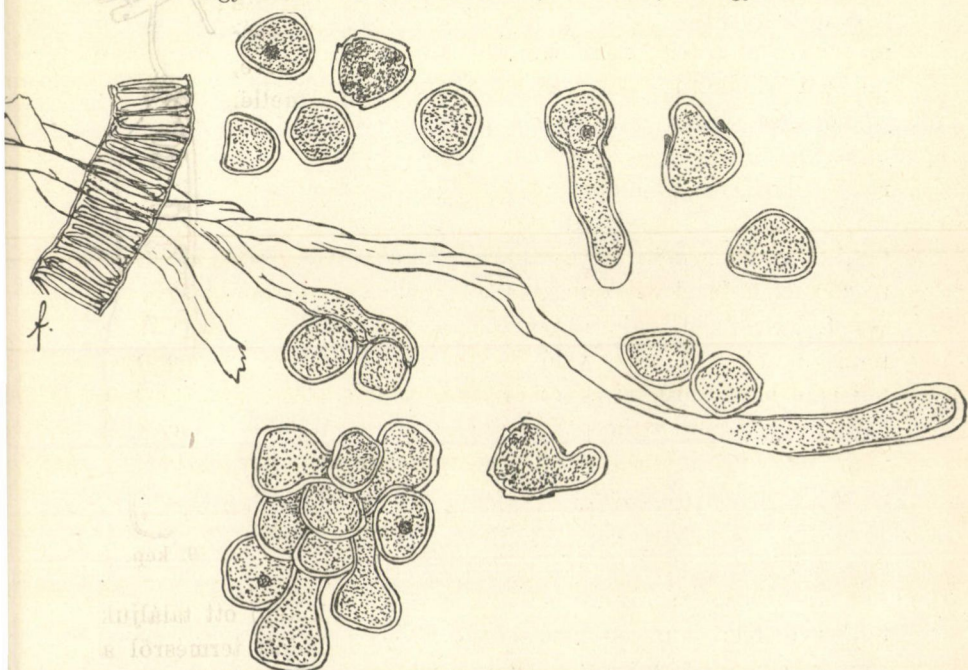


9. kép.

A kifejlett, de még zöld termés tövéen (8. kép) ott találjuk az egész virágot, holott a rendes virágból fejlődött termésről a szíromlevelek már hiányzanak (9. kép). Maga az érett termés a rendesnél sokkal rövidebb, legfeljebb 4 cm., többnyire azonban csak 3 cm. hosszú, és benne csak egy, ritkán 2—3 mag található, de az sem mindig rendes, hanem néha összezsugorodott. A csiraképes magvak héja igen kemény, a csira fekvése és alkotása rendes.

A virág, úgy látszik, már az 1—3. képen lerajzolt állapotát megelőzőleg is teljesen érett. A portokok nagyrészt fel vannak pattanva, és a felpattanás helyén, a portokok belsejében kicsirázott pollen-szemek tömlői nagy számmal nyulnak ki és összevissza kanyarogva huzódnak a virág belsejében (10. kép).

Habár a portokokat a rendelkezésemre álló alkoholos vizsgálati anyagnak az előbbieken leírt, apró, zárt virágjaiban nagyrészt már felnyilva találtam, előfordultak még fel nem nyilottak is, a melyeken, a sutura táján, kinövő pollen-tömlőket láttam. A portokok tartalmát kinyomva, sok esetben azt találtam, hogy a pollen-szemek nagy része ki van csirázva, és ezek, az egymás mellé



10. kép. A felpattant anthera nyílásán kihatóló pollen-tömlők és az anthera belsejéből kinyomott, részben kicsirázott pollen-szemek. *f* fibrosus falrétég. 325:1.

furakodó tömlőktől összetartva, gyakran egy-egy gomolyt alkotnak. A pollenszemek nagy számmal keletkeznek, épen úgy, mint a rendes virág portokjaiban.

A bibe a rendes bibe alkotásával bir; reá mindig nagy számmal tapadnak a pollen-szemek, a mi nagy részben a kikészítés következménye, mert elkerülhetetlen, hogy a virág felmetésze vagy felbontása közben a bibe körüli felpattant portokok tartalmából ne jussanak a bibe szőrei közé pollen-szemek.

Mivel azonban a visszagörbült bibe gyakran egészen az antherához szorul, kétségtelen, hogy ezek felpattanásakor a pollen-szemek és a kicsirázott tömlők könnyen juthatnak a bibére. Több esetben találtam a bibe szövetébe már behatolt pollen-tömlőt is, a melynek egy része a bibéből kilógott, végén a pollen-szemecskével. Emez tehát valamely a bibe közelében volt anthera belsejéből hajtotta tömlőjét a bibe felé. Az anatrophyákat a leírt zárt virágocskákban (4. kép) már szintén teljesen kifejlettnak és rendes számunak találtam. Micropyle-jükből kinyulik a nucellus, a mely eleinte csak néhány sejttel, később pedig jelentékeny részével dudorodik ki a magrügy belsejéből. E jelenség a kleistogam virágokon eddig ismeretlen volt; fejlődéstanára és ætiológiájára vonatkozó vizsgálataim azonban még folyamatban vannak, s így csak később ismertethetem azokat. A megtermékenyülés, a szaporodási szervek fejlettségéből, valamint a pollen-szemecskék csirázásából és tömlőjüknek a bibébe való behatolásából ítélve, már a még teljesen zárt, apró virágocskákban történik. Úgy látszik azonban, hogy a pollen-tömlők túlnyomó része nem éri el czélját, nem jut magrügyhöz, mert emezeknek csak egy igen csekély része termékenyül meg. Az érett terméseket véve alapul, azt állítottam, hogy átlag 108 virágzaton csakis 58 termés van, összesen 75 maggal. E szerint tehát egy virágzatra 0.7 mag esik. Egy virágzatban átlag 20 virágot és egy virágban 18 magrügyet tételezve fel: tehát 400 magrügyre 0.7 mag, vagyis 514 magrügyre egy érett mag jut. Holott egy, a kleistogam viráguk mellett álló, rendes virágú akáczfára vonatkozólag azt találtam, hogy ugyanannyira, vagyis 514 magrügyre, átlag 44 érett mag esik.

A mag kifejlődésének esete tehát a kleistogam virágú fákön igen ritka. Kérdés már most, hogy ez a pollen-tömlőnek a magrügyhöz való el nem jutásából, vagy a megtermékenyülési folyamat sikertelenségéből ered-e? Az érett terméseken az tapasztalható, hogy rendszeren a hüvelynek a bibe felé eső végében van egy mag, a hátsó részben pedig csupa meg nem termékenyült, elszáradt magrügy foglal helyet (8. kép). Még pedig rendszeren a legfelső 1—6. magrügyből, legtöbbször pedig a harmadikból fejlődik mag. Előfordul ugyan, hogy a 10—15., vagy

még hátrább eső magrügy helyén is fejlődik mag, ezt azonban csakis a ritkán előforduló, 2—3 magu hüvelyeken tapasztaltam, a melyeken e mellett a legfelső magrügyek helyén is volt mag. Mindezekből azt lehet következtetni, hogy pollen-tömlő csak némely maghonba hatol be, és ez esetben is csak egy pollen-tömlő jut annak belsejébe. Ez pedig azt a magrügyet termékenyíti meg, a mely legelőbb esik útjába. Ha nem így volna, és több magrügy termékenyítenék meg, de nagyrészt eredménytelenül, úgy az, a melyik maggá fejlődik, bizonyára nem lenne mindig a legfelsők közül való, hanem majd magasabban, majd mélyebben fekvő magrügy fejlődne maggá, hasonlóan, mint a rendes virágból fejlődő hüvelyben (9. kép). Ebből következtetve tehát, a maghonba behatoló pollen-tömlők csekély száma az oka annak, hogy a magfejlődés esete oly ritka. Ez teljesen egybevág azokkal is, a miket a bibe és a maghonok mikroskopi vizsgálata folyamán tapasztaltam, a midőn ugyan a bibén több esetben megfigyelhettem a pollen-tömlő behatolását, a magrügy megtermékenyülését azonban, daczára hogy százával vizsgáltam meg, egy esetben sem sikerült megfigyelnem, mert túlságosan ritka. Ez okból az embryo vizsgálatát is ennek csak ama fejlettségi állapotától kezdve végezhettem, a mely mellett már a hüvely fejlődésnek indult és az illető magrügy jelenképpen nagyobb a meg nem termékenyülteknél, s így könnyen felismerhető. E vizsgálataimról szintén csakis egy későbbi közleményben számolhatok be.

Ha az eddigiekben leirtakkal a dolgozatom elején kiemelt felfogásokat és a kleistogamia eddig leirt eseteit egybevetjük, úgy a kleistogam virágú akáczokon tapasztalhatókból első sorban is kitűnik az, hogy azok évek során át, és valószínűleg mindig a leirt módon viritottak. Ennek következtében *a kleistogamiát az illető példányok állandó sajátosságának kell tekintenünk.* E feltevésünket megerősíti még különösen az a körülmény is, hogy az illető két fa körül nőtt 10—12 gyökér-sarj közül a legidősebb, a mely mintegy 6—8 éves; az idén már szintén kleistogam módon virágzott és termett. Ezenkívül majdnem bizonyosra vehető az is, hogy a két egymás mellett álló idős fa közül az egyik a másiknak gyökér-sarjából származik.

GÖBEL ama nézete tehát, hogy a kleistogamiát a megfelelő táplálkozást hátráltató külső körülmények regulatív hatása okozza, a leirt esetünkben nem talál igazolásra. Ellene szól ennek a jelenség állandó volta, de az is, hogy az illető két fa mind a napfény, mind pedig a talaj s a klíma stb., meg a gyökereiken megvizsgált bakterium-gumók tekintetében is ugyanazon körülmények között van, mint az állandóan chasmogam módon viritó szomszédai.

• E körülmények egyuttal kizárják leirt esetünkre vonatkozólag ama összes felfogások érvényességét,⁵ a melyek kivülről jövő hatásokra: a rosszabb talajra, a száraz, vagy igen nedves környezetre, a rovarok hiányára, rendellenes hőmérsékbeli viszonyokra stb. vezetik vissza az okokat. E helyett a kleistogam akác körülményei a mellett bizonyítanak, hogy *a kleistogamia ebben az esetben az illető növények belső szervezetében rejlő sajátság.*

Ez a felfogás — az előbb már leírtak szerint — a DARWIN magyarázatával is egyező, nemkülönben pedig némileg LUDWIG és VÖCHTING is ez irányú véleményt fejezték ki, a mennyiben a meg nem felelő talaj- és klíma-viszonyokat és a beporzást végző rovarok hiányát mint oly okokat nevezik meg, a melyek következménye gyanánt *mint alkalmazkodási eredmény tekintendő a kleistogamia*, a mely selectio által állandó sajátságává lehet a növénynek. E vélemények azonban mégsem fogadhatók el esetünkre, már csak azért sem, mert a czélszerűségi szempontoktól befolyásolt alkalmazkodás elvén alapszanak. Még kevésbé fogadhatók el azonban azzal a további feltevessel, hogy ez a sajátság lassanként állandósul. A leirt esetben ez az okoskodás czáfolatra talál, mert először is a jelen esetben a kleistogamia nemcsak hogy nem előnyös az illető növényekre, hanem igen káros, mert szaporodásukat olyannyira akadályozza, hogy *a természetre bízva, egy ily sajátságokkal bíró növényfajnak csakhamar ki kell pusztulnia.* Másodszor pedig a leirt esetben, tehát az akáczon, nincs okunk és jogunk e sajátság fokozatos állandósulására következtetni.

E felfogásokkal ellentétben inkább annak a véleménynek kell tehát helyet adnunk, hogy a kleistogamia *a jelen esetben*

célszerűségi szempontoktól teljesen függetlenül, hirtelen létrejött sajátság; egy véletlen mutáció eredménye, a mely egyrészt magának Darvinnak a fajok keletkezésére vonatkozó tana, másrészt a de Vries tételei értelmében véve iránytalan és ebben az esetben káros.

A mi GÖBEL ama tételét illeti, hogy a kleistogam virág nem más, mint morfológiai fejlődésében egyszerűen visszamaradt képződmény: ez egymagában némileg megerősítésre talál az akác kleistogamiájában is, mert, a mint az előbbieken le van írva, a virágtagok eredeti alkotása és száma alapján változást nem szenvedett, csakis fejlődésben maradt vissza és eltorzult. GÖBEL azonban e tételéhez megfigyelései és kísérletei alapján hozzáfűzi azt is, hogy a virág fejlődésében tapasztalható eme megakadás a táplálkozásra kevésbé előnyös külső körülmények reguláló hatása alatt történik. Ez egyuttal a GÖBEL eredményeinek és felfogásának lényege is. Ez, a mint már említém, esetünkben czáfolatra talál, a mely meggyőződésemet nemcsak a fennebb említett bizonyítéokra alapítom, hanem arra is, hogy a különböző viszonyok között megfigyelt akáczfákon még egy esetben sem tapasztalták kleistogam virágok keletkezését. És bizonyosra vehető, hogy ha hátrányos táplálkozási viszonyok létrehozása mellett a kleistogamiát] a *Robinia pseudacacia* egyes rendes virágu elődöktől származó példányain létre akarnók hozni, úgy minden fáradozás sikertelen maradna.

Végül a kleistogam virág morfológiai és fiziológiai fejlődésbeli periodusainak egymáshoz való viszonyát mérlegelve, ez irányban sem oszthatom egészen GÖBEL véleményét, mert a megvizsgált kleistogam virágok alkotása nem csupán a fejlődésben való egyszerű megakadásra, hanem a morfológiai fejlődés egyes részleteinek bizonyos belső kényszer alatt történő összetorlódására mutat, a melyre a fiziológiai kifejlődés, vagyis az ivarszervek megérése, nem következik, hanem azt megelőzi, és úgy látszik, hogy a kleistogam virág morfológiai kifejlődésének eme visszamaradása és megtorlódása épen az ivarszervek korai kifejlődésének és a megtermékenyülés korai bekövetkezésének mélyreható befolyása alatt áll be.

Az ivarszervek e korai megérése különféle okok láncolata

által jöhet létre. A leirt esetben azonban a növénynek állandó, belső tulajdonságaiából ered.

Mint hogy a nevezett fának a kleistogam módon való virítás és termés oly sajátága, mely a *Robinia pseudacacia* sajátosságai közé be nem illeszthető, s a melynek állandósága a hat éven át tett megfigyelésekből következőleg majdnem bizonyosnak látszik, úgy e növényt megilleti a külön tudományos elnevezés, és joggal viselheti a *Robinia pseudacacia* rendes virágu alakjai mellett a *R. pseudacacia forma cleistogama* nevet.

Forma cleistogama *Robinia pseudacacia*. Stamina et pistillum matura cum petalis in calyce inclusa. Calyx 5—6 mm. longus, cum labio supero bidentato et infero tridentato. Petala rugosa, in floribus evolutis calyce paulo longiora. Stamina diadelpa, cum filamentis bicurvatis. Stylus retroflexus. Legumen basi corollam et calycem ducens.

Arra nézve, hogy teljesen állandóak-e a forma leirt sajátosságai, csak évek során át és különböző körülmények közt tett megfigyelésekből meríthetünk egészen biztos támpontokat. Különösen pedig az által, ha nem csak sarjadzás vagy dugványozás útján, szóval vegetatív úton létrejött utódokat, hanem magról nőtt példányokat is megfigyelünk. Erre nézve a kísérletek a budapesti egyetemi növénykertben és más helyeken is már kezdetüket vették.

IRODALOM.

BENNET, A. W. On the floral structure of *Impatiens fulva*. The journal of the Linnean society botany, 1873, p. 147.

BURCK, W. Über Kleistogamie in weiterem Sinne und das *Knight-Darwin'sche* Gesetz. Annales du jardin botanique de Buitenzorg, 1890, VIII, p. 122.

DARWIN, CH. 1. On the two forms, or Dimorphic Condition in the Species of *Primula*. Journ. of the proceedings of the Linnean Society, 1862, VI, p. 77.

DARWIN, CH. 2. The different forms of Flowers. — Die verschiedenen Blütenformen, J. V. Carus fordítása, 1877.

EGGERS, E. Kleistogamie einiger westindischer Pflanzen. Botan. Centralblatt, 1881, VIII, p. 57.

ERRERA, I. et GEVAERT, G. Sur la structure et les modes de fécondation des fleurs. Bull. de la Soc. Bot. de Belgique, XVII, 1878.

GÖBEL, K. 1. Die kleistogamen Blüthen und die Anpassungstheorien. Biolog. Centralblatt, 1904, p. 673, 737, 769.

GÖBEL, K. 2. Chasmogame und kleistogame Blüten bei *Viola*. Flora, 1905, p. 234.

GRAEBNER, P. Biologische Notizen. Verhandl. des bot. Vereins der Provinz Brandenburg, 1893, p. 150.

HANSGIRG, A. Nachträge zu meiner Arbeit etc. Botan. Centralblatt, 1891, XLV, p. 74.

KERNER, A. Pflanzenleben, 1891, II, p. 388.

KIRCHNER, O. Flora von Stuttgart, 1888, p. 318.

KLEIN Gy. Adatok az akácza ismeretéhez. A Magyar Tudom. Akad. Értesítője, 1880, p. 69. Zur Kenntniss von *Robinia pseudacacia* L. Botan. Centralblatt, 1880.

KNUTH, P. Handbuch der Blütenbiologie, 1898, I, p. 62.

LUDWIG, F. Biologie der Pflanzen, 1895, p. 427.

MOHL, H. Einige Beobachtungen über dimorphe Blüten. Botan. Zeitung, 1863, p. 309.

MÜLLER, H. Das Variiren der Grösse gefärbter Blütenhüllen. Kosmos, 1877, II, p. 128.

SOLMS LAUBACH, H. GRAF, Über das Vorkommen kleistogamer Blüten in der Familie der Pontederaceae. Botan. Zeitung, 1883, p. 301.

VÖCHTING, H. Über den Einfluss des Lichtes auf die Gestaltung und Anlage der Blüten. Jahrbücher für wiss. Botanik, 1893, p. 149.

DE VRIES, H. Die Mutationstheorie, 1901 1903.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906. október 22.-én tartott üléséből.)

AZ EPILEPSIÁS ROHAM KIVÁLTÁSÁNÁL SZEREPLŐ ANYAGOKRÓL.

DONATH GYULÁ-TÓL.

Ha az úgynevezett genuin epilepsiánál a klasszikus görcs-rohamot analizáljuk, két tényezőt kell megkülönböztetnünk: 1. az ilyen görcsrohamokra való hajlamosságot, 2. a közvetlen okokat, melyek ezen időszakos görcsöket létesítik. A hajlamosság meg van adva a neuro- vagy psychopathiás terheltség által az elődök részéről, a szülők csiraszerűlése által alkoholizmus vagy syphilis folytán, vagy az agy bántalma által trauma vagy infectiós megbetegedések következtében; ezek az agykéreg kóros elváltozásához és ezáltal a központok fokozott ingerlékenységéhez vezetnek. Ha már most megvan a görcsrohamokra való hajlamosság, felmerül a kérdés, hogy mely különös ingerek váltják ki azokat? Az állatkísérletekből ismerjük az agykéregnek mechanikai, villamos, hő- és chemiai ingereit. Mechanikai ingerek csak koponyasérüléseknél és agydaganatoknál jöhetnek tekintetbe, míg a genuin epilepsiánál csak chemiai ingerekről lehet szó. Ha még fontolóra vesszük, hogy epilepsiások, kivált ha ritkák a rohamok, az interparoxysmalis időben elég gyakran jelét sem adják betegségüknek és hogy anyagcseréjük sem mutat semmiféle feltűnő rendellenességeket, a görcsokozó anyagokat a rendes anyagcseretermékek között kell keresnünk.

A chemiailag jól meghatározott vegyületek közül direct görcsrohamokat okozónak tartja HAIG¹ a húgsavat, KRAINSKY²

¹ ALEX. HAIG, Further observations on the excretion of uric acid in epilepsy and the effects of diet and drugs on the fits. Brain 1896, Spring.

² N. KRAINSKY, Zur Pathologie der Epilepsie. Allg. Zeitschr. f. Psychiatrie, 1897, 4, 1612. old.

az ezzel szoros kapcsolatban levő *carbaminsavas ammoniakot*, és én¹ az *ammoniakot* és a *szerves ammoniakbasisokat*, mely utóbbiak közül legelsőbbben a cholinra hívtam fel a figyelmet. HAIG kimutatta, hogy a kiválasztott húgysav mennyisége állandóan süllyed az epilepsiás roham előtt és utána ugyanazon mértékben felszáll. Ezt találta a migrainrohamoknál is. Sőt KRAINSKY folytatódólagos quantitativ húgysavmeghatározások alapján a roham beköszöntését — a mennyiben a rohamok nem éppen mindennapiak voltak — 1—2 nappal előre meg tudta mondani. CARO² ezen adatokat nemcsak tipikus rohamoknál észlelte, hanem absence-oknál is. KRAINSKY a húgysav ezen csökkenését az epilepsiásoknál képződő rendellenes anyagszertermékek, a carbaminsavas ammoniaknak tulajdonítja, mely szerinte az epilepsiások vérében igen jelentékeny és az epilepsiás jelenségek intenzitásának megfelelő mennyiségben fordul elő. Az ő nézete szerint epilepsiásoknál a húgyany nem alakul át organikus savak segítségével húgysavvá, mint az rendszeren történik, hanem 1 mol. víz felvétele által carbaminsavas ammoniakká lesz.

Azon kérdés eldöntése czéljából, hogy mily természetű anyagok tekintendők görcskiváltóknak, állatkísérleteket végeztem, melyeknek eredményeit a következőkben akarom ismertetni.

Általános megjegyzésül előre akarom bocsátani, hogy az anyagokkal való kísérleteimnél állandóan arra ügyeltem, hogy azok a vérre nézve lehetőleg indifferensek legyenek, kaustikus tulajdonságokkal ne birjanak, tehát sem szabad basisok, melyek a vértestecseknek oldhatják, sem szabad savak, melyek alvadást okozhatnak, nem alkalmaztattak. A vizsgálandó savak tehát indifferens basisokkal (natrium), a vizsgálandó basisok indifferens savakkal (sósav, szénsav) köttettek össze. Az oldatok egyben 0.8% *ClNa*-ot tartalmaztak. Az anyagok reakciója lakmusra közömbös vagy alkalikus volt, mert szabad savak nem fordul-

¹ DONATH, A cholin szerepe az epilepsiában, Orv. Hetil. 1903, 4. sz.; továbbá Magy. Orv. Arch. 1903. I. füz.

² CARO, Ueber die Beziehungen epileptischer Anfälle zur Harnsäureausscheidung. Deutsche med. Wochenschr. 1900, 19. sz.

hatnak elő az alkalikusan reagáló vérben. Lehetőleg gyors és direct hatások elérése végett intravenosus úton történt a bekebelezés (a szabaddá tett v. jugularis externa vagy v. saphena magna-ba). Majdnem kizárólagosan kutyákat alkalmaztam; csak a guanidinnal végeztettek tájékoztató előkísérletek tengeri malaczkokon is, a hol bőr alá fecskendések történtek.¹

Neutralis natriumurat-tal végzett kísérletek.

A rendkívül nehezen oldható húgysav, mely, mint ismeretes, 14,000 r. vízben oldódik, mint neutralis húgysavas natrium lett alkalmazva. Ez 62 r. vízben oldódik, miközben részben a sokkal nehezebben oldható savanyú sóba megy át, melynek oldalához már 1100—1200 r. víz szükséges. Ennek lehető megakadályozására 0·5%-os $NaOH$ tétetett hozzá, a mit az állatok kifogástalanul tűrtek.

3 kutyának pro kg. állat 0·075—0·09 g. neutralis húgysavas natrium 0·5—1·5%-os oldatból (összesen 44—150 cm.³) intravenosusan injiciáltatott.

Az állatok nem mutattak semmiféle jelenséget, jól érezték magukat utána, görcsöknek nyoma sem volt észlelhető.

A húgysavról állítják, hogy emlőszállatok vérében hiányzik és csak kóros viszonyok között mutatható ki. A legnagyobb mennyiségben találtatott köszvényesek vérében (0·025—0·175‰ GARROD szerint), éppúgy leukæmiánál. Minthogy az általam használt kristályviztartalmú neutralis natriumurat ($Na_2C_5H_2N_4O_3 + H_2O$) 74% húgysavat tartalmaz, úgy ezen számok — a vért a testsúly 10%-ának számítva — a köszvényénél talált legmagasabb értékek 4—36-szorosát képezik. Ez az eredmény előre volt látható, ha tekintetbe vesszük, hogy sem a köszvényénél, sem a leukæmiánál nem fordulnak elő convulsiók. Ezzel kísérleti úton is bizonyítékát szolgáltatam a cholinról szóló dolgozatomban felállított tételnek, hogy az a tény, mely szerint a kiválasztott húgysav mennyisége ugyanazon mértékben felszáll az epilepsiás roham után, mint a hogy a roham előtt süllyedt volt, világosan mu-

¹ Az összes itt említett kísérletek adatai másutt egy kimerítő dolgozatban lesznek közölve.

latja, hogy a húgysav eltűnéséről carbaminsavas ammoniák képződése következtében — a mint azt a Krainsky-féle elmélet állítja — nem lehet szó, hanem hogy itt csupán csak a húgysav retentiója megy végbe a vérben.¹ Ez a húgysavretentio, a mint azt ott kifejtettem, valószínűleg az érmozgatók auraszerű izalmának befolyása alatt következik be, melynek következménye, hogy a nehezen oldható húgysav nehezebben diffundál a szűkült veseedényeken át. A roham után megszűnik a vasomotorius izgalom és vele együtt az osmotikus akadály. Legfeltűnőbben mutatkozik ez az osmotikus akadály a nehezen diffundáló húgysavnál; hogy ez azonban a kitűnően diffundáló chlornatriumot is befolyásolja, ezt mutatják VOISIN és KRANTZ² kísérletei, melyek szerint a konyhasó kiválasztás az epilepsiások vizeletében, még ha meglehetősen ingadozásoknak is van alávetve, mégis a roham előtt és közben retentiót mutat, melyet fokozott kiürülés követ. Ugyanez áll KRAINSKY saját vizsgálatai szerint a phosphorsavra is.

Egyébként a húgysav a köszvénynél sem játszik pathogenetikus szerepet. A kórokozó momentum a köszvénynél az anyagcsere veleszületett vagy szerzett anomáliájában áll, mely a húgysav lerakódására az ízületekbe, vesékbe és egyéb szervekbe vezet, a hol *mechanikai úton* való izgatás és bántalmazás által idézi elő a kórjelenségeket. Egyéb betegségeknél, mint vesemegbetegedéseknél és kivált leukæmiánál is előfordul a húgysavkiválasztás hasonló felszaporodása; leukæmiánál ez a rendes maximum ötszörösére (napi 4 gmg és ezen túl) emelkedhetik anélkül, hogy köszvényes lerakódások vagy egyáltalán köszvényes jelenségek bekövetkeznének. *A húgysav ugyanis nem mérges anyag.*³

¹ Egy további bizonyítékát is látjuk e ténynek KRAINSKY dolgozatában. Ő a húgysavoldó lithiumcarbonatot hatásosnak vélte találni az epilepsiánál, de a lithiumcarbonat daczára mégsem tudta a húgysav egészen való felszaporodását megállapítani.

² R. VOISIN et L. KRANTZ, Recherches sur les éliminations urinaires des épileptiques pendant le régime ordinaire et le régime déchloruré. Arch. de médecine expérimentale, Mars 1905; Ref. Revue neurologique 1905, 24. sz.

³ A húgysav ártalmatlan volta az epilepsiában J. HOPPE következő

Másként áll a dolog az esetleges *carbaminsavas ammoniak*-kal $\left(\text{CO} \begin{smallmatrix} \text{NH}_2 \\ \diagup \text{O} \diagdown \text{NH}_2 \end{smallmatrix}\right)$.

Itt a mérges, görcsokozó alkatrész, a mint azt fenti dolgozatomban már említettem, az ammoniak, melyre azonnal át fogok térni. A *carbaminsav* tudvalevőleg nem köthető össze más anorganikus basisokkal, de ismerjük ennek esterjeit, első sorban az *athylestert* mint *urethant* $\left(\text{CO} \begin{smallmatrix} \text{NH}_2 \\ \diagup \text{O} \diagdown \text{C}_2\text{H}_5 \end{smallmatrix}\right)$, mely mint *hypnoticum* és görcsokozó mérgek *antidotuma* 4·0—5·0 g-nyi egyes dosisokban nyer alkalmazást. A *carbaminsavalkatrész egymagában eszerint nem tekinthető görcsokozónak*.

Salmiak-kal végzett kísérletek.

9 kísérletben kutyáknak pro kilogramm 0·05—0·5 g. ammoniumchlorid 1—10%-os oldatból (összesen 25—88 cm.³) intravenosusan injiciáltatott.

Itt mutatkozott a salmiák *kiváló görcsokozó hatása*. Az akaratlagos izmok görcséhez *mély, lassú, görcsös légzés* csatlakozott, mely a légzés és szívmozgás gátlásához is vezethet (a vaguscentrum izgalma), továbbá *nagyfokú, gyakran habzó nyálfolyás, olykor hányás és akaratlan vizeletürítés, a mint az részben régebbi toxikologikus bűvárok kísérleteiből ismeretes*.

Ki kell emelnem, hogy a görcshatás a hatékony anyagnak nemcsak az állat súlya szerint bevitt mennyiségétől, hanem annak koncentrációjától is függ, mely utóbbival a jelenségek hevesége növekszik.

érdekes anyagcserekísérletéből is kiderül (Epilepsie und Harnsäure, Wien. kl. Rundschau 1903, 45. sz.), mely egyúttal megczáfolja a KRAINSKY-féle elméletet a húgysavval való autointoxicációról. Ez a bűvár 24 epilepsziás gyermeknek 6 héten át vegyes táplálékot adott; majd 6 héten át növényi táplálékot roborattal (növényi fehérjekészítmény), végül ismét 6 héten át vegyes táplálékot. Az első tápláléknál egy személyből átlag 0·63 g. húgysav választatott ki, a második tápláléknál 0·39 g. És mégis a kísérleti egyének összes rohamainak száma az első szakban 181, a második szakban 205, a harmadik szakban ismét 182 volt.

A kísérletekből kiderült, hogy 3—4%-os salmiákoldatokból 0.15 g. kgként már görcsokozólag hat és egy 4%-os oldatból 0.2 g. kgként a legsúlyosabb görcstünetekkel váltja ki, melyek az állat életét a legnagyobb fokban veszélyeztetik.¹

Közönséges ammoncarbonattal folytatott kísérletek.

4 kísérletben kutyáknak 4—10%-os közönséges ammoncarbonat-oldatból pro kg. állat 0.15—0.27 g. (összesen 30—118 cm.³) intravenosusan injiciáltatott.

A görcstünetek hasonlóak a salmiákéihoz és 5%-os oldatnak kgként 0.27 g-jánál már súlyos természetűek.

Trimethylamin és cholin.

A szervezetben tekintetbe jövő szerves ammoniakbázisok közül a trimethylamin mintegy átmenetet képez az ammoniak és a cholin között. Utóbbi a trimethyl-oxethyl-ammonium-oxydhydrat. A sósavas trimethylamin több bűvár gondos vizsgálatai szerint kutyáknál és macskáknál súlyos tonikus és klonikus görcsöket idéz elő. A salmiak HUSEMANN² szerint mérgeesebb, mint az æquivalens sósavas trimethylamin, mely utóbbiból 1 kg. házinyulra nézve 0.1 g. képezi a letalis dosist.

A mi a cholint illeti, itt házi nyulakon, tengeri malaczokon és kutyákon végzett számos kísérleteimre akarok csak röviden utalni, melyekből kiderült, hogy a cholin, intracorticalisan (a motorius zona elkerülésével) vagy subduralisan injiciálva, a legsúlyosabb tonikus és klonikus görcsöket idézi elő, melyek paresisekre vezetnek. A mellett bő nyálfolyás megy végbe, mely a habzásig fokozódhatik, továbbá nagyfokú könyelválasztás, élénk bélelválasztás és peristaltika, gyakori széklet- és vizeletürítésekkel, olykor hányás is. Az ellenőrzés céljából állatokon

¹ Itt meg akarom jegyezni, hogy a normalis emberi vizeletben kiválasztott 24 órai ammoniakmennyiség 0.6—1.2 g-ot tesz ki, ami 1.9—3.8 g. salmiáknak felel meg. A normalis vérsavó is tartalmaz ammoniakot.

² KUNDEL, Handb. d. Toxikologie, Jena, 1899, 586. old.

ugyanolyan, sőt 10 %-os *ClNa*-oldattal végzett injectiók¹ vagy semmiféle jelenséget sem okoztak, vagy legfeljebb a contralateralis végtagok könnyű, hamar muló paresisét idézték elő.²

Ezen eredményeimet teljesen igazolták BUZZARD és ALLEN.³ Ők úgy találták, hogy intravenosus, subduralis vagy intraperitonealis cholininjectiók nyulaknál vagy patkányoknál convulsiókat idéznek elő. Azon megjegyzésükre pedig, hogy az ehhez szükséges mennyiségek aránylag sokkal nagyobbak, mint azok, melyek embernél az idegrendszer degeneratív megbetegedéseiből támadnak, az a válasz, hogy az epilepsziás beteg *túlingerlékeny* agya szintén kisebb mennyiségben igényli ezen anyagokat, hogy ezekre görcsökkel reagáljon, mint az állat ép agya.

Ujabban figyelmessé lettek a cholin *kaustikus* hatására is, a mi ugyancsak azt bizonyítja, a mit már hangsúlyoztam, hogy a cholin korántsem oly ártalmatlan, mint a hogy azt

¹ Úgy a konyhasó-, mint a cholininjectiók önmagukban teljesen ép állatokon is végeztettek, úgy hogy a SARBÓ referatumban (Az epilepsia kór- és gyógytanának jelen állása, Budapest, 1904) tett kifogás, miszerint itt a konyhasó és cholin cumuláló hatásáról lenne szó, alaptalan.

² A cholint a cerebrospinalis folyadékban kimutató újabb eljárásommal (Detection of choline in the cerebro-spinal fluid by means of the polarisation microscope, Journ. of physiology Vol. XXXIII. No 3 és Revue neurologique 1906 No 4.), melylyel a cholint, platinsójának kettősen törő tulajdonsága alapján, úgy szerves idegbajoknál, mint epilepsiánál ki lehet mutatni, egyidejűleg ugyanott ROSENHEIM OTTÓ, HALLIBURTON tanár élet-tani laboratoriumából Londonban ismertette eljárását a cholin kimutatására jód-jodkalium vagy kalium-bismuthjodid segítségével és kilátásba helyezte, hogy eljárásának alkalmazását idegbajosok cerebrospinalis folyadékánál ismertetni fogja. Kérelmemre ROSENHEIM úr szíves volt még eredményeinek nyilvánosságra hozatala előtt velem levélileg a következőket közölni: «A cerebrospinalis folyadék 14 eset közül 6 izben — köztük epilepsia 1 esete, míg a többiek progressiv paralysisek voltak — positiv eredményt szolgáltatott. A többiek, melyek közül 3 progressiv paralysis rohamok nélkül, továbbá melancholia, secundær dementia stb. volt, negatívnak bizonyultak. Más esetekben az Ön methodusát az enyémmel combináltam, úgy hogy eredményeim teljes összhangban állanak HALLIBURTON tanár, MOTT és az *Onéivel*.»

³ E. FARGUHAM BUZZARD and R. W. ALLEN, Some observations on the effects produced by choline upon animals. Review of Neurology and Psychiatry, July 1905.

azelőtt felvették. A cholin ezen kaustikus hatását részben rendkívüli hygroskopos voltára vezetném vissza. Ama ténynyel, hogy a Röntgen- és radiumsugarak a lecithint szétbontják és abból cholint hasítanak le, sikeresen magyarázzák ezen sugarak szövetpusztító hatását (HOFMANN és SCHUTZ, EXNER és ZDAREK, EXNER és SYWCK, WERNER).

Az ammoniak, trimethylamin és cholin tehát görcsokozó anyagok.

Kreatinin és guanidin.

A chemiai összefüggéseknél fogva, melyek a *kreatin*, *kreatinin* és a *húgysav*csoport testei (purin- vagy alloxurtestek) között fennállanak, érdekesnek látszott, hogy ezekre is figyelmet fordítsak.

A *kreatin*, a methylguanidinnak eczetsav-helyettesítő terméke, nem mérges. Ezzel szemben a *kreatinin*, mely az előbbiből savakkal való főzés útján 1 mol. víz kilépése által keletkezik, tehát annak anhydridje, mérges tulajdonságú. MEISSNER és BOGOSŁOWSKY¹ intravenosus kreatinininjectiókra a pulsus szaporodását, a bélperistaltika élénkülését, mindinkább fokozódó bénulást, *klonikus görcsöket* és 16—18 óra után bekövetkező halált észleltek.

Vizsgálata érdekemesnek tartottam különösen egy idetartozó alloxurbasis oxydatiós termékét, t. i. a guaninból sósav és kaliumchlorat útján nyert *guanidint*, mely bő ammoniak-maradék-tartalmánál fogva — carbon-diamidimid $\text{C} \begin{smallmatrix} \text{NH}_2 \\ \text{NH} \\ \text{NH}_2 \end{smallmatrix}$ — erős basikus vegyületet képvisel, mely még a levegőből is szén-savat von el és guanidincarbonatot alkot. Eddig ugyan még nem mutatták ki emberi vizeletben, mégis a húgysav egy bomlástermékének tekinthető.²

Sósavas guanidin-nal végzett kísérletek.

5%-os oldattal kutyákon 4 (3-szor intravenosusan és 1-szer subcutan) és tengeri malaczokon 6 kísérlet (subcutan) végeztetett.

¹ KUNKEL, l. c. 573. old.

² Legujabban azonban ACHELIS kimutatótt *methylguanidint* a normalis vizeletben. Zbl. f. Physiologie, 1906, 14. sz.

Kutyáknál kgonként 0.2 g. sósavas guanidinnak *intravenosus infusiója* néhány *klonikus görcsöt* idéz elő, melyet nem-sokára a testizomzat általános paresise követ; ezenkívül hányás áll be. 0.3 g. pro kg. intravenosus úton 6 óra után halálhoz vezetett. A *subcutan injectio* már a hátsó végtagok *erős tonicus feszítő görcseit* idézte elő; ezek még másnap is ismétlődtek és 29 órával a bevitel után halálhoz vezettek. Általában a guanidin kutyáknál, a salmiákhhoz viszonyítva, inkább bénulásos jelenségeket okoz mint görcsöket.

Tengeri malacznál kgonként 0.3 g-nyi subcutan injectiók *igen kifejezett klonikus görcsöket* idéznek elő, kivált a *fej rángását*, mire szintén az akaratlagos izomzat általános paresise, még a hasizmoké is (felfúvódás) következik be. 0.4 g. tengeri malaczoknál bőr alá fecskendezve *heves klonikus görcsök* okozója, melyek napokig fennállhatnak. A halál 1—4 napon belül következik be.

A feltevés tehát, mely szerint az ammoniákhöz chemiailag közelálló guanidin szintén görcsöket fog előidézni, ezen kísérletekből beigazolást nyert.

A kaliumsók

külön tárgyalást érdemelnek a basisok között. A kaliumsók tudvalevőleg, direct a vérpályába bevezetve, erős szívbénítő méregnek bizonyulnak. A testsúly kgjára 0.27 g. chlorkalium kutyáknál halált idéz elő (HERMANN'S FR.). A jelenségek a következők: *fáradtság, a testhőmérsék csökkenése, dyspnoë, heves klonikus és tonikus görcsök a légzés szünetelésével, a vérnyomás süllyedése 0-ra a belégzés alatt, végül opisthotonus. A rég felé fellépő convulsiók tehát typicus fulladásos görcsök. Ezzel ellentétben a vérnyomás az epilepsiás rohamban, a mint azt most kivált a Quincke-féle lumbal punctio meghonosodása óta határozottan tudjuk, rendkívül fokozott. A cerebros spinalis folyadék a vérnyomás finom manometerének bizonyul, a mennyiben beszédnél, köhögésnél, erősebb kilégzésnél e folyadék szaporább kifolyását észlelhetjük. Ismételten láttam a kifolyó mennyiség növekedését, ha a lumbal punctio közben epilepsiás roham követ*

kezett be. NAVRATZKI és ARNDT¹ méréseiből kiderül, hogy a liquor cerebrospinalis feszülése közvetlenül a roham előtt és két roham közötti szünetben nem volt magasabb a normalisnál; csak a roham kezdete után szállt fel a vérnyomás 600-ról 870 mm-nyi víznyomásra. De egyéb klinikai bizonyítékaink is vannak a vérnyomásnak a görcsroham közben történő emelkedésére és ezek az edényrepedés által létrejövő bőr- és nyálkahártyavérzések, nevezetesen a conjunctivák alatti vérömlések. *Nem tartom tehát valószínűnek, hogy a vérnyomást csökkentő kaliumsók a görcsroham előidőzésében szerepelnek.* Másként áll azonban a dolog az ammoniaksókkal, melyek tudvalevőleg a vérnyomást rendkívül fokozzák, a mely fokozódás a nyaki gerincvelő átmetszése után, tehát függetlenül a vasomotoros centrumból is bekövetkezik.

Tejsav.

A húgysav, az ammoniák és a hozzá közelálló szerves ammoniakbasisok méltatása után ismét egy savra térek át, mely újabb időben ZWEIFEL és munkatársai kiváló dolgozatai által ugyan nem az epilepsiával, de a vele klinikailag rokon, terhesek eklampsiájával pathogenetikus összefüggésbe hozatott.

Bármennyire eltérjen is egymástól ætiologiai szempontból a terhesek eklampsiája és az epilepsia, hisz az első egy a terhesség által létrejövő méreghatás, mégis közös bennük az eszméletlenséggel járó convulsio és az ennek alapját szolgáltató izgalma az agykéregnek. Az eklampsiánál talált leletek tehát az epilepsiára nézve is érdekesek.

ZWEIFEL,² valamint LOCKEMANN³ eklampsiás terhesek venæsectio után nyert vérében, vizeletében, de még inkább ily bete-

¹ NAVRATZKI és ARNDT, Ueber Druckschwankungen in der Schädel- und Rückgratshöhle bei Krampfanfällen. Sitzung des psychiatr. Vereins zu Berlin vom 17. Juni 1899.

² ZWEIFEL, Das Gift der Eklampsie und die Konsequenzen für die Behandlung, Münch. med. Wochenschr. 1906, 7. sz. és már előbb: Arch. f. Gynaekologie 1906, 76. k.

³ G. LOCKEMANN, Ueber den Nachweis von Fleischmilchsäure im Blut, Urin u. Cerebrospinalflüssigkeit eklamptischer Frauen. Münch. med.

gek placentakivonatában és magzatjaik köldökzsinórvérében *hústejsavat* találtak, melyet zinksója előállítására és analysisre által azonosítottak. ZWEIFEL azt mondja, hogy 18 egymásután megvizsgált esetben eklampsiás nők vizeletében rendszeresen megtalálta a hústejsavat, még nagyobb mennyiségben és sokkal könnyebben található meg azonban az eklampsiások vérében. Ép emberek *venæsectio* útján nyert vérében ezideig nem tudták kimutatni a hústejsavat, beteg embereknél azonban, mint ismeretes, kivált légzési zavaroknál (tüdőgyulladás, szívbaj, bronchitis stb.) előfordul. ZWEIFEL azt is állítja, hogy az uræmia és epilepsia azáltal különbözik az eklampsiától, hogy az elsőknél hiányzik a tejsav lehasadása.

Fontosnak tetszett két kérdésben felvilágosítást nyerni:

1. *Tartalmaz-e tejsavat az epilepsiások cerebro-spinalis folyadéka?* Hisz ha a tejsav epileptogen jelentőségű, kell, hogy a liquor cerebrospinalisban ki legyen mutatható. 2. *A direct a vérpályába tömegesen bevezetett tejsav egyáltalán képes-e convulsiv hatásokat előidézni?*

Az általam egyszerűsített eljárásra vonatkozólag, hogy miként mutatható ki a tejsav a cerebrospinalis folyadékban, legközelebb megjelenő kimerítő dolgozatomra kell utalnom.

A mi a cerebrospinalis folyadéknak egyszerre felhasznált mennyiségét illeti, kezdettől fogva el volt várható, hogy itt, ha egyáltalán, a tejsavat csak csekély mennyiségben lehet majd kimutatni. Az *elhasznált folyadékmennyiség* tehát körülbelül 100 cm³-nyi volt, a mi némely esetben csak úgy volt elérhető, hogy 3–4 beteg liquorja egyesítettett. Mert a lumbalpunctio csak diagnostikus vagy therapeutikus indicatiók alapján történt. Két esetben a folyadék csak egy-egy egyéntől származott, ezek között volt egy súlyos epilepsia alcoholica eset. A többi mind genuin epilepsia volt, összesen 9 eset. Az összes lumbalpunctiók mennyisége 20 volt. A liquorelvonás a legkülönbözőbb időpon-

tokban történt, többnyire mindjárt a roham után, olykor hamarosan roham követte azt.

5 cerebrospinalis folyadék vizsgáltatott meg hústejsavra, még pedig 108, 96 és 95 cm.³ 4—4 epilepsiástól, 117 cm.³ 3 epilepsiástól, 61 és 100 cm.³ 1—1 epilepsiástól gyűjtetett össze.

Az eredmény az volt, hogy soha nyoma sem találtatott a tejsavnak, az Uffelmann-féle reactio állandóan negatív volt, holott az ellenőrzési próbák mutatták, hogy az Uffelmann-féle reagenssel a tejsavnak még 1·0, sőt 0·5 mg.-ja is 50 cm.³-nyi oldatban, methodusom szerint feldolgozva, pontosan kimutatható.

TURNER és CORIAT¹ vizsgálataiból tudjuk, hogy a cerebrospinalis folyadék röviddel a halál után savanyuvá válik, még pedig, úgy látszik, annál több sav képződik, minél később a halál után bocsátjuk ki a liquort. Ez a sav az optikailag inactív erjedéses tejsav.

A második kérdést, az intravenosusan bekebelezett tejsav hatását illetően a következő kísérleteket végeztem:

3 kutyának 1·0—1·5 g. neutralis tejsavas natrium pro kg. állat 10—15%-os oldatban (összesen 76—240 cm.³) intravenosuson injiciáltatott.

Csak egyikénél a két állatnak, melyek mindegyike kg-onként 1·5 grammot kapott, következett be $\frac{1}{4}$ óra után hányás, de nemsokára ez az állat is egészen élénk volt.

Daczára a rendkívül nagy mennyiségű tejsavnak, melylyel a vér el lett árasztva — a vér körülbelül 1·0—1·5% tejsavas natriumot tartalmazott —, kis álmosságon kívül semmiféle feltűnő jelenségek nem mutatkoztak. Görcsöknek nyoma sem volt; az állatok jól érezték magukat.

A tejsav ugyanis a vérben hamarosan szénsavvá és vízzé ég el; ezt elárulja a vizelet erősen alkalikus reactiója és hogy sav hozzátételére erősen pezseg.

A dolog tehát így áll. A heves izomműködés folytán akár az eklampsiánál, akár az epilepsiánál vagy egyéb görcsöknel

¹ ISADOR H. CORIAT, A contribution to the chemistry of nerve degeneration in general paralysis and other mental disorders. Americ. Journ. of insanity. Vol. LIX. 1903, továbbá: The chemical findings in the cerebrospinal fluid and central nervous system in various mental diseases. Ibid. LX. 1904.

az izmokban hústejsav képződik, mely a vérbe jutva túlnyomó részben hamarosan teljesen oxydálódik és melynek csak kis része megy át változatlanul a vizeletbe.

Itt megemlítem PUGH¹ egy érdekes vizsgálatát, ki közvetlenül a roham előtt az alkalescentiának kifejezett, hirtelen csökkenését észlelte, egy további csökkenés 3—10 percczel megy végbe a roham után. Nevezett szerző az alkalescentiának ezen csökkenését a roham után az izmokban képződött hústejsavra és carbolsavra vonatkoztatja. Az interparoxysmalis időben szintén átlag alacsonyabb volt, mint az ellenőrzéses esetekben.

Epilepsiások vizeletében is röviddel a roham után tejsavat találtak (Araki, Inoye és Saki), éppúgy tartós izomerőltetések (Spiro, Colosanti és Moscatelli) és hosszú, heves vajudás után (Vikarelli).

Találtak továbbá tejsavat a vizeletben a már említett légzésszavarokkal járó betegségeken és általában *nagyfokú oxygen hiány (Araki, Terray)* okozta állapotokon kívül *acut sárga májatrophíánál (Schultzen és Riess)* és *nagyfokú anaemiánál (F. Hoppe-Seyler)* is, mely betegségeknél görcsök nem fordulnak elő, valamint egész soránál a *mérgezéseknek* (phosphor, arsen, szénoxid, kéksav, amylnitrit, curare, strychnin, morphin, veratrin, cocain).

Még fel akarom említeni, hogy gyomorrák előrehaladott eseteiben a gyomorban kizárólag tejsav képződik és bizonyára nagyrészt fel is szívódik, anélkül hogy görcstünetekre kerülne a sor.

Az ártalmatlan tejsav tehát nem képes görcsjelenségeket előidézni, s így nem lehet kórokozó szerepe a terhesek eklampsiájában, hanem csak secundaer jelenség: az izomgörcsök productuma.

Ám állatkísérleteimet, melyeket a könnyebben hozzáférhető *közönséges (erjedéses) tejsavval* végeztem, kifogásolhatnák, mert nem *hústejsavval* dolgoztam. Erre válaszom a következő:

¹ A. PUGH, On certain Blood Changes in Idiopathic Epilepsy. Brain 1903, 101. old. Ref. Jahresber. über d. Fortschr. d. Neurologie u. Psychiatrie, 1903, 725. old.

A hústejsav és erjedéssé tejsav chemiai alkatuk szerint tudvalevőleg azonosak, hisz mindkettő æthylidentejsav α -oxypropionsav, $\text{CH}_3 \cdot \text{CH}(\text{OH})\text{COOH}$) azzal a különbséggel, hogy a hústejsav a polarizált fénysugár síkját *jobbra* téríti, míg az erjedéssé tejsav *optikailag inactiv*. Ez utóbbi ugyanis egyenlő mennyiségű jobbra és balra térítő tejsavból áll, mely componensek pl. strychninsóik előállítására által izolálhatók, a mennyiben a nehezebben oldható bal-tejsavas strychnin előbb kikristályosodik. Itt tehát *physikai isomeria* forog fenn, mint azt a jobb- és balborkósavról, valamint az e kettőből álló optikailag inactiv szőlősavról, továbbá a szőlőcukorról (dextrose) és gyümölcscukorról (lævulose) tudjuk. Mindezen anyagok, melyek csak csekély különbségeket mutatnak a kristályosodásban (jobb- és balhemiedriák), az oldódási viszonyokban, a sók kristályvíz-tartalmában stb., physiologiaiilag egyenlően viselkednek. A könnyebben oxydálódó lævuloséről tudjuk, hogy diabetikusok valamivel jobban emésztik meg mint a dextrosét. Ha feltételeznők, hogy a hústejsav görcsokozólag hat, akkor fel kell tennünk azt a különös dolgot is, hogy az erjedéssé tejsav másik componense éppoly mértékben sedativ hatást fejt ki.

Szükségesnek tartom itt megjegyezni, hogy a vérben még két, a tejsavhoz közelálló sav léphet fel, anélkül hogy görcsöknek nyomát is előidézné. Ezek tudvalevőleg a súlyos diabetesnél képződő *acetezetsav* és β -*oxyvajsav*, mely utóbbi a tejsavnak legközelebbi homologja. Ezek okozói a coma diabeticumnak és MAGNUS-LEVY ilyen esetekben napi 150—180 g. β -oxyvajsavnak kiválasztását jegyezte fel. Ezek a savak sem mérgesek egymagukban, hisz ártalom nélkül vihetjük be az ép szervezetbe (SCHWARZ, FRERICHs); pusztító hatásuk a diabetesnél savjellegüknek (acidosis) tulajdonítandó, a mennyiben a szervezetből alkali vonnak el, még pedig úgy fix alkali, mint a fehérjéből lehasadt ammoniakot.

A mi a szervezetben előforduló ásványsavakat (sósav, phosphorsav, kénsav, szénsav) illeti, úgy ezek indifferens (natrium) összeköttetéseikben egyáltalán nem jönnek tekintetbe.

Vizsgálataim eredménye tehát, hogy az epilepsiás görcsroham előidézésében savak (húgsav, tejsav, acetezetsav, oxy-

vajsav, az ásványsavak) *nem szerepelnek, de igenis fontos szerepet játszik az ammoniak és a hozzá közelálló szerves ammoniakbázisok* (mint a trimethylamin, cholin, kreatinin, esetleg guanidin).

★

A genuin epilepsiánál fellépő görcsrohamok ezen *chemiai* okainak vizsgálata után egy *mechanikai* természetű okról akarok megemlékezni, melyet legutóbb TURNER¹ állított fel. Ez a bűvarok epilepsiás agyban az idegsejtek és edények læsióját találta: az idegsejtek részben hiányosan fejlettek, részben erősen elváltoztak. Ezek az elváltozások hasonlítanak azokhoz, melyek kutyáknál az agyütőerek alakítása által mesterségesen idézhetők elő. Található továbbá epilepsiásoknál az előrehaladott korban is igen sok subcorticalis idegsejt, melyeket különben embernél csak a legfiatalabb korban találni. A véredényekben számos vérlemezke és általuk előidézett intravascularis alvadék fordul elő. Az agykéregben talált kis vérzések szintén következményei volnának ezen alvadékoknak. TURNER egyrészt a hiányosan fejlett és valószínűleg nem állandó idegsejtekben és másrészt a vérkeringés localis stasisában, mely következménye az intravascularis alvadásnak, látja az epilepsiás roham okát.

A mi az epilepsiásoknál eme felvett vérlemezkeszaporodást illeti, mely állítólag az intravascularis alvadásoknak és a kis corticalis hæmorrhagiák kiinduló pontját képezi, úgy kell, hogy elsőben ezen lelet in vivo mint primær jelenség ki legyen mutatva.

Azon véleményen vagyok, hogy itt szintén csak secundaer jelenséggel, a roham által rendkívül fokozódott vérnyomás következményével állunk szemben.

Nem látom okát annak, hogy miért legyenek a TURNER leírta vérzések más eredetűek, mint a jól ismert vérömlések a conjunctivában, a fej és törzs köztakarójában, az orr, hörgők, végbél és hüvely nyálkahártyáiban, vagy a pontszerű vérzések,

¹ JOHN TURNER, The pathology of Epilepsy. Brit. med. Journal, March 3, 1906.

melyek halálos kimenetelű status epilepticusnál a 4. agygyomrocs fenekén találhatók. Sőt inkább elvárható, hogy ha a tömött cutis-szövetben kis edényrepedésekre kerülhet a sor, ez annál inkább történhetik a lágy agyszövetben, a hol az edénycapillarisok falzata kifelé sokkal csekélyebb támaszra talál.

Másként áll azonban a dolog a TURNER-féle *sejtlelet* jelentőségével. Ezek a kóros behatás folytán nemcsak hiányosan, hanem egyuttal hibásan fejlett idegsejtek tényleg csekélyebb ellenálló képességgel bírhatnak némely (basisos) anyagsere termék ingerhatásával szemben.

★

Végül kedves kötelességemnek tartom köszönetet mondani KLUG professor úrnak, ki szíves volt állatkísérleteimnél intézete segédeszközeit rendelkezésemre bocsátani, valamint NEMES SÁNDOR úrnak, ki az állatkísérleteknél és DUPPUIS LAJOS úrnak, ki a vegyészeti vizsgálatoknál segédkezett.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 október 22.-én tartott üléséből.)

ADALÉK AZ ELIMINÁCZIÓ ELMÉLETÉHEZ.

KÜRSCHÁK JÓZSEF lev. tagtól.

Az elimináció történetében KRONECKER elvitázhatatlan örök érdeme, hogy a *Festschrift* 10. §-ában ő mutatott először oly általános módszert, mely *bármely* algebrai alakzatot alkalmas határozatlanok alkalmazásával *egyetlen egy egyenlettel* — az ú. n. összresolvenssel — ír le. Ezt az érdemét legkevésbé sem csökkenti az a tény, hogy egyetlen egy egyenlettel való leírások bizonyos speciális esetekben már előbb is ismeretesek voltak. Pusztán végeesszámú pontokból álló alakzatok esetében az eliminánsok adtak ily leírást. Továbbá az algebrai térgörbéknek egy egyenlettel való leírására CAYLEY mutatott ma már általánosan ismeretes, de azért talán még mindig nem minden tekintetben kellően méltányolt módszert.

CAYLEY¹ a térgörbe leírására a következő módszert használja. Jelentsék

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \quad y_1, y_2, y_3, y_4$$

két pontnak — X -nek és Y -nak — homogén koordinátáit, tehát

$$\begin{aligned} x_1 y_4 - x_4 y_1, \quad x_2 y_4 - x_4 y_2, \quad x_3 y_4 - x_4 y_3, \\ x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

az XY egyenes homogén koordinátáit. Annak feltételét, hogy XY a vizsgált görbét legalább egy pontban messe, egy

$$R(x_1 y_4 - x_4 y_1, x_2 y_4 - x_4 y_2, \dots, x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

¹ CAYLEY: *On a new analytical representation of curves in space.* Quarterly journal of pure and applied mathematics, vol. III. (1860), pp. 225—236. Collected mathematic papers, vol. IV., pp. 446—455.

alakú egyenlet fejezi ki. Ezt az egyenletet használja CAYLEY a térgörbe leírására.

Ha a vizsgált görbe az

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

algebrai felületek teljes átmetszése, akkor R az

$$F_{\lambda\mu} = f(\lambda x_1 + \mu g_1, \lambda x_2 + \mu g_2, \lambda x_3 + \mu g_3, \lambda x_4 + \mu g_4), \\ G_{\lambda\mu} = g(\lambda x_1 + \mu g_1, \lambda x_2 + \mu g_2, \lambda x_3 + \mu g_3, \lambda x_4 + \mu g_4)$$

homogén formáknak λ és μ szerinti resultánsa. Ha pedig a görbe a teljes metszésnek csak egy része, akkor R a resultánsnak egyik tényezője.

A PLÜCKER-féle vonalgeometria szempontjából $R=0$ ama sugárkomplexus egyenlete, melyet a görbét metsző egyenesek alkotnak. Ha ellenben az XY egyenes helyett az X és Y pontokat külön tekintjük, még pedig X -et változónak, Y -t ellenben határozatlannak, de állandónak: akkor $R=0$ ama kúp egyenlete, melynek alkotói az Y csúcsból a görbe pontjaihoz vont egyenesek. Abban a különös esetben, midőn Y -nak az

$$1, 0, 0, 0, \quad 0, 0, 1, 0$$

pontokat összekötő egyenes határozatlan

$$g_1=l_3, \quad g_2=0, \quad g_3=-l_1, \quad g_4=0$$

pontját választjuk, x_4 -et pedig az egységgel teszszük egyenlővé, $R=0$ épen a görbét jellemző KRONECKER-féle egyenletbe megy át.

CAYLEY értekezésének olvasása, különösen pedig CAYLEY és KRONECKER gondolatainak összehasonlítása, engem abban az esetben, midőn két felület teljes metszéséről van szó, R néhány fontos tulajdonságának tisztán algebrai bebizonyítására vezetett. A következő sorok ily módon nyert eredményeimet tartalmazzák.

Mínthogy eredményeim a több mint háromszorosan kiterjedt térben szintén érvényesek, azért mindjárt m változós homogén egyenletekből indultam ki. Továbbá általánosság kedvéért vizsgálataimat nem a valós és komplex számok tartományában végzem, hanem egy tetszésszerű $[A]$ holoïd tartományban; azzal az egyetlen megszorítással, hogy e holoïd tartomány

teljes legyen, vagyis hogy bármely két mennyiségének legyen legnagyobb közös osztója.

2. Legyen

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

x_1, x_2, \dots, x_m -nek az $[A]$ teljes holoïd származó két homogén formája; f dimensiója legyen n_1 , g -nek dimensiója n_2 . Az

$$\begin{aligned} F_{\lambda\mu} &= f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_m + \mu y_m), \\ G_{\lambda\mu} &= g(\lambda x + \mu y) = g(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_m + \mu y_m) \end{aligned}$$

formákban legyenek $\lambda, \mu; y_1, y_2, \dots, y_m$ új határozatlanok. Végre jelentse

$$R(x, y) = \text{Res.} \begin{pmatrix} F_{\lambda\mu}, & G_{\lambda\mu} \\ \lambda, & \mu \end{pmatrix}$$

a λ és μ határozatlanok $F_{\lambda\mu}, G_{\lambda\mu}$ binár formáinak resultansát.

Ha $f(x)$ és $g(x)$ legnagyobb közös osztója az x -ektől mentes, akkor az $[A]$ tartomány-mennyiségeiből alkotott valamely

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \dots, x_m = a_m$$

értékrendszer akkor és csak akkor elégíti ki az

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0$$

egyenletrendszert, ha kielégíti az

$$R(x, y) = 0$$

egyenletet (ebben az y -okat még mindig határozatlanoknak hagyva).

Ennek bebizonyításánál vegyük tekintetbe, hogy az $R(x, y)$ -ből az a -k behelyettesítése után nyert

$$R(a, y)$$

eltűnése a szükséges és elegendő feltétel arra, hogy

$$f(\lambda a + \mu y), \quad g(\lambda a + \mu y)$$

mint λ -nak és μ -nek a $[[A], y_1, y_2, \dots, y_m]$ tartományból származó formái oly közös osztóval birjanak, mely λ és μ közül legalább az egyiket tartalmazza.

Ha már most

$$f'(a) = g(a) = 0,$$

akkor

$$f'(\lambda a + \mu y), \quad g(\lambda a + \mu y)$$

mindketten oszthatók λ -val. Ekkor tehát valóban

$$R(a, y) = 0.$$

Hogy fordítva $R(a, y)$ eltűnéséből mindenkor $f(a)$ és $g(a)$ eltűnése következik, az a következőkből tűnik ki. Ha $R(a, y) = 0$, akkor az

$$f'(\lambda a + \mu y), \quad g(\lambda a + \mu y)$$

formáknak van egy

$$D = C_0(y) \mu^r + C_1(y) \mu^{r-1} \lambda + \dots + C_r(y) \lambda^r$$

alakú közös osztója, hol C_0, C_1, \dots, C_r az y -oknak az $[A]$ tartományból származó formái és $r > 1$.

Itt $C_0(y)$ okvetlenül az y -októl mentes, vagyis magának az $[A]$ tartománynak mennyisége. Ellenkező esetben ugyanis a $\lambda = 0$, $\mu = 1$ helyettesítés után

$$f(y), \quad g(y)$$

mindketten oszthatók volnának a $C_0(y)$ valódi formával; de ezt az esetet kizártuk. Továbbá C_0 okvetlenül a zérustól különböző. Ugyanis $C_0 = 0$ esetében D osztható volna λ -val, tehát

$$f'(\lambda a + \mu y)$$

szintén osztható volna λ -val; de ez lehetetlen, mert $f'(\lambda a + \mu y)$ a $\lambda = 0$, $\mu = 1$ helyettesítés után a zérustól különböző

$$f'(y)$$

formába megy át.

Továbbá $f'(\lambda a + \mu y)$ mint

$$\lambda, y_1, y_2, \dots, y_m$$

formája felfogva, e határozatlanokban homogén, tehát D is ilyen. Minthogy pedig D -nek

$$C_0 \mu^r$$

tagja a λ -tól és az η -októl mentes, azért ez csak úgy lehetséges, hogy D a λ -t egyáltalában nem tartalmazza. Tehát

$$D = C_0 \mu^r.$$

E szerint

$$f(\lambda\alpha + \mu\eta), \quad g(\lambda\alpha + \mu\eta)$$

oszthatók μ -vel és ennél fogva a $\lambda_1=1$, $\mu=0$ helyettesítés után

$$f(\alpha) = 0, \quad g(\alpha) = 0.$$

3. Az $[A]$ teljes holoid tartományból származó két

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad g(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

formának legnagyobb közös osztója akkor és csak akkor lesz az x -ek valódi formája, ha

$$R(x, y) = \text{Res} \begin{pmatrix} F_{\lambda\mu}, & G_{\lambda\mu} \\ \lambda, & \mu \end{pmatrix}$$

azonosan eltűnik.

Valóban, ha f és g legnagyobb közös osztója valamely

$$D(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

valódi forma, akkor az $F_{\lambda\mu}$ és $G_{\lambda\mu}$ binár formák oszthatók a

$$D(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_m + \mu y_m)$$

valódi formával. Ekkor tehát $R(x, y)$ azonosan eltűnik.

Ha ellenben f és g -nek nincs az x -eket tartalmazó közös osztója, akkor — mint már tudjuk — $R(x, y)$ nem tűnik el azonosan, hanem az x -eknek csak azon értékeire nézve, melyek kielégítik az

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0$$

egyenletrendszer.

4. Tegyük fel, hogy az

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

formáknak nincsen az x -eket tartalmazó közös osztójuk, vagyis hogy $R(x, y)$ nem tűnik el azonosan. Továbbá válaszszuk az $[A]$ teljes holoid tartományban az

$$u_1, u_2, \dots, u_m, \quad v_1, v_2, \dots, v_m$$

mennyiségeket úgy, hogy

$$R(u, v) \neq 0.$$

Ekkor az $[A]$ tartomány mennyiségeiből alkotott valamely

$$x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_m=a_m$$

értékrendszer akkor és csak akkor elégíti ki az $f(x)=0, g(x)=0$ egyenletrendszert, ha kielégíti az

$$R(x, \rho u + \sigma v) = 0$$

egyenletet. Ennek az egyenletnek bal oldala úgy van képezve $R(x, y)$ -ből, hogy y_1, y_2, \dots, y_m helyébe az

$$\rho u_1 + \sigma v_1, \rho u_2 + \sigma v_2, \dots, \rho u_m + \sigma v_m$$

lineáris kifejezéseket írtuk, hol ρ és σ új határozatlanok.

Az imént kimondott tétel, bár jóval többet mond mint a 2. alatti, mégis teljesen annak mintájára bizonyítható be.

Ha ugyanis $f(a)=g(a)=0$, akkor

$$f(\lambda a + \mu(\rho u + \sigma v)), \quad g(\lambda a + \mu(\rho u + \sigma v))$$

a λ és μ oly formái, melyek mindkettőn oszthatók μ -vel. Tehát e két formának

$$R(a, \rho u + \sigma v)$$

resultánsa valóban eltűnik.

Hogy viszont $R(a, \rho u + \sigma v)$ eltűnéséből mindenkor $f(a)$ és $g(a)$ eltűnése következik, az a következőkből tűnik ki. Ha $R(a, \rho u + \sigma v)=0$, akkor az

$$f(\lambda a + \mu(\rho u + \sigma v)), \quad g(\lambda a + \mu(\rho u + \sigma v))$$

formáknak van egy

$$D = C_0(\rho, \sigma)\mu^r + C_1'(\rho, \sigma)\mu^{r-1}\lambda + \dots + C_r(\rho, \sigma)\lambda^r$$

alakú közös osztójuk, hol C_0, C_1, \dots, C_r a ρ -nak és μ -nek az $[A]$ tartományból származó formái és $r \geq 1$.

Itt $C_0(\rho, \sigma)$ okvetlenül a ρ -tól és σ -tól mentes. Ellenkező esetben ugyanis a $\lambda=0, \mu=1$ helyettesítés után

$$f(\rho u + \sigma v), \quad g(\rho u + \sigma v)$$

mindketten oszthatók volnának a $C_0(\rho, \sigma)$ valódi formával; de ez lehetetlen, mert

$$R(u, v) \neq 0.$$

Továbbá $C_0 \neq 0$. Ugyanis $C_0 = 0$ esetében D osztható volna λ -val, tehát

$$f(\lambda a + \mu(\rho u + \sigma v)), \quad g(\lambda a + \mu(\rho u + \sigma v))$$

szintén oszthatók λ -val. De ez lehetetlen, mert a $\lambda = 0$, $\mu = 1$ behelyettesítés után

$$f(\rho u + \sigma u), \quad g(\rho u + \sigma u)$$

még mindig a zérustól különbözők.

Továbbá $f(\lambda a + \mu(\rho u + \sigma v))$, mint

$$\lambda, \rho, \sigma$$

formája felfogva, e határozatlanokban homogén; tehát D is ilyen. Minthogy pedig D -nek

$$C_0 \mu^r$$

tagja a λ -tól, ρ -tól és σ -tól mentes, azért ez csak úgy lehetséges, hogy D e határozatlanokat egyáltalában nem tartalmazza. Tehát

$$D = C_0 \mu^r.$$

E szerint

$$f(\lambda a + \mu(\rho u + \sigma v)), \quad g(\lambda a + \mu(\rho u + \sigma v))$$

oszthatók μ -vel. Ennélfogva a $\lambda = 1$, $\mu = 0$ behelyettesítés után

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0.$$

5. Ha $[A]$ -nak valamely $\{A\}$ zárt tartományt választunk, vagyis olyant, hogy bármely egy ismeretlenű algebrai egyenletnek, melynek együtthatói $\{A\}$ -ból valók, e tartományban van legalább egy gyöke, akkor a 2. és 4. alatti tételek így is fejezhetők ki:

Ha két algebrai felületnek nincs közös felületrésze, akkor e felületek metszésén levő pontokon kívül nincs más oly pont, mely e metszésen keresztül fektetett kúpok mindegyikén rajta van.

Sőt ha a két felület metszésén keresztül fektetett kúp csúcsával nem futjuk be az egész teret, hanem csak egy oly egyenest, melynek a két felület metszésével nincs közös pontja:

már akkor sem található a két felület közös pontjain kívül más pont, mely ezeknek a kúpoknak mindegyikén rajta van.

A térgörbék CAYLEY-féle és KRONECKER féle ábrázolása között az a különbség, hogy CAYLEY ama kúp csúcsával az egész teret, KRONECKER ellenben csak az egyik koordinátasík végtelenben levő egyenesét futja be.

6. Ha f és g dimensiói n_1 és n_2 , akkor — mint könnyen belátható — az

$$R(x, \rho u + \sigma v)$$

resultáns ρ -nak és σ -nak $N = n_1 n_2$ dimensiójú homogén formája. Legyenek e formában

$$\rho^N, \rho^{N-1}\sigma, \dots, \sigma^N$$

együtthatói rendre

$$H_0(x; u, v) H_1(x; u, v), \dots, H_N(x; u, v).$$

Ha most az x -eket, u -kat és v -ket változóknak tekintjük, melyek az $\{A\}$ zárt tartomány mennyiségeiből alkotott minden értékrendszert fölvehetnek, akkor a H -k csak kétféle értékrendszerre nézve fognak egyidejűleg mind eltűnni, t. i. bizonyos oly értékrendszerekre, melyek az

$$R(u, v) = 0$$

egyenletet elégítik ki, továbbá azokra, melyek az $f(x)=0, g(x)=0$ egyenletrendszert elégítik ki. Az utóbbiakra nézve

$$R(x, y) = 0.$$

Tehát ha

$$H_0 = 0 \dots H_N = 0,$$

akkor egyszersmind

$$R(x, y) R(u, v) = 0.$$

Ennélfogva HILBERT tétele szerint¹ mindig van egy oly r pozitív egész szám, hogy az

$$R(x, y) R(u, v)$$

formának r -dik hatványa kielégíti az

¹ Mathematische Annalen XLII. köt., pag. 320.

$$R(x, y)^r R(uv)^r \equiv 0 \pmod{H_0, H_1, \dots, H_N}$$

kongruenciát.

Ha $n_1 = n_2 = 1$, akkor egyszersmind $r = 1$; továbbá ebben az esetben igen könnyű oly

$$X_0(x, y; u, v), \quad X_1(x, y; u, v)$$

formákat meghatározni, hogy

$$R(x, y) R(u, v) = H_0 X_0 + H_1 X_1.$$

Ekkor ugyanis

$$F_{\lambda\mu} = \lambda f(x) + \mu f(y), \quad G_{\lambda\mu} = \lambda g(x) + \mu g(y),$$

tehát

$$R(x, y) = f(x)g(y) - g(x)f(y).$$

Továbbá a

$$R(x, \rho u + \sigma v) = \rho R(x, u) + \sigma R(x, v)$$

képlet értelmében

$$H_0 = R(x, u), \quad H_1 = R(x, v).$$

Ha most már az

$$R(x, y) R(u, v)$$

szorzatot az

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g(u) & g(v) \\ -f(u) & -f(v) \end{vmatrix}$$

alakban írjuk, akkor a determinánsok szorzástétele szerint

$$R(x, y) R(u, v) = \begin{vmatrix} R(x, u) & R(x, v) \\ R(y, u) & R(y, v) \end{vmatrix}$$

vagyis

$$R(x, y) R(u, v) = H_0 X_0 + H_1 X_1,$$

hol

$$X_0 = R(y, v), \quad X_1 = -R(y, u).$$

A KEMÉNYÍTŐ-EMÉSZTÉS REACTIONHÖJE.¹

FEKETE SÁNDOR-tól.

Az enzymák hatásának energetikai szempontból való vizsgálata kettős érdekléssel bír a physiologiában. Egyrészt ugyanis az enzyma-hatás tökéletesebb megismerésére vezetnek az ily irányú kutatások, másrészt meg kiválóan fontos az egész szervezet oekonomiájának ismeretére annak a kérdésnek az eldöntése, hogy azon mélyreható chemiai változások, a melyeket a tápanyagok emésztés közben elszenvednek, chemiai energiájuk átalakulásával járnak-e, más szóval, az emésztés maga kerül-e a szervezetnek valami energia-vesztésbe, vagy sem. A kérdés érdekessége már régen felhívta a bűvárok figyelmét ezen tárgyra, de a methodika tökéletlensége miatt a régebbi kutatások nem járhattak eredménnyel. Maly foglalkozott ezen kérdéssel behatóbban (Richard Maly: Über die Wärmetönung bei der künstlichen Verdauung. 1880. Pflügers Archiv für Physiologie 22. k., 118. l.). Miután jelen dolgozatom tárgyát illetőleg sem az újabb, sem a régebbi irodalomban egyéb adatot nem találtam, Maly ezen közleményének megfelelő részével akarok kissé bővebben foglalkozni, mielőtt saját vizsgálataim leírásába belefognék.

Maly hengerüvegbe 3% keményítő-oldatot adott, s igyekezett ezt a környezettől thermikailag elszigetelni; az edénybe hőmérőt tett, s az enzymatartalmú oldatot vékonyfalú üveg-edényben a keményítő-oldatba sülyesztette, úgy hogy az üveg-edényke eltörésekor a nyál a keményítővel érintkezésbe jutott. Kísérletei I. sorozatában megfigyelte az így összeállított készü-

¹ A budapesti kir. m. tud. egyetem élet- és körvegytani intézetében készült dolgozat.

lék hőmérsékének változását először egy bizonyos hőmérsékre felmelegítve, azután ugyanarra a hőmérsékre állította be, eltörte az enzymboldatot tartalmazó golyócskát, s így észlelte a hőmérsék változását. A két hőmérsékváltozás közti különbséget az emésztés hatásának tulajdonította. 28 gm. fibrin emésztésekor 2.4°C -nyi lehűlést állapított meg. II. kísérleti sorozatában a készüléket fölmelegítve hőegyensúlyba hozta, s miután ez bizonyos ideig tartott, szétörte az enzymboldatot tartalmazó üvegcsét, s a hőmérsék változását kísérte figyelemmel. 300 cm^3 2% keményítőoldat alkalmazásakor 1.1°C lehűlést kapott, 400 cm^3 3% keményítőnél 1°C , 300 cm^3 3% keményítőnél 1.35°C -nyi lehűlést állapított meg. Kísérleteiből azt következteti, hogy a keményítőnek cukrosító fermentum által testhőmérsékleten történő emésztésekor oly jelentékeny melegelhasználás következik be, hogy ezt egy szerű kalorimetrikus úton is kétségtelenül meg lehet állapítani. Megjegyzi dolgozatában azt is, hogy miután a keményítőemésztéskor cukor és dextrinek képződnek, a melyek feloldásakor meleg használtatik el, az észlelt hőmérsékcsökkenést jórészen ezen oldásnak kell tulajdonítani. Sőt az emésztés reakcióhőjére való következtetésnél azt sem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy az észlelt hőmérsékcsökkenés csak az oldódással járó hőmegkötés és az emésztéssel, illetve a víz megkötésével járó hőfelszabadulás közti különbségnek az eredménye lehet. MELY dolgozatának eredményeire, valamint a szem előtt tartandó lehetőségekre dolgozatom további folyamán még visszatérek.

HERZOG R. O. «Fermentreaction und Wärmetönung» (Zeitschrift für physiologische Chemie 37. k. 5—6 füz. 383. o.) cz. dolgozatában elméleti számításokat közöl, a melyek alapján a reakcióhőt megállapítani igyekszik. Az emésztésnek alávetett anyag egész melegét összehasonlítja a belőle keletkező emésztési termékek égésmelegének összegével; a különbség mutatja a reakcióhőt. Ily módon megállapít ugyan a különböző emésztési folyamatoknál különböző irányú energia-átalakulást, de ezt minden esetben oly csekélynek találja, hogy kísérleti beigazolására vagy megállapítására alig lehet gondolni jelen módszereink hibáival.

LENGYEL LORÁND: «Adat a pepsinemésztés thermodynamikájához» (Math. és Természettud. ért. 23. k. 2. f. 255. o.), továbbá HÁRI PÁL: «Vizsgálatok a trypsin - emésztés reactionhőjéről» (M. Orv. Arch. VII. k. 1. f. 11. o.) cz. dolgozataikban foglalkoznak még hasonló kérdéssel. Mindketten megállapították thermochemiai úton valamely emésztési keverék összes égési melegét az emésztés előtt, azután az emésztés különböző stádiumaiban; a különbség mutatja a chemiai energia azon mennyiségét, a mely emésztés közben hővé alakult át. Ezen alapon LENGYEL LORÁND arra a következtetésre jut, hogy a pepsinemésztés reactionhője, ha egyáltalában van, rendkívül csekély. Hasonló eredményt kapott HÁRI PÁL is a trypsinemésztésre vonatkozólag: hogy t. i. ezen folyamat nem jár a chemiai energiának kimutatható mértékben más energiává való átalakulásával.

Ugyanezen alapgondolatból kiindulva végeztem vizsgálataimat a keményítőemésztést illetőleg. Igyekeztem megállapítani, hogy a keményítő emésztésekor alakul-e át chemiai energia más energiafajtavá,⁷ vagyis jár-e a keményítő emésztése chemiai energia felhasználásával. Vizsgálati eljárásom is teljesen ugyanaz volt, mint LENGYEL-é és HÁRI-é. Keveréket készítettem keményítőtől és diastatikus enzimát tartalmazó anyagból. Meghatároztam ezen keverék szárazanyag tartalmát, égésmelegét, s redukáló képességét. A keverékből pontosan lemért 4—6 gm súlyú adagokat 100 cm³ destillált vízzel Erlenmeyer lombikokban 40 C°-ú thermostatban emésztésnek vettem alá, pár cm³-nyi toluollal gondoskodva a rothadás meggátlásáról. Időnkint felrázva az edények tartalmát, meghatározott idő eltével 2—2 edényt kivettem, s lemért súlyú porcelláncsészékbe gondosan átmostam az edény tartalmát, 95 C°-ú vízfürdön bepároltam, s légszárasszá téve lemértem az anyag súlyát a porcelláncsészével együtt. Az anyagot azután kikapartam, s meghatároztam a szárazanyag tartalmát, égésmelegét s czukortartalmát. Minden sorozatnak megfelelően 2—2 részletnél az enzimát felfőzéssel hatástalanná tettem s így adtam a megfelelő részlet keményítőhöz. A célja az volt ezen eljárásnak, hogy megállapíthassam, nem okoznak-e az emésztéssel járó egyéb folyamatok (duzzadás, oldás)

vagy maga a calorimetriás mérésekre való előkészítés (bepárlás) valami változást az anyag energia- és szárazanyag tartalmában. Az így nyert adatokat összehasonlítva az emésztésutániakkal, az esetleges változást csak az emésztésnek tulajdoníthattam.

A szárazanyag meghatározásához a szárítást porcelláncsészékben végeztem a PREGL-féle vacuumszárítóban 95—100 C° hőmérsékleten.

Az égési meleget a BERTHELOT-MAHLER-féle calorimetriás bombával határoztam meg.

A cukormeghatározást az ALLIHN-féle súlyanalytikai eljárás szerint végeztem Pflüger módosításában.

Ezen kísérleti berendezéssel elkerültem az emésztési termékek oldódásával járó s az összenergia mennyiségét befolyásoló változásokat, a melyek MALY következtetéseinél annyira jelentőségteljesnek bizonyultak. Ugyanis a cukor s a többi termékek feloldásával járó kémiai valamint osmoticus energia-változást a bepárláskor az ellenkező irányú folyamat ellensúlyozza, úgy hogy az emésztéssel járó ezen mellékkörülmény vizsgálataim eredményére befolyással nincs. Nem kellett a kémiai energiának esetleg illó anyagok eltávozásával beálló változására sem gondolnom, a mely körülmény a fehérje trypsin-emésztésénél oly nagy szerepet játszott (Hári), miután ismereteink mai állása szerint a keményítő diastaticus fermentumokkal való emésztésekor illó anyagok nem képződnek.

Összesen 4 kísérleti sorozatom van.

Az I. sorozatban Merck-féle keményítőt és Merck-féle ptyalint (poralakban) kevertem össze, úgy hogy a keverék minden részletében lehetőleg egyenletesen legyen a két anyag elosztva. 63.0295 gm keményítőhöz 1.4619 gm ptyalint adtam. Ezen keverék destillált víz hozzáadására thermostatban pár perczig állva már határozott redukáló képességet mutatott, a mi az emésztés beállítását jelezte, holott önmagában sem a keményítő, sem a ptyalin-készítmény vizes oldata semminemű redukáló képességet nem mutatott a thermostatban való huzamosabb állás után sem. Az emésztést (100 cm³ dest. vízben) az egyes részletekben 7, 12, 32, 74 napig folytattam, s a megfelelő idő elteltével 2—2 edényt levéve, azok tartalmát porcelláncsészébe

átmostam, s 60—70 C°-ú vízfürdön bepároltam. Ezen sorozat számbeli eredményeit az I. táblázatban foglaltam össze.

I. táblázat.

Keményítő(por) és ptyalin(por) keveréke 63·0295 : 1·4619 arányban; a keverék víztartalma 12·44 %, égésmelege 3675·7 cal., specifikus égésmelege 4193 cal. Az összehasonlítás alapjául az eredeti (be nem párolt) keverék szolgált.

Emésztés előtt				Emésztés után										
Sorszám	emésztés ideje			anyag sulya	viz-tartalom	száraz anyag sulya és változása	specifícus energietart. és változ.	összes energia cal. és változás	czu-kor-tartalom					
	anyag sulya	száraz anyag	összes energia											
1	nap	7·4	08913	5805	15030	3·9030	8·71	3·563	—0·5	4247·3	+1·2	15131	+0·7	0·133
2		7·4	11173	603	15114	4·0140	10·28	3·614	+0·3	4279·8	+2·0	15229	+0·6	0·142
3		12·4	04743	5439	14877	3·7993	7·21	3·525	—0·5	4208·8	+0·3	14838	—0·3	0·246
4		12·3	96343	4703	14568	3·7923	8·18	3·483	+0·3	4196·7	+0·1	14617	+0·3	0·238
5		32·4	08653	5782	15020	3·7949	6·04	3·566	—0·3	4218·9	+0·6	15006	—0·0	0·256
6		32·4	42683	8762	16272	4·1518	7·03	3·861	—0·3	4224·4	+0·8	16306	+0·2	0·195
7		74·4	87444	42679	17916	4·5640	6·75	4·256	—0·3	4206·2	+0·2	17902	0·0	0·187
8		74·4	16183	6441	15297	3·8894	6·16	3·650	+0·2	4181·6	—0·3	15262	0·2	0·189

A II. sorozatban szintén Merck-féle keményítőt és ptyalint alkalmaztam, de más alakban. 4—6 gm súlyú keményítő-részleteket mértem le Erlenmeyer-edényekbe, egyidejűleg szárazanyag- és égésmelegmeghatározást végezve. Minden részlethez 200 cm³ vizet adtam s 2 óráig vízfürdön főztem. Lehülés után ismeretes szárazanyag tartalmú, szűrt ptyalin-oldatot adtam az edényekbe a keményítő mennyiségéhez pontos arányban. (A ptyalin-oldatot úgy készítettem, hogy a száraz készítményhez vizet adtam, két óráig thermostatba helyeztem, s azután üvegyapoton át megsűrtem. Az oldat egészen tiszta, kissé sárgás színű volt, kitűnően emésztett; bepárologatással meghatároztam szárazanyagtartalmát és égésmelegét.) A főzés hatásának megállapítására két dosishoz felforralt ptyalinoldatot adtam, melyekben az emésztés nem indult meg. Az emésztést

az egyes részletekben 5, 19, 50 napig folytattam, mely idő elteltével minden egyes részletet úgy dolgoztam fel, a mint azt az I. sorozatnál leírtam. Ezen sorozat eredményeit a II. táblázatban foglaltam össze.

II. táblázat.

Duzzasztott keményítő ptyalin-oldattal emésztve.

Duzzasztás előtt				Duzzasztás után									
szám	anyag	száraz	összes	anyag	viz-	száraz	specifícus		összes	czu-			
idő	sulya	anyag	ener-	sulya	tar-	anyag	égésm. és		energia	kor-			
			gia		ta-	sulya és	változása		és	tarta-			
					lom	változása			változása	lom			
9	5·3739	4·9111	20539	5·2799	%	7·814	8675	—1	4218 0	+0·8	20520	—0·1	—
10	4·2047	3·8430	16103	4·1555	8·13	3·7810	—1·6	4208 6	+0·4	15913	—1·1	—	
nap	Emésztés előtt			Emésztés után									
11	53·6373	3·2814	14008	3·5617	4·963	3·3850	+3	4110	—2·4	13916	—0·6	0·611	
12	54·0165	3·6233	15467	3·9170	4·583	7376	+2·9	4112	—2·4	15369	—0·6	0·620	
13	195·7424	5·1861	22138	5·5435	4·505	5·293	+2·0	4131	—2·0	21870	—1·2	0·437	
14	197·0800	6·3865	27263	6·8863	5·016	5·414	+2·1	4108	—2·5	26878	—1·4	0·638	
15	503·5559	3·2075	13692	3·4499	4·283	3022	+3·0	4089	—2·9	13505	—1·2	0·917	
16	505·2676	4·7531	20285	5·2074	5·904	9001	+3	4110·5	—2·4	20142	—0·7	0·853	

A III. sorozatban oldott keményítőt alkalmaztam, a melyet üveggyapoton átszűrt nyállal emésztettem. Forró vízhez folytonos keverés közben hideg vízben szétoszlaltott keményítőt öntöttem s 2 órai főzés után az így készült fehér, még higan folyó oldatot üveggyapoton átszűrtem. Az oldatból 200 cm³-t pipettával gondosan lemérve Erlenmeyer-edénybe bocsátottam s hozzáadtam 10 cm³ megszűrt nyálat s kevés toluolt. Bedugaszolva thermostatba helyeztem az edényeket. Az egyes részletek anyag- és energiatartalmának megállapítására két részlethez felfőzött nyálat adtam s mindjárt bepároltam. A többi részlet emésztése 1, 8, 15 napig tartott. Miután az oldat nem volt elég concentrált, s nagyobb mennyiséget technikai okokból nem alkalmazhattam, az emésztés bevégeztével 2—2 edény tartal-



mát együttesen pároltam be s dolgoztam. Az emésztett részletek feldolgozása a fenti sorozaténak megfelelő volt.

III. táblázat.

Oldott keményítő (400 cm.³) és nyál 30 cm.³ keveréke. Emésztés előtt minden részletben az anyag sulya 6·4586 gm., viztartalom 12·75%, száraz anyagtartalom 5·6352, égésmeleg 3660·2 cal., specificus energia 4195 cal., összes energia 23640. A tábla az emésztés utáni állapotokat mutatja.

Szám	Emésztés ideje	Anyag sulya	Viztartalom	Száraz anyag sulya és változása		Égés meleg	Specificus energiatart. és változása		Összes energia és változása		Czúrkortartalom
			%		%			%		%	
17	1 nap	6·1893	5·19	5·8680	+4·1	3817·2	4026·2	—4·1	23626	—0·0	0·823
18	8 "	6·1398	4·98	5·8342	+3·6	3809·2	4008·7	—4·5	23393	—1·0	0·860
19	14 "	6·3644	7·72	5·8736	+4·3	3689·9	3998·6	—4·7	23484	—0·6	0·863

Az enzymből teljes elhagyásával is végeztem egy kísérleti sorozatot, hogy magának a keményítőnek a viselkedését ismerjem meg a kísérleti behatások alatt. Itt a porított keményítőhöz egyszerűen forró vizet adtam, s jól összekeverve bepároltam; más részleteknél a keményítőt 3 óráig vízfürdőn főztem, s azután pároltam be. A bepárlás előtt és a bepárlás után épen úgy meghatároztam az egyes részletek szárazanyagtartalmát s égésmelegét, mint a hogy az előző, emésztési kísérleteknél leírtam. Nem tartottam szükségesnek az alkalmazott enzymből anyagot hasonlóképen megvizsgálni, mert a kísérleteimben felhasznált csekély mennyiség miatt még az esetleges változás is úgyszólván érintetlenül hagyta volna az egyes részletek összes szárazanyagtartalmát s égésmelegét. Ezen sorozattal kapcsolatosan végeztem az I. sorozat pótlását is, a mennyiben megfelelő keményítő-ptyalin keveréket készítettem (14·1749 gm keményítő és 0·4367 gm ptyalin), s forró vizet adva hozzá, bepároltam; itt az emésztés nem indult meg. Ezen sorozat eredményeit a IV. tábla mutatja.

IV. táblázat.

20—21. sz. keményítő és ptyalin keveréke (14·1799:0·4366) forró vízzel leöntve és bepárolva (az 1. sor pótlása). 22—25. Tiszta keményítő vízzel bepárolva, illetőleg 3 óráig főzve (24,25).

Bepárlás előtt				Bepárlás után					
sorszám	eljárás	lég-száraz anyag súlya	száraz anyag	összes energia	lég-száraz anyag súlya	viz-tartalom	száraz anyag súlya és változása	specifikus energia-tartalom és változ.	összes energia és változása
						%	%	%	%
20		3·7147	3·2730	13804	3·6557	10·47	3·2730	0·0	4249·5
21	he-	3·8313	3·3758	14237	3·7471	9·82	3·3790	+0·1	4250·6
22	párlás	4·0625	3·5612	14982	3·9665	10·47	3·5512	—0·3	4202
23	főzés	4·3361	3·8010	15991	4·3013	11·62	3·8015	0·0	4215
24	"	4·6344	4·0625	17091	4·6015	11·56	4·0696	0·2	4194·2

Az emésztési kísérletek eredményeinek könnyebb összehasonlíthatása végett az észlelt változásokat %-ra is átszámítottam, a mint azt a V. táblázat mutatja.

V. táblázat.

Kísérleti eredmények %-ban.

Kísérleti szám	Száraz-anyag vált.	Spec. energia tartalom vált.	Összes energia vált.	Cukor-tartalom ¹
1	—0·5	+1·2	+0·7	0·133
2	+0·3	+2·0	+0·6	0·142
7	—0·3	+0·2	0·0	0·187
8	+0·2	—0·3	—0·2	0·189
6	—0·3	+0·8	+0·2	0·195
4	+0·3	+0·1	+0·3	0·238
3	—0·5	+0·3	—0·3	0·246
5	—0·3	+0·6	0·0	0·256
13	+2·0	—2·0	—1·2	0·437
11	+3·0	—2·4	—0·6	0·611
12	+2·9	—2·4	—0·6	0·620
14	+2·1	—2·5	—1·4	0·638
15	+3·0	—2·9	—1·2	0·917
17	+4·1	—4·1	0·0	0·823
16	+3·0	—2·4	—0·7	0·853
18	+4·3	—4·7	—0·6	0·860
19	+4·3	—4·7	—0·6	0·863

¹ 1 gm száraz anyag cukortartalma az emésztés befejeztével.

A táblázatoknak kétségtelenül azok a legfontosabb sorai, a melyek a szárazanyag, a specifikus energiatartalom s az összes energia változásáról számolnak be.

Az I. sorozatban az emésztés, a mint azt a czukrosodás mértékéből láthatjuk, a 12. napig haladt előre, azután megállapodott. A bepárlás alatt (20. és 21. sz.) az energia nagyon kevéssel (+ 0·7 és 0·9%) gyarapodott és a szárazanyag állandó volta mellett (0·0%, + 0·1%) a specifikus energiatartalom (1 gr. égési melege) is növekedett (0·7, 0·8%). Az emésztés előrehaladtával, a midőn az anyag 13–14%-a már elczukrosodott (1. 2. sz.), az összes energia az eredeti állapothoz viszonyítva nőtt ugyan (0·7, 0·6%), de a bepárlás utáni állapothoz hasonlítva alig mutat valami változást. A specifikus energiatartalom a szárazanyag fogyása miatt növekedett (1·2, 2%). A későbbi stádiumokban (3–8. sz.), a mikor az anyag 18–28%-a elczukrosodott, az összes energia alig mutat eltérést az eredeti állapottól, míg a bepárlás utánihoz viszonyítva csökkenést láthatunk. A szárazanyag mennyisége jelentékenyebb változást, a melyet kísérleti hibának ne lehetne tulajdonítani, sehol sem mutat. A specifikus energiatartalomban sem látunk szembe-tűnőbb változást. A sorozat tehát azt mutatja, hogy az energia összes mennyisége a bepárlás alatt nő valami nagyon keveset, az emésztés alatt viszont csökken, de a változások a kísérleti hibák határán alig terjednek túl.

A II. sorozatban a főzés és bepárlás hatása abban nyilvánult, hogy a szárazanyag kevéssé csökkent (1, 1·6%), a specif. energia nőtt (0·8, 0·4%), az összes energia pedig körülbelül a szárazanyagnak megfelelően fogyott (0·1, 1·1%). Az emésztést véve szemügyre, látjuk, hogy az 50. napig az anyag 91%-a elczukrosodott. Az emésztés alatt a szárazanyag jelentékenyen gyarapodott (2, 3%), az összenergia csekély fogyást mutat (0·6%, 1·4%), a specifikus energiatartalom szintén kifejezetten csökken (2, 2·9%).

A III. sorozatban, a hol oldott keményítőt nyállal emésztettem, leggyorsabban haladt előre az emésztés, s a változások is legkifejezettebbek. Egy nap alatt a szárazanyag 82%-a czukrosodott el, ezután már alig haladt az emésztés. Feltűnő a szárazanyag erős gyarapodása (3·6, 4·3%), a melyet itt is

kizárólag csak az emésztésnek tulajdoníthatók, a mennyiben az emésztés után nyert adatokat az oldás és bepárlás utániakra vonatkoztattam. Az összes energia csekély fogyást mutat, a specif. energia ezeknek megfelelően erősen csökken (4·1, 4·7 %).

Külön sorozatban vizsgáltam meg a tiszta keményítő viselkedését az eljárás alatt (22—24. sz.), de sem a szárazanyag, sem az energia nem mutatott kifejezett változást.

Ha most a különböző sorozatokat hasonlítjuk össze, a következő eredményekre jutunk. A szárazanyag változása az I. sorozatban még oly határozatlan, hogy biztos következtetésre nem adhat alapot. A II. sorozatban, a melyet az I. sorozat folytatásának tekinthetünk, határozott szárazanyaggyarapodás észlelhető; még kifejezettebb ez a III. sorozatban. Itt a szárazanyag gyarapodása megfelel a számítások után várható gyarapodásnak, mert az elcukrosodás a hydrolysis útján, azaz víznek intramolekulás felvételével történik.

Az összes energiatartalom mind a három sorozatban a legtöbb esetben kis csökkenést mutat, de ez oly minimalis, hogy a legtöbb esetben nem haladja túl a mérsékelt kísérleti hibák határát.

A szárazanyag specifikus energiatartalma a hydrolysis vizfelvétel folytán, mely a szárazanyag erősebb gyarapodását eredményezte, megfelelően csökken.

Vizsgálataim eredményét röviden az alábbiakban összegezhetem tehát:

1. A keményítőnek ptyalin vagy nyál által létrehozott emésztésekor chemiai energia nem alakul át kimutatható mértékben más energiává; a folyamat reakcióhője eszerint zérus, vagy oly csekély, hogy a kísérleti hibák határán belül esik.

2. Az elcukrosítás után a szárazanyag specifikus energiatartalma kisebb, mint a keményítőé.

3. Az emésztés alatt a szárazanyag mennyisége a hydrolysisnek megfelelően növekedik.

Dolgozatom Tangl Ferencz tanár kezdeményezésére és vezetésével készült.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906. november 19.-én tartott üléséből.)

A SYLVESTER-FÉLE RESULTANS ANALOGONJA A LINEÁR DIFFERENCIÁLEGYENLETEK ELMÉLETÉBEN.

RADOS GUSZTAV I. tagtól.

A SYLVESTER-féle resultans annak a kérdésnek eldöntésére szolgáló alakzat, hogy két megadott algebrai egyenletnek vannak-e közös gyökei és hogy mekkora ezeknek a száma. Két adott lineár differenciálegyenlet esetében az analog kérdés az egymástól lineárisan független közös partikuláris megoldások létezésére és ezek számának meghatározására vonatkozik. *Alakítható-e itt is a resultanssal hasonló alakzat, a melynek segítségével a közös megoldások kérdése ugyanazzal a teljességgel megoldható, mint az analog algebrai kérdés a SYLVESTER-féle resultánszal?*

Ez a kérdéstétel nem új; a régibb és újabb matematikai irodalomban is találkozunk e kérdés megoldására irányuló kísérleteknek egész sorozatával; ha mégis újból felveszem e kérdés fonalát, azért teszem, mert e kísérletek eddig nem vezettek azokra a végleges és legegyszerűbb alakban kifejezhető eredményekre, a melyek itt elérhetők. Miként a jelen dolgozatban ki fogom mutatni, két lineár differenciálegyenlet k lineárisan független közös partikuláris megoldása létezésének szükséges és elegendő feltételei a partikuláris megoldásokból alakított invariáns függvényalakoknak, az algebraiban szereplő szimmetrikus függvények ez analogonjainak felhasználása nélkül, felette egyszerű explicit alakban állíthatók elő.

Legyen a két lineár differenciálegyenlet

$$\begin{aligned} F(y) &\equiv f_0 y^{(m)} + f_1 y^{(m-1)} + \dots + f_m y = 0, \\ G(y) &\equiv g_0 y^{(n)} + g_1 y^{(n-1)} + \dots + g_n y = 0, \end{aligned}$$

a melyekben az f_i és g_j együttthatók az x független változónak megadott függvényei, y az ismeretlen függvényt, $y^{(k)}$ pedig ennek k -adrendű differenciálhányadosát jelenti.

Az $F(y)$ m -edrendű és $G(y)$ n -edrendű differenciálkifejezések k -adrendű differenciálhányadosa a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} \frac{d^k F(y)}{dx^k} &\equiv F^{(k)}(y) \equiv f_0^{(k)} y^{(m+k)} + f_1^{(k)} y^{(m+k-1)} + \dots + f_{m+k}^{(k)} y, \\ -\frac{d^k G}{dx^k} &\equiv G^{(k)}(y) \equiv g_0^{(k)} y^{(n+k)} + g_1^{(k)} y^{(n+k-1)} + \dots + g_{n+k}^{(k)} y, \end{aligned}$$

a hol $f_i^{(k)}$ és $g_j^{(k)}$ a következő kifejezések rövid jelölései

$$\begin{aligned} f_i^{(k)} &= \sum_{p=0}^i \binom{k}{p} \frac{d^p f_{i-p}}{dx^p}, \\ g_j^{(k)} &= \sum_{q=0}^j \binom{k}{q} \frac{d^q g_{j-q}}{dx^q}, \end{aligned}$$

$(i=0, 1, \dots, m+k)$
 $(j=0, 1, \dots, n+k)$

ha az egyszerűség kedvéért megállapodunk abban, hogy az

$$\begin{aligned} f_{m+1}, f_{m+2}, \dots \\ g_{n+1}, g_{n+2}, \dots \end{aligned}$$

mennyiségek, valamint ezeknek x szerint képezett differenciálhányadosai helyébe képleteinkben mindenütt zérust teszünk.

E jelöléseken kívül még a következőket fogjuk használni: az

$$R = \left. \begin{array}{cccccc} f_0^{(n-1)} & f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_{m+n-2}^{(n-1)} & f_{m+n-1}^{(n-1)} \\ 0 & f_0^{(n-2)} & f_1^{(n-2)} & \dots & f_{m+n-3}^{(n-2)} & f_{m+n-2}^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_0 & \dots & f_{m-1} & f_n \end{array} \right\} n \text{ sor}$$

$$\left. \begin{array}{cccccc} g_0^{(m-1)} & g_1^{(m-1)} & g_2^{(m-1)} & \dots & g_{m+n-2}^{(m-1)} & g_{m+n-1}^{(m-1)} \\ 0 & g_0^{(m-2)} & g_1^{(m-2)} & \dots & g_{m+n-3}^{(m-2)} & g_{m+n-2}^{(m-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_0 & \dots & g_{n-1} & g_n \end{array} \right\} m \text{ sor}$$

$(m+n)$ -edfokú determinánst a két lineár differenciálkifejezés *resultánsának*, az első n sort röviden f -soroknak, az utolsó m sort pedig g -soroknak fogjuk nevezni.

Jelöljük továbbá azt az $(m+n-2k)$ -adfokú determinánst, mely R_k -ből akként keletkezik, hogy ennek első k f -sorát és első k g -sorát, továbbá az első és utolsó k oszlopát elhagyjuk, R_k -val, úgy hogy

$$R_k = \left(\begin{array}{cccccc} f_0^{(n-k-1)} & f_1^{(n-k-1)} & \dots & \dots & \dots & f_{m+n-2k-1}^{(n-k-1)} \\ 0 & f_0^{(n-k-2)} & \dots & \dots & \dots & f_{m+n-2k-2}^{(n-k-2)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_0 & \dots & f_{m-k} \\ g_0^{(m-k-1)} & g_1^{(m-k-1)} & \dots & \dots & \dots & g_{m+n-2k-1}^{(m-k-1)} \\ 0 & g_0^{(m-k-2)} & \dots & \dots & \dots & g_{m+n-2k-2}^{(m-k-2)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_0 & \dots & g_{n-k} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-k \text{ sor} \\ \\ \\ \\ m-k \text{ sor} \end{array},$$

akkor a jelen dolgozatban kifejtendő főtétele így fogalmazható:

Arra, hogy az

$$F(y) = 0$$

$$G(y) = 0$$

lineár differenciálegyenleteknek pontosan k egymástól lineárisan független közös megoldása legyen, szükséges és elegendő, hogy

$$R=0, R_1=0, \dots, R_{k-1}=0, R_k \neq 0$$

legyen. (k természetesen az m, n számok kisebbikét nem múlhatja felül.)

I.

Egy közös integrál létezésének feltétele.

Az *egy* közös partikuláris megoldás létezésének feltételét G. v. ESCHERICH fejtette ki legelőször.¹ Tekintettel azonban ESCHERICH tárgyalásának a szükségesnél hosszadalmasabb voltára és dolgozatom további részeire, a teljesség kedvéért e

¹ Denkschriften der kaiserlichen Akademie, XXVI. köt. 61. l.

megoldása is van, melyben nem minden ismeretlennek értéke zérus. Az ilyen (M) megoldásban úgy a λ -val, valamint a μ -vel jelölt ismeretlenek értékei között is okvetlenül a zérustól különbözők is vannak, a mint ez a II) egyenlet specziális szerkezetéből, valamint abból a körülményből következik, hogy az

$$\begin{aligned} f_0^{(n-1)} &= f_0^{(n-2)} = \dots = f_0^{(1)} = f_0 \\ g_0^{(m-1)} &= g_0^{(m-2)} = \dots = g_0^{(1)} = g_0 \end{aligned}$$

együtthatók a zérustól különbözők.

Ha most már az I) alatti rendszer egyenleteit rendre a (M) -ben előforduló

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}$$

értékekkel szorozzuk és ezután összeadjuk, a II) alatti homogén lineár egyenletrendszerre való tekintettel, a következő identitás adódik:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \frac{d^{n-1}F(y)}{dx^{n-1}} + \lambda_1 \frac{d^{n-2}F(y)}{dx^{n-2}} + \dots + \lambda_{n-1} F(y) + \mu_0 \frac{d^{m-1}G(y)}{dx^{m-1}} + \\ + \mu_1 \frac{d^{m-2}G(y)}{dx^{m-2}} + \dots + \mu_{m-1} G(y) \equiv 0. \end{aligned}$$

Hozzuk be a

$$\begin{aligned} A(z) &\equiv \lambda_0 \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \lambda_1 \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \dots + \lambda_{n-1} z, \\ M(z) &\equiv \mu_0 \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \mu_1 \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \dots + \mu_{m-1} z \end{aligned}$$

differenciálkifejezéseket, melyek közül az első legfeljebb $(n-1)$ -edrendű, a második pedig legfeljebb $(m-1)$ -edrendű, de egyikük sem azonosan zérus, akkor az imént talált identitás a következő egyszerű alakban írható:

$$A(F(y)) + M(G(y)) \equiv 0. \quad \text{III)}$$

Ha most már

$$y_1, y_2, \dots, y_m$$

az

$$F(y) = 0$$

lineár differenciálegyenlet partikuláris megoldásainak egyik

alaprendszerre, akkor a III) alatti identitásból következik, hogy

$$M(G(y_1)) = 0, \quad M(G(y_2)) = 0, \dots, \quad M(G(y_m)) = 0,$$

azaz, hogy

$$G(y_1), \quad G(y_2), \dots, \quad G(y_m)$$

a legfeljebb $(m-1)$ -edrendű

$$M(z) = 0$$

lineár differenciálegyenletnek megoldásai, a melyek mivel számuk az egyenlet rendszámát felülmulja, egymástól lineárisan függetlenek nem lehetnek. Létezik tehát olyan n szám

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m,$$

a melyekre nézve

$$\gamma_1 G(y_1) + \gamma_2 G(y_2) + \dots + \gamma_m G(y_m) \equiv 0;$$

de ez a reláció a $G(y)$ homogénéitásánál fogva így is írható

$$G(\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \dots + \gamma_m y_m) \equiv 0;$$

ez az identitás pedig világosan mutatja, hogy

$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \dots + \gamma_m y_m$$

az $F=0$ és $G=0$ lineár differenciálegyenletnek közös megoldása.

Ezzel teljes szigorúsággal be van bizonyítva, hogy az $H=0$ feltétel közös partikuláris megoldás létezésének *szükséges és elegendő* feltétele.

II.

k lineárisan független közös partikuláris megoldás létezésének szükséges és elegendő feltételei.

Tegyük fel, hogy

$$F(y) = 0, \quad G(y) = 0$$

lineár differenciálegyenleteknek pontosan k lineárisan független közös megoldásuk van:

$$y_1, y_2, \dots, y_k,$$

és tegyenek ezek eleget a

$$C(y) \equiv c_0 y^{(k)} + c_1 y^{(k-1)} + \dots + c_k y = 0$$

egyenletnek, melyben c_0 mindig egyenlővel vehető. Mivel az utóbbi differenciálegyenletnek összes megoldásai kielégítik az $F(y) = 0$ és $G(y) = 0$ egyenleteket, FROBENIUSNAK ismeretes tétele alapján ¹ F és G ekként írható:

$$F(y) \equiv A(C(y)),$$

$$G(y) \equiv B(C(y)),$$

a hol

$$A(z) \equiv a_0(x) \frac{d^{m-k} z}{dx^{m-k}} + a_1(x) \frac{d^{m-k-1} z}{dx^{m-k-1}} + \dots + a_{m-k}(x) z$$

$$B(z) \equiv b_0(x) \frac{d^{n-k} z}{dx^{n-k}} + b_1(x) \frac{d^{n-k-1} z}{dx^{n-k-1}} + \dots + b_{n-k}(x) z$$

$(m-k)$ -ad, illetve $(n-k)$ -adrendű lineár differenciálkifejezések.

Mindenekelőtt kimutathatjuk, hogy a történt feltevések mellett az

$$\begin{aligned} A(z) &= 0 \\ B(z) &= 0 \end{aligned} \quad \text{IV)}$$

lineár differenciálegyenleteknek közös partikuláris megoldásuk nem lehet. Ha ugyanis $z = \zeta(x)$ lenne ilyen a zérustól különböző közös partikuláris megoldásuk, akkor a

$$C(y) = \zeta(x)$$

nem homogén lineár differenciálegyenletnek bármelyik $y = \eta(x)$ megoldása egyszersmind az $F(y) = 0$ és $G(y) = 0$ egyenleteknek közös megoldása lenne, mert

$$F(\eta(x)) \equiv A(C(\eta(x))) \equiv A(\zeta(x)) \equiv 0,$$

$$G(\eta(x)) \equiv B(C(\eta(x))) \equiv B(\zeta(x)) \equiv 0;$$

más oldalról könnyen belátható, hogy $\eta(x)$ a

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$$

¹ L. FROBENIUS: «Über die Irreducibilität linearer Differentialgleichungen» című értekezését a Journal für die reine und angewandte Mathematik LXXVI. köt. 257. l.

megoldásoktól lineárisan független, mert az ellenkező esetben $\eta(x)$ az

$$\eta(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k$$

alakban lenne előállítható, de ekkor

$$C(\eta(x)) = C\left(\sum_{i=1}^k c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^k c_i C(y_i) = 0$$

lenne, holott $C(\eta(x)) = \zeta(x)$ és $\zeta(x)$ nem zérus. Tehát az a feltevés, hogy a IV) alatti lineár differenciálegyenleteknek van közös megoldásuk, ellentmondásra vezet, ugyanis azt találtuk, hogy

$$\eta(x), y_1, y_2, \dots, y_k$$

az $F(y)=0$ és $G(y)=0$ egyenleteknek $k+1$ lineárisan független közös megoldása, pedig felvételünk értelmében a lineárisan független közös megoldásuk száma pontosan k .

Mivel tehát a IV) alatti egyenleteknek nincsen közös partikuláris megoldásuk, az 1. cikkben kifejtettek értelmében kimondhatjuk, hogy az $A(z)$ és $B(z)$ lineár differenciálkifejezések resultansa a zérustól különböző, azaz hogy

$$R_k = \begin{vmatrix} a_0^{(n-k-1)} & a_1^{(n-k-1)} & \dots & a_{m+n-2k-1}^{(n-k-1)} \\ 0 & a_0^{(n-k-2)} & \dots & a_{m+n-2k-2}^{(n-k-2)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{m-k} \\ b_0^{(m-k-1)} & b_1^{(m-k-1)} & \dots & b_{m+n-2k-1}^{(m-k-1)} \\ 0 & b_0^{(m-k-2)} & \dots & b_{m+n-2k-2}^{(m-k-2)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-k} \end{vmatrix} \neq 0,$$

a hol

$$a_i^{(g)} = \sum_{p=0}^g \binom{g}{p} \frac{d^p a_{i-p}}{dx^p},$$

$$b_j^{(h)} = \sum_{q=0}^h \binom{h}{q} \frac{d^q b_{j-q}}{dx^q}.$$

A további tárgyalás annak a kimutatását teszi szükségessé, hogy R_k egyenlő az R resultansnak már a bevezetésben részletesen leírt R_k aldeterminánsával.

Alakítsuk e észlelre a következő rendszereket:

$$\begin{aligned}
 d_{F^{m-k-1}F}^{m-k-1} & \equiv F^{(m-k-1)}(q) \equiv a_0^{(m-k-1)} C_0^{(m+n-2k-1)}(q) + \dots + a_{m-k-1}^{(m-k-1)} C_{m-k-1}^{(m)}(q) \\
 d_{F^{m-k-1}}^{m-k-1} & \equiv F^{(m-k-1)}(q) \equiv a_0^{(m-k-2)} C_0^{(m+n-2k-2)}(q) + \dots + a_{m-k-2}^{(m-k-2)} C_{m-k-2}^{(m)}(q) \\
 & \vdots \\
 d_{F^{m-k-2}F}^{m-k-2} & \equiv F^{(m-k-2)}(q) \equiv a_0^{(m-k-2)} C_0^{(m+n-2k-2)}(q) + \dots + a_{m-k-2}^{(m-k-2)} C_{m-k-2}^{(m)}(q) \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 F(q) & \equiv a_0 C_0^{(m-k-1)}(q) + \dots + a_m C_m^{(m)}(q) \\
 d_{F^{m-k-1}G}^{m-k-1} & \equiv F^{(m-k-1)}(q) \equiv b_0^{(m-k-1)} C_0^{(m+n-2k-1)}(q) + \dots + b_{m-k-1}^{(m-k-1)} C_{m-k-1}^{(m)}(q) \\
 d_{F^{m-k-1}}^{m-k-1} & \equiv F^{(m-k-1)}(q) \equiv b_0^{(m-k-2)} C_0^{(m+n-2k-2)}(q) + \dots + b_{m-k-2}^{(m-k-2)} C_{m-k-2}^{(m)}(q) \\
 & \vdots \\
 G(q) & \equiv b_0 C_0^{(m-k)}(q) + \dots + b_m C_m^{(m)}(q)
 \end{aligned}$$

V)

$$\begin{aligned} F^{(n-k-1)}(y) &\equiv \int_0^{(n-k-1)} y^{(m+n-k-1)} + f_1^{(n-k-1)} y^{(m+n-k-2)} + \dots + f_{m+n-2k-1}^{(n-k-1)} y^{(k)} + \dots + f_{m+n-k-1}^{(n-k-1)} y \\ F^{(n-k-2)}(y) &\equiv \int_0^{(n-k-2)} y^{(m+n-k-2)} + \dots + f_{m+n-2k-2}^{(n-k-2)} y^{(k)} + \dots + f_{m+n-k-2}^{(n-k-2)} y \\ &\vdots \end{aligned}$$

és végül a

$$\begin{aligned}
C^{(m+n-2k-1)}(y) &\equiv c_0^{(m+n-2k-1)} y^{(m+n-k-1)} + c_1^{(m+n-2k-1)} y^{(m+n-k-1)} + \dots + c_{m+n-2k-1}^{(m+n-2k-1)} y^{(k)} + \dots + c_{m+n-k-1}^{(m+n-2k-1)} y \\
C^{(m+n-2k-2)}(y) &\equiv c_0^{(m+n-2k-2)} y^{(m+n-k-2)} + \dots + c_{m+n-2k-2}^{(m+n-2k-2)} y^{(k)} + \dots + c_{m+n-k-2}^{(m+n-2k-2)} y \\
\vdots &\vdots \\
C(y) &\equiv c_0 y^{(k)} + \dots + c_k y
\end{aligned} \tag{VII}$$

rendszert, a melyekben

$$C^{(i)}(y) = \frac{d^i C(y)}{dx^i}, \quad c_i^{(\alpha)} = \sum_{p=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{p} \frac{d^p c_{i-p}}{dx^p}.$$

A függvénydeterminánsok elméletéből ismeretes tétel értelmében most már

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (F^{(n-k-1)}, F^{(n-k-2)}, \dots, F, G^{(m-k-1)}, G^{(m-k-2)}, \dots, G)}{\partial (C^{(m+n-2k-1)}, C^{(m+n-2k-2)}, \dots, C^{(1)}, C)} \\ & \cdot \frac{\partial (C^{(m+n-2k-1)}, C^{(m+n-2k-2)}, \dots, C^{(1)}, C)}{\partial (y^{(m+n-k-1)}, y^{(m+n-k-2)}, \dots, y', y)} = \\ & = \frac{\partial (F^{(n-k-1)}, F^{(n-k-2)}, \dots, F, G^{(m-k-1)}, G^{(m-k-2)}, \dots, G)}{\partial (y^{(m+n-k-1)}, y^{(m+n-k-2)}, \dots, y^{(k-1)}, y^{(k)})}. \quad \text{VIII)} \end{aligned}$$

De a mint az V) rendszer mutatja

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (F^{(n-k-1)}, \dots, F, G^{(m-k-1)}, \dots, G)}{\partial (C^{(m+n-2k-1)}, \dots, C^{(1)}, C)} = \\ & = \begin{vmatrix} a_0^{(n-k-1)} & a_1^{(n-k-1)} & \dots & \dots & a_{m+n-2k-1}^{(n-k-1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & \dots & a_{m-k} \\ b_0^{(m-k-1)} & b_1^{(m-k-1)} & \dots & \dots & b_{m+n-2k-1}^{(m-k-1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & \dots & b_{n-k} \end{vmatrix} = \bar{R}_k, \end{aligned}$$

a VI) alatti rendszerből pedig következik, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (F^{(n-k-1)}, \dots, F, G^{(m-k-1)}, \dots, G)}{\partial (y^{(m+n-k-1)}, \dots, y', y)} = \\ & = \begin{vmatrix} f_0^{(n-k-1)} & f_1^{(n-k-1)} & \dots & \dots & f_{m+n-2k-1}^{(n-k-1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & f_0 & \dots & f_{m-k} \\ g_0^{(m-k-1)} & g_1^{(m-k-1)} & \dots & \dots & g_{m+n-2k-1}^{(m-k-1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & g_0 & \dots & g_{n-k} \end{vmatrix} = R_k, \end{aligned}$$

végül a VII) alatti rendszer mutatja, hogy

$$\frac{\partial (C^{(m+n-2k-1)}, C^{(m+n-2k-2)}, \dots, C^{(1)}, C)}{\partial (y^{(m+n-k-1)}, y^{(m+n-k-2)}, \dots, y^{(k-1)}, y^{(k)})} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_0^{(m+n-2k-1)} & c_1^{(m+n-2k-1)} & \dots & c_{m+n-2k-1}^{(m+n-2k-1)} \\ 0 & c_0^{(m+n-2k-2)} & \dots & c_{m+n-2k-2}^{(m+n-2k-2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & c_0 \\ \hline \end{vmatrix} =$$

$$= c_0^{(m+n-2k-1)} c_0^{(m+n-2k-2)} \dots c_0^{(1)} c_0 = 1,$$

mivel

$$c_0^{(m+n-2k-1)} = c_0^{(m+n-2k-1)} = \dots = c_0^{(1)} = c_0$$

és c_0 értéke *egygyel* egyenlőnek vehető. Ha a függvénydeterminánsok itt talált értékeit a VIII) alatti relációba helyettesítjük, végül látjuk, hogy

$$\bar{R}_k = R_k. \quad \text{IX)}$$

Most már arra, hogy az $F(y)=0$ és $G(y)=0$ egyenleteknek csak *egy* közös partikuláris megoldásuk legyen, szükséges és elegendő, hogy

$$R = 0, \quad \bar{R}_1 \neq 0$$

legyen, vagy IX) miatt

$$R = 0, \quad R_1 \neq 0$$

legyen.

Két lineárisan független közös partikuláris megoldás létezésére pedig szükséges és elegendő, hogy

$$R = 0, \quad R_1 = 0, \quad \bar{R}_2 \neq 0$$

legyen, vagy ismét IX) miatt, hogy

$$R = 0, \quad R_1 = 0, \quad R_2 \neq 0$$

legyen.

Lépésről-lépésre így tovább következtetve, végül látjuk, hogy a k számú lineárisan független közös partikuláris megoldás létezésére szükséges és elegendő feltételek

$$R = 0, R_1 = 0, \dots, R_{k-1} = 0, R_k \neq 0.$$

Még megjegyezzük, hogy G. v. ESCHERICH a fent idézett értekezésében k független közös partikuláris megoldására a tőlem adottaktól különböző feltételeket állított fel; de a mint csakhamar meggyőződhetünk, e feltételek hamisak, levezetésük

természetesen helytelen; mert a mit ESCHERICH értekezésében a 68. lap első kikezdésében, valamint a 70. lapon az első kikezdésben állít, egyáltalában nem áll, pedig épen ezek az állítások szerepelnek bebizonyításában mint döntő argumentumok.

III.

Algebrai egyenletek közös gyökei.

Legyen a két algebrai egyenlet

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &\equiv f_0\lambda^m + f_1\lambda^{m-1} + \dots + f_m = 0, \\ \Gamma(\lambda) &\equiv g_0\lambda^n + g_1\lambda^{n-1} + \dots + g_n = 0,\end{aligned}\tag{X}$$

a hol az f és g együtthatók az előbbi fejezetben szereplő x független változótól független, de különben akárhány más paramétertől függő mennyiségeket jelentenek.

Könnyen kimutatható, hogy a X) alatti egyenleteknek akkor és csak akkor lesz k közös gyöke, ha az

$$\begin{aligned}F(g) &\equiv f_0 \frac{d^m g}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} g}{dx^{m-1}} + \dots + f_m g = 0 \\ G(f) &\equiv g_0 \frac{d^n f}{dx^n} + g_1 \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \dots + g_n f = 0\end{aligned}\tag{XI}$$

homogén lineár differenciálegyenleteknek, a melyekhez a X) alatti egyenletek mint karakteristikus egyenletek tartoznak, k lineárisan független közös megoldásuk van.

Hogy e feltétel szükséges, az közvetlenül amaz eljárásból következik, a melylyel állandó együtthatókkal ellátott lineár differenciálegyenleteket megoldunk. Ha ugyanis a X) alatti algebrai egyenleteknek k közös gyökük van, akkor a XI) alatti lineár differenciálegyenleteknek k lineárisan független közös partikuláris megoldásuk lesz.

Ugyanezen feltétel elegendő voltának kimutatása valamivel körülményesebb fejtegetéseket igényel, melyeket itt elhagyok. E fejtegetésekből kiderül, hogyha a XI) alatti lineár differenciálegyenleteknek k lineárisan független közös megoldásuk van, akkor ez a körülmény már maga után vonja azt, hogy a X) alatti algebrai egyenleteknek k közös gyökük lesz.

Ily módon tehát annak szükséges és elegendő feltételei, hogy a X) alatti algebrai egyenleteknek k közös gyökük legyen:

$$R = 0, R_1 = 0, \dots, R_{k-1} = 0, R_k \neq 0.$$

Ezek a feltételek valamivel egyszerűbb alakot öltenek, ha figyelembe vesszük, hogy a jelen tárgyalásban az f_0, f_1, \dots, f_m és g_0, g_1, \dots, g_n együtthatók az x -től független mennyiségek. E körülménynél fogva

$$\begin{aligned} f_0^{(g)} &= f_0, f_1^{(g)} = f_1, \dots, f_m^{(g)} = f_m, f_{m+1}^{(g)} = f_{m+2}^{(g)} = \dots = 0, \\ g_0^{(h)} &= g_0, g_1^{(h)} = g_1, \dots, g_n^{(h)} = g_n, g_{n+1}^{(h)} = g_{n+2}^{(h)} = \dots = 0. \end{aligned} \quad \text{XII)}$$

($g=0, 1, \dots, n-1$; $h=0, 1, \dots, m-1$)

Ha most ezekre az egyenlőségekre tekintettel vagyunk, akkor látjuk, hogy

$$R = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 & \dots & f_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_0 & \dots & \dots & \dots & f_m \\ g_0 & g_1 & \dots & g_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g_0 & \dots & g_n & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_0 & \dots & \dots & \dots & g_n \end{vmatrix}$$

nem más, mint a X) alatti algebrai egyenletek SYLVESTER-féle resultánsa és

$$R_k = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{m+n-2k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_0 & f_{m-k} \\ g_0 & g_1 & \dots & g_{m+n-2k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_0 & g_{n-k} \end{vmatrix}$$

az R -nek amaz aldeterminánsa, mely az első k f -sorának, első k g -sorának, első k és utolsó k oszlopának elhagyása útján keletkezik. Látnivaló tehát, hogy a talált

$$R = 0, R_1 = 0, \dots, R_{k-1} = 0, R_k \neq 0$$

feltételek tartalmuk és alakjuk tekintetében is teljesen meg-egyeznek azokkal, melyeket L. HEFFTER a Math. Annalen 54. köt. 541. lapon közzétett.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 december 17.-én tartott üléséből.)

A SZŐLŐ FÁSOLTVÁNYAINAK FORRADÁSÁRÓL.

ISTVÁNFYI GYULA 1. tagtól.

A szőlő fásoltására vonatkozó tanulmányaimat 1901-ben kezdettem meg s minthogy az oltási synbiosis vizsgálatánál a forradás létrejötte szerintem az első tisztázásra váró fontos kérdés, legelőbb is ennek tanulmányozásával foglalkoztam s kiterjeszkedtem a hazánkban szokásos összes fásoltási és vegyes oltási módokra. Azonban az eredményeknek, habár csak rövid közlését is, nagymérvű elfoglaltságom meggátolta.

A szőlészeti irodalomban a fásoltások forradásának szövettani vizsgálata, melyhez rendkívül fontos kérdések fűződnek, még egyáltalán nem nyert kellő méltatást, ellenére annak, hogy az összeoltás folytán nyilvánuló kölcsönhatás, valamint külső és belső morfológiai elváltozások, az oltás módosító befolyása a termék minőségére s mennyiségére, az élettartamra, a betegségek iránti fogékonyságra, épügy mint a párosítandó fajták rokonságának kérdése, az oltási hibridek keletkezésének lehetősége stb. mind kutatási problémák gyanánt szerepelnek.

Míg tehát a mesterséges egyesítés révén megteremtett synbiosis és megnyilvánulása a legkülönbféle irányú tanulmányokra nyújtott alkalmat (minek nyomán egyben rendkívül nagykörű irodalom keletkezett), azzal, hogy mikép jön létre az összeforradás, alig foglalkoztak. VIALA és RAVAZ¹ tették szóvá mellékesen az oltási forradást egy régibb (1892) munkájukban, de a szövettani vonatkozásokat csak futólag érintik. Legújabbban azonban a folyó év (1906) őszén R. GERNECK² közölt egy elő-

¹ VIALA P. et RAVAZ L. Les vignes américaines, adaptation, culture, greffage, pépinières. 1892. Nouv. Éd. 1896.

² GERNECK R. Untersuchungen über den Wachsthumverlauf bei der Veredelung von Reben. Ber. d. kgl. Lehranstalt f. Wein-, Obst- u. Gartenbau (Geisenheim) f. das Etatjahr 1905. 1906., 305. l. s. köv.

leges jelentést, melyben a csapos oltást írja le, de a nyelves oltást is érinti pár sorban, s utal arra, hogy ép úgy forrad, mint a csapos oltás.

Ezen közlemény által indítva szükségesnek látom vizsgálati eredményeimet — elsőbbségem érdekében — röviden összefoglalni.

A részletesebb és szövettani bizonyító ábrákkal támogatott feldolgozást lehetőleg rövid időn belül szándékszom közreadni.

A forradási folyamat sejtani és szövettani feltüntetésében a nyelves párosítással készült s Richter-féle módon ládákban moha közt előhajtott oltványokra leszek tekintettel és pedig első sorban a Riparia Portalis alanyon Olasz Rizlinggel készült oltványokra.

1. A callus képződése, összeolvadása.

Az oltás utáni 1—4 nap az oltványokon, a metszési lapokon, az átmetszett szöveti elemek elhalása észlelhető. A következő napokon pedig a sebhegesztő callus termelése készítettik elő. A callus általában mindig a nemes (európai) oltógalyon indul meg, s azon később is erőteljesebb fejlődésű, mint az (amerikai) alanyrészen.

A callus termelésében a boltozatosan hajtogatott para-övön belüli szövetek (a háncsban található rostok meg a szítás csövek és az elsődleges fa kivételével) mind közreműködnek. Ez már 5-öd napra nyilvánvaló lesz, mert szapora oszlások s gyors növekedés révén főleg a cambium meg a másodlagos háncs és fa, valamint a bélsugárnak a cambiumon túl levő része (kéregsugár) mind szélesebbé válik.

Ezen fokozott fejlődés következtében a metszési lapoknak az elsődleges fán túl levő oldala domború lesz, s létrejön a callus, a sebhegesztő szövet, mely legnagyobbbrészt parenchymes, vékonyfalú, áttetsző, plasmadús sejtekből áll. Alsó részébe a cambium azonnal bevonul a másodlagos szövetekkel együtt, sőt az elsődleges háncs parenchymája is közvetlen belenövekszik. Sok sejtben a raphidok kiválása megindul.

A callus fejlődésében aszerint, a mint az oltás alkalmával a háncs elmeteszett-e vagy sem, némi eltérések jelentkeznek.

A 6—11. napig mindkét oltványfélen folyton sarjadzik a callus. Miután, mint jeleztem, az amerikai meg európai fel különböző mértékben termeli a callust, az oltás érdekében felette szükséges, hogy ezen különbség lehetőleg ne legyen nagyon elütő, mert ellenkező esetben rossz forradás jön létre. A 10—11. napon a kidomborodó callusok egymásra találhatnak s összetapadnak. Ha azonban igen lassu menetben történt a fejlődés, vagy a metszési síkok igen távol vannak (az oltványrészek nincsenek jól összetolva), a callusok kerületi sejtjeinek hártája elparásodik, elbarnul.

Rendesen azonban kedvező körülmények közt az érintkezés hamar létesül s csak a szabad felület barnul meg. A callusfelek forradása, úgy látszik, közvetlenül megy végbe, a fiatal sarjadzó meristemás sejtek hártája összetapad s összenő. De ha az összeérő callusok felülete már parás, akkor a szélső sejtek összesajtolódnak, aztán ez a réteg felszívatik s csak ezután megy végbe a mögötte levő sejtek összeforradása.

Ebből arra kell ezidőszerint következtetni, hogy a sejtmagvak vagy plasma-testek fuziójára nem kerül sor. A forradás menetében máshol sem akadtam még ily esetekre, vagyis oly tényekre, melyek az oltási hybrideknek a különváló egyedek sejtmagvainak összeolvadása révén való létrejöttét támogatnák.

Átlagosan 12 nap alatt a callusok összeforradása teljes, olyannyira, hogy az egyideig mutatkozó sárgás határvonal is eltűnik.

2. Hegesztő szövet.

Ezen most először leírandó hegesztő szövet (mert a francziák a «tissu cicatriciel» alatt a callust értik) feladata a metszési lapok közti térnek kitöltése s bizonyos forradások közvetítése.

A callus sarjadzása alatt előkészítettett már a hegesztő szövet fejlődése is, úgy hogy a 14 napos oltványon (hol tehát a callusok már a nemes és amerikai egyedek kéregrészeit egybekötik) az egyesült callusok töréséből egy gyöngédebb alkotású szövet kezd a metszési lapok közti térbe behatolni,

s kitölti azt tökéletesen; hozzásimul az alany és nemes rész elsődleges fájához, behatol minden mélyedésbe, kiformálja azt s az elmetszett faedények tágabb üregébe gombhoz hasonló szöveti nyúlványokat bocsát.

A hegesztő szövet törészébe belevonulnak a két fél cambiumai is másodlagos szöveteikkel, s egyelőre ivelten elhajló vonulatot alkotnak s tovább differenciálódnak. Sorozatos hosszmeteszeten az is megállapíthatni, hogy a hegesztő szövet még az alanyrészen, a túlságos erős összetolás következtében keletkező hasadékba is benyomul, azt kitölti s ott hatalmas szövet-tömeget alkot. Valamint, hogy a faedények thyllisektől részben kitöltött üregébe is beerőszakolja magát hosszú karalakú nyúlányaival s a thyllisekre szorosan rátapad.

A hegesztő szövet felületét egy ideig többé-kevésbé meristemás sejtrétegek burkolják s egész szélességében barna, cseranyagos sejt soroktól harántul csikozott.

A hegesztő szövet törése, ha az oltási lapok homorúan vágattak, igen keskeny, s ez aztán megakadályozza kellő tömeges fejlődését; tehát a gyakorlatra is fontos utalás foglaltatik e szövettani tényben.

A hegesztő szövet hézag nélkül szorosan tapadván az elsődleges faelemekre (a metszési lapokon), részben össze is forr velük; ez főleg az alanyrész bélsugaraival mentén jelentkezik. Ebből viszont következik, hogy rendkívül fontos a sima, ép felületű metszés és helyes összeillesztés, mert ha ez elmulasztatik, a hegesztő szövet a legkülönbözőbb módon helyezkedik el, még a bélben is szétterjed, s rossz forradás keletkezik. Ez idő alatt (3 hetes oltványokon) a callus differenciálódása tovább folytatódik, s különösen feltűnő, hogy a farész kiválása az alany callusán nagyobb mérvű, mint az európai callusán. A cambiumnak a hegesztő szövetbe hatoló vonulatai szintén tovább differenciálódnak s most a hegesztő szövet belsejében a két divergáló szállító szöveti vonulat ivelten egymáshoz közeledik s egyesül.

A hegesztő szövetek az öt-hetes oltványokban már a bélbe hatoltak, s ott az *átellenes hegesztők egymással találkozási* összetapadnak.

3. Oltási nyelvek.

Az öt-hetes oltványokon az alany és a nemes rész nyelvei a hol egymással közvetlenül szorosan érintkeznek (a véglapokon), sokszor összeforradnak. Tehát ilyen esetekben megvalósul az *alany és nemes rész elsődleges vagyis tavalyi fájának forradása*.

Ha a forradás egyáltalán létrejött, tökéletes; a határvonal eltűnik, s az alany és nemes rész fája egymásba kigyózóan áthajló fanyalábok révén szerves összefüggésbe jut. Ennek az összeköttetésnek tartóssága, úgymint gyakorisága is a körülményektől függ. Sokszor az alany tavalyi fája megsárgul, pusztul s akkor az összeköttetés ideiglenes jellegű; viszont két években is pompásan megmaradhat.

A nyelveknek oldali *közvetlen* forradása akkor jelentkezik, mikor bélsugaraik váltak szabaddá, a nyelvezés révén. Különbözik inkább ez egyik nyelv hegye a másik tövével nő össze, mert itt a másodlagos képződésű fás szövetekbe ér, melyek a callusból differenciálódás közben a metszési lapok közti térbe hatoltak. A hegesztő szövetnek legmélyebbre hatoló részei pedig, ha a nyelvek közé kerülnek, *közvetlen*, oldali forradást idézhetnek elő.

A két hónapos oltványoknál a nyelvek forradása még jobban jelentkezik. A hegesztő szövetek ebben a korban a tövükön már egészen fává alakultak ki, s hosszmetszeten a fanyalábok mint a tengelyre rézsút futó, kigyósan hajtogatott vonulatok jelentkezik; a cseranyagos harántsejtsorok pedig bélsugarak szerepét játszzák.

A továbbfejlődés folyamán aztán még pótló összenövések is mutatkoznak, pl. a három hónapos oltványokban a nemes résznek nyelve összeforrad *több mint fele részben az oltvány felső részéből benyúló hegesztő szövettel*, valamint megfordítva is az alany-nyelve az alsó hegesztő szövettel. De a mi szintén fontos, a hegesztő szövet mélyen benyomulván az alany hasítékába, összenő kifelé az alanynak régi (elsődleges) és új (másodlagos) fájával.

Az oltás sikerére nagy jelentőségű, hogy az egyenletes fejlődésű hegesztő szövetek, a mint átlósan szembenőnek, egymással egyesüljenek is (a bélben), mert akkor mint egy szövet-

lemez kúsznak tovább a metszési lapokon, s így nemcsak a hézag kitöltését, hanem a forradást is legjobban közvetíthetik.

4. A callus differenciálódása.

A callus fájának kialakulása folytatódván, a két hónapos oltványban a másodlagos fának teljes áthidalása megtörtént, ezt pedig az újonnan kialakult s az oltvány felületével párhuzamosan haladó kigyózóan hajtogatott fanyalábok közvetítik.

A háncs kialakulása jóval később, a $3\frac{1}{4}$ hónapos oltványokban valósul meg. Így lesz a forradási öv hézagtalanul fiatal hasonnemű szövetekkel kitöltve. Ez tehát az iskolázás után $1\frac{1}{4}$ hónappal jelentkezik. Sikere, tökéletessége tehát nagy mértékben függ az időjárástól, az éjjeli és nappali hőmérséki viszonyoktól, az oltványok kellő gondozásától.

Az öt hónapos oltványban aztán (vagyis az iskolázás harmadik hónapjában) a callusban termelt másodlagos szövetek továbbfejlődésük, szaporodásuk folytán az alany és nemes rész favonulatainak megfelelően legyezőszerűen terjeszkednek ki, s a végleges kialakulás is végbe megy. A callus forradt része tehát öt hónapos oltványon teljesen átalakult, a kéreg is kifejlődött s a para hézag nélkül kapcsolja össze az oltási felek paráját.

Az oltvány további sorsát vizsgálva, azt találjuk, hogy 6 és $\frac{1}{2}$ hónaposoknál a hegesztő szövet továbbfejlődéssel a nemes nyelvének külső oldala s az alany másodlagos fája közt létesít utólagos forradást s teljesen iává alakul át. Tehát ez a forradás némely esetben csak a $6\frac{1}{2}$ hónapos oltványokon jelentkezik, míg különben a 3 hónaposokon is megtörténik.

★

Áttekintve a forradás lefolyását, kimutattam, hogy a pusztán callus révén való kerületi forradáson kívül, mely régóta ismeretes általánosságban, még a hegesztőnek neveztem szövet révén többrendbeli fontos forradás jöhet létre, sőt hogy a nyelvek is összenőhetnek. Az oltási forradásról ezen vizsgálatok révén sokkal világosabb képet nyerünk, mert nyilvánvaló, hogy a régi fának, habár sokszor részleges forradása, továbbá a hegesztő révén támadt áthidalások folytán, az alany és nemes rész

vizszállító rendszere ideiglenes vagy maradandó közbeiktatott ágakkal teljesebb összeköttetésbe kerül s ennek az oltás további sorsára igen nagy befolyása lehet. Ezekkel a tényekkel szintén számolni kell.

Ezek alapján azt hiszem, hogy a forradás

1. *legtökéletesebb módjának* az tekinthető, mikor nemcsak a callus forrad, hanem a hegesztő szövetek, s a nyelvek is (részben közvetlen, részben a hegesztő szövet révén) közreműködnek az oltási egyedek minél teljesebb egyesítésében. Ez azonban aránylag ritka eset.

Az ily forradás nemcsak szövettanilag, de ép ebből ki-folyóan élettanilag is a legjobb oltványt nyújthatja, melynek életműködése a legzavartalanabb, élettartama a leghosszabb, ha a párosított fajták rokonsága is kellően figyelembe vétetett.

2. A hegesztő szövet benyomulva az elsődleges (tavalyi) farészek közé, differenciálódik s kapcsolatot hoz létre a régi s új fa között. Ez már gyakori, az ilyen oltványt élettanilag igen jónak minősítjük. Az utolsó eset:

3. a kerületi callusos forradás (másodlagos szövetek közt) azzal, hogy a hegesztő szövet is a tövén fává alakul át; ez a leggyakoribb. Ez az átlagos fejlettségű oltvány.

Mindezekből, egyelőre az előhajtást figyelmen kívül hagyva, arra lehet következtetni a gyakorlatot illetőleg, hogy az oltvány-egyedek egyforma vastagságától eltekintve, még az s feltétlen követelmény, hogy a vágólapmetszés meg nyelvezés biztos kézzel hajtassék végre, sima felületű (nem homorú) metszési lapot s nyelveket adjon, szövettörmelékek, szálkák ne vitessenek bele (gátolják a forradást) s a nyelvek túlságos hosszúak ne legyenek. Ha a munkás az oltási nyelveket nem tartaná megfelelőnek, úgy ne faragja, alakítsa azokat tovább, mert így könnyen szakítást idéz elő. A forradás aránylag rövid ékek mellett is tökéletes lehet.

Az összeillesztésnél pedig helyesen tolja össze a vesszőket s ne próbálgasson az összeilleszkedés erősségéről többször meggyőződni, mert ezzel megint ronthat az oltványokon a forradás szempontjából.

Óvakodnia kell azonban attól, hogy túlságos szorosan össze

ne tolja az oltványvesszőket, mert belső, szemmel nem látható hasadások, repedések jelentkeznek s a forradás létrejöttét megnehezítik, vagy helytelen, torzult forradást okoznak. Ha pedig igen lazán illeszti össze az egyedeket, akkor a metszési lapok távol esvén, a hegesztő szövet behatolása, általán a callus összenövése is nagyon megnehezítettetik.

A túlságos erős, de egyoldalú s hiányosan forradó callusfejlődés különben már magában véve is okozhatja az oltványok rossz fejlődését, mert könnyen szétfeszíti az egyedeket, annak ellenére, hogy kívülről ugyan ráborul s körülfogja az alanyt, de megfelelő belső egyesülés nem jön létre. Sőt az ily túlságos erős s egyoldalú callusból létrejövő hegesztő szövetek a bélben hatalmasan fejlődven, gomba vagy csap alakú kis vessződarabokká differenciálódnak s így is sokszor az oltvány szétfeszítését okozhatják.

★

Ez alkalommal csak a forradás menetének általános képét óhajtottam nyújtani, úgy a mint az évek során át több ezer fásoltványnak fixálása, kellő preparálása és sok ezer sorozatos metszetre feldolgozása alapján, megfelelő anyagon, a fejlődésnek és kezelésnek figyelembe vételével megállapítható volt.

A finomabb szövettani és sejttani folyamatokkal, nevezetesen a protoplasma-testek összeköttetésével, a forradási ragasztó szövetrészek felszívódásával máskor kívánok foglalkozni.

Jelezhetem azonban, hogy egy eredeti, egészen új mikro-technikai módszer alkalmazásával:

1. nemcsak, hogy sikerült a szőlővessző eleven s egymással szomszédos elemei közt kimutatni a protoplastoknak plasmodesmák révén való összefüggését, hanem

2. az oltványok callusában s hegesztőszöveiben s

3. a teljes végleges forradásba kerülő elemek közt is az összefüggés láthatóvá tehető.

Igy tehát az oltás révén symbiosisba lépett szőlőegyedek szerves összeköttetése a legteljesebb módon valósul meg.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1906 december 17.-én tartott üléséből.)

